

Conformal field Theory

Appunti del corso "Statistical field theory", prof. A. Cappelli

A. Arena, A. Chiavetta, D. Gibilaro, F. Murgana, V. Naso

Materiale consigliato

- G. Mussardo: Statistical Field theory (libro molto completo) ;
- Lezioni di Houdres (1988) Ginsparg (2D Conformal Field Theory, tecnico ma conciso);
- J. Cardy : Introduction to Quantum Field Theory (RG, Scaling).

Parte I

Richiami di meccanica statistica e teoria statistica dei campi

Prima di arrivare a trattare le teorie invarianti di scala ed in particolare le teorie invarianti per trasformazioni conformi è necessario fare un breve excursus, in cui tratteremo brevemente i fenomeni critici e la loro descrizione classica all'interno del contesto della meccanica statistica e della teoria di campo statistica.

La *teoria statistica di campo* (SFT) è una tecnica con un vastissimo range di applicazione, che va dalla meccanica statistica alla materia condensata, che utilizza l'approccio della teoria di campo specializzandolo a tutto ciò che non riguarda le particelle elementari o le interazioni fondamentali tra di esse. In particolare, uno dei concetti fondamentali utilizzati in questo contesto è quello di *quasi-particella*, ovvero, in generale, un'eccitazione del sistema.

Per poter applicare la teoria di campo ad un sistema, è necessario che siano verificati determinati prerequisiti:

- il sistema goda dell'*invarianza per traslazione*;
- sia possibile effettuare il *limite del continuo*, ovvero sia possibile considerare lo spazio come un continuo;
- si sia in una configurazione di *bassa energia*;
- il sistema sia *invariante per trasformazioni di Lorentz*;
- esistano *massless excitations* o, in generale, eccitazioni del sistema e quindi quasi-particelle.

Sotto queste ipotesi è dunque possibile applicare la teoria di campo allo studio del nostro sistema, ottenendone una descrizione *effettiva*, cioè una *Teoria di campo effettiva*. Essa è proprio la teoria di campo che emerge da certe eccitazioni di bassa energia in cui è possibile (ad esempio nel limite di grandi lunghezze d'onda, quando la lunghezza di correlazione diverge, riscaldando la teoria con il gruppo di rinormalizzazione...) una descrizione continua. Vedremo adesso delle applicazioni di quanto accennato fino ad ora.

1 Modello di Ising 2D

Il modello di Ising è un modello molto semplice che viene solitamente utilizzato per descrivere un sistema ferromagnetico ma che, come vedremo, è in grado di cogliere le caratteristiche essenziali, vicino alla criticità, di molti altri tipi di sistemi. Esso ha come gradi di libertà degli *spin* σ_i che possono assumere i valori discreti ± 1 e che sono collocati nei vari nodi i di un generico reticolo (che per semplicità abbiamo scelto bi-dimensionale e quadrato, vedi Figura 1).

L'hamiltoniana H che descrive il sistema avrà la forma:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i \quad (1)$$

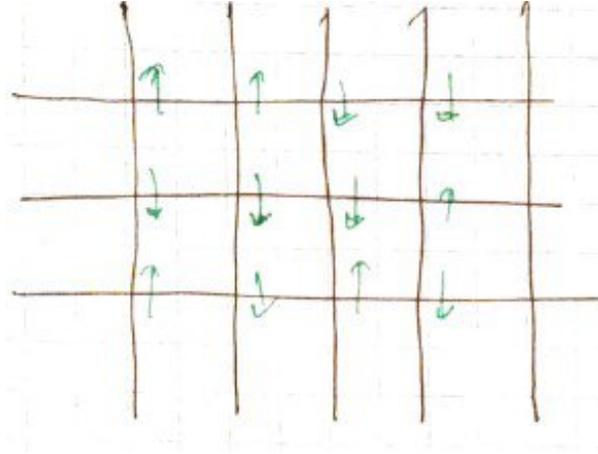


Figura 1: Esempio di reticolo quadrato bidimensionale con il quale descrivere il modello di Ising.

in cui J rappresenta l'intensità dell'interazione tra gli spin, $\langle i, j \rangle$ indica che i siti i e j devono essere primi vicini per interagire (vedi Figura 2) e h è un campo magnetico esterno. In particolare il sistema risulta ferromagnetico se $J > 0$, cioè le configurazioni energeticamente favorite sono quelle per cui gli spin sono allineati; viceversa, se $J < 0$, esso sarà detto anti-ferromagnetico e le configurazioni ad energia minore saranno quelle con spin antiparalleli. Allora la *funzione di partizione* Z del sistema, nell'ensemble canonico, sarà data da:

$$Z[\beta, h] = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{-\beta H} = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{\beta J \sum_{\langle i, j \rangle} \sigma_i \sigma_j + \beta h \sum_i \sigma_i} \quad (2)$$

dove $\beta = 1/k_B T$ e $\sum_{\{\sigma_i\}}$ indica la somma su tutte le possibili configurazioni degli spin su tutti i siti del reticolo.

Una volta definita la funzione di partizione, tutte le quantità rilevanti per il sistema si possono ottenere a partire da sue opportune derivate. In particolare possiamo anche definire la *media di un osservabile* $O(\beta, h)$ come

$$\langle O(\beta, h) \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma_i\}} O(\beta, h) e^{-\beta H} \quad (3)$$

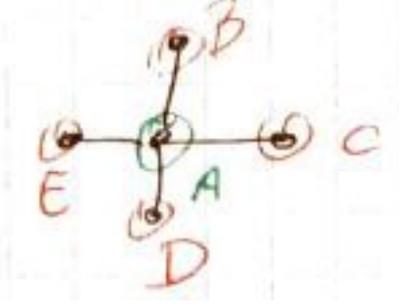


Figura 2: I siti B, C, D ed E sono i primi vicini del sito A nel caso di un reticolo quadrato bidimensionale.

Come precedentemente affermato, il modello di Ising è quindi molto semplice, ma al tempo stesso per nulla banale. Infatti esso:

- è esattamente risolubile in $d = 2$ dimensioni (risolto da Onsager negli anni '60);
- presenta un *punto critico* e quindi una *transizione di fase del 2° ordine*.

In particolare noi lo risolveremo esattamente in due dimensioni con l'utilizzo della *Teoria di campo conforme* (CFT) in maniera non banale.

Analizziamo adesso il *diagramma delle fasi*, ovvero il grafico delle fasi del sistema in funzione dei parametri β , h e della magnetizzazione $M = \langle \sigma_i \rangle$. Come mostrato nella Figura 3, β_c è il *punto critico* della teoria, al quale avviene la transizione di fase, mentre ad alto β , per $h = 0$ avviene la *rottura spontanea della simmetria* (SSB), ovvero la simmetria \mathbb{Z}_2 di cui il sistema gode viene rotta dalla scelta di uno dei due possibili valori per la magnetizzazione (discuteremo questo aspetto con maggiore dettaglio in seguito). Questo significa che se grafichiamo la magnetizzazione $M = \langle \sigma_i \rangle$ per $h = 0$ (campo nullo), essa sarà, come mostrato in Figura 4

$$M(\beta, h = 0) = \begin{cases} 0 & \beta < \beta_c \\ \sim (\beta - \beta_c)^{1/2} & \beta > \beta_c \end{cases} \quad (4)$$

Ciò ci permette di identificare M come *parametro d'ordine* della teoria (cioè $M = 0$ nella fase simmetrica e $M \neq 0$ nella fase rotta) e di identificare l'*esponente critico* (di cui parleremo tra poco) $\beta = 1/2$ (da non confondere con $\beta = 1/K_B T$). E' possibile verificare, inoltre, che la derivata della magnetizzazione M rispetto al campo esterno h risulta discontinua. In

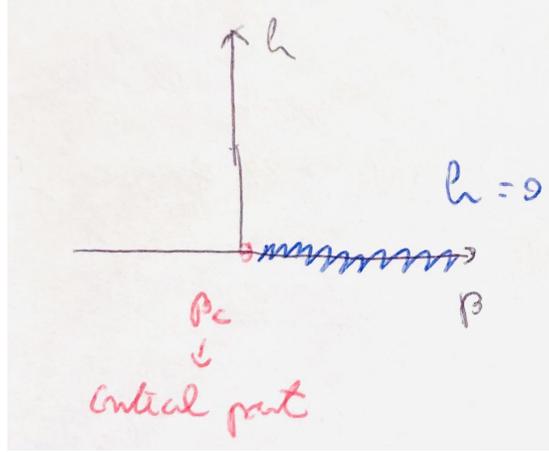


Figura 3: Diagramma delle fasi del modello di Ising in funzione di β e del campo esterno h . In rosso è evidenziato il punto critico β_c mentre in blu è rappresentata la zona ad $h = 0$ dove avviene la SSB.

particolare, detta F l'energia libera del sistema, essa è legata alla funzione di partizione dalla relazione

$$\log Z = -\beta F \quad (5)$$

e a sua volta M è data da

$$M = \frac{\partial \log Z}{\partial h} \quad (6)$$

Questo significa che una discontinuità nella derivata di M corrisponde ad una discontinuità nella derivata seconda dell'energia libera F e ci permette di classificare questo fenomeno critico come una *transizione di fase del 2° ordine*.

Un'altra caratteristica chiave di questo tipo di fenomeni critici è che la *lunghezza di correlazione* ξ , ovvero la portata delle correlazioni, diverge al tendere di $\beta \rightarrow \beta_c$, cioè si ha

$$\lim_{\beta \rightarrow \beta_c} \xi = \infty \quad (7)$$

Come vedremo, questo è collegato al fatto che la *funzione di correlazione* $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle$ avrà il seguente comportamento:

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle \sim \begin{cases} e^{-\frac{|i-j|}{\xi}} & \beta \neq \beta_c \\ \frac{1}{|i-j|^{1/4}} & \beta \rightarrow \beta_c \end{cases} \quad (8)$$

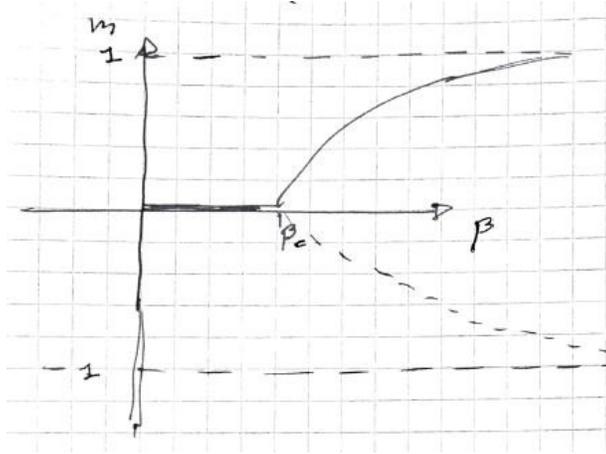


Figura 4: Magnetizzazione specifica $m = M/N$, con N numero di spin del sistema, nel modello di Ising a campo esterno nullo in funzione di β . Le linee continue e tratteggiate rappresentano ciascuno dei due stati possibili di magnetizzazione del sistema a seguito della rottura spontanea della simmetria.

In particolare, il caso $\beta \neq \beta_c$, che implica $\xi = \text{finita}$, corrisponde a delle eccitazioni massive del sistema, la cui massa m è data da

$$m = \frac{1}{\xi a} \quad (9)$$

in cui a rappresenta il passo reticolare.

Nel caso $\beta \rightarrow \beta_c$, che implica $\xi \rightarrow \infty$ (cioè le correlazioni si propagano con grandi lunghezze d'onda), la funzione di correlazione esibisce un comportamento a *legge a potenza*, in cui l'esponente $1/4$ rappresenta un altro esempio di esponente critico (che in questo caso vedremo corrisponde alla *dimensione anomala* η). Per altro esso è non banale, cioè è diverso da quello che si otterrebbe per una teoria libera (per cui $\eta = 0$). Cercheremo in seguito di motivare questo risultato tramite l'utilizzo della CFT.

Un'altro elemento indispensabile per affrontare una teoria di campo, come precedentemente affermato, è il *limite del continuo* (CL). Nel caso in esame esso corrisponde a far tendere $a \rightarrow 0$, ma tenendo conto che $\xi \rightarrow \infty$. Ciò implica che

$$\xi \rightarrow \infty \quad a \rightarrow 0 \quad \text{ma} \quad m = \frac{1}{\xi a} = \text{finita} \quad (10)$$

Per come è stato definito dunque, il CL è possibile unicamente in un intorno del punto critico ($\beta = \beta_c, h = 0$), ed è proprio in tale limite che è possibile applicare la teoria di campo. In realtà il modello è parzialmente risolvibile, applicando tale limite, anche nel caso in cui ($\beta = \beta_c, h \neq 0$). In questo caso la teoria risulta descritta da 8 particelle massive scalari che, inquadrare nel contesto dei gruppi di Lie, sono legate ad una simmetria E8. Questo risultato, tutt'altro che banale, è stato ottenuto da A.Zamolodchikov (89-90).

2 Teoria di campo euclidea

Tornando indietro alla teoria che si ottiene nel limite del continuo per $h = 0$ vicino al punto critico, essa è di fatto una *QFT euclidea*(EFT). Questo è dovuto al fatto che una QFT in d dimensioni spaziali risulta essere in realtà una teoria in $d + 1$ dimensioni, a causa della dimensione temporale, mentre una SFT tiene conto solo di D dimensioni spaziali. La connessione tra le due avviene dunque tramite una QFT euclidea, in D dimensioni, con l'introduzione di un *tempo immaginario*. In particolare la metrica $\eta_{\mu\nu}$ verrà modificata nel seguente modo:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} (1, -1, -1, \dots, -1) & \text{QFT in } d + 1 \text{ dimensioni} \\ (1, 1, 1, \dots, 1) & \text{EFT/SFT in } D \text{ dimensioni} \end{cases} \quad (11)$$

Un altro concetto che ci tornerà utile e che si inserisce nell'ambito della teoria di campo euclidea è la *rotazione di Wick*. Come precedentemente affermato, il nostro obiettivo è mappare il tempo reale della QFT in un tempo immaginario nella EFT. Per fare ciò iniziamo considerando il *propagatore* $\Delta(x)$, e per semplicità scegliamo di lavorare con una teoria scalare non massiva. Allora, detti $x = (x_0, \vec{x})$ e $p = (p_0, \vec{p})$, esso avrà la forma:

$$\Delta(x) = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{e^{i p \cdot x}}{p^2 + i\varepsilon} \quad (12)$$

dove per comodità abbiamo definito $n = d + 1$ e $+i\varepsilon$ indica che l'integrale su p_0 va effettuato nel piano complesso di p_0 , utilizzando il *contorno di Feynman*, mostrato in figura 5, il quale garantisce la causalità della teoria. Sviluppiamo allora il calcolo:

$$\Delta(x) = \int \frac{d^{n-1} p}{(2\pi)^{n-1}} e^{-i \vec{p} \cdot \vec{x}} \int \frac{d p_0}{(2\pi)} \frac{e^{i p_0 \cdot x_0}}{p_0^2 - |\vec{p}|^2 + i\varepsilon} \quad (13)$$

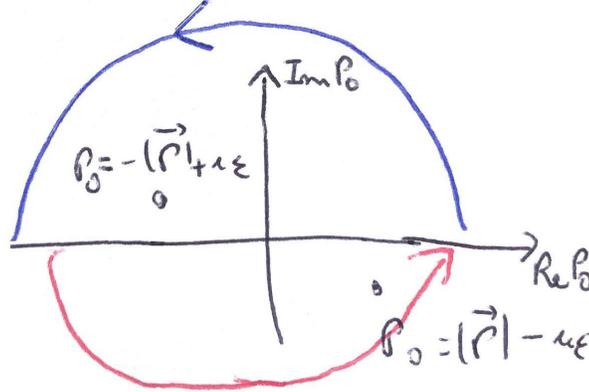


Figura 5: Rappresentazione del contorno di Feynman nel piano complesso di p_0 insieme ai poli del propagatore. In rosso ed in blu sono rappresentati i modi di chiudere il contorno nel caso rispettivamente di $x_0 < 0$ e $x_0 > 0$.

ciò significa che si avranno due poli, a $p_0 = |\vec{p}| - i\varepsilon$ e $p_0 = -|\vec{p}| + i\varepsilon$, che contribuiranno all'integrale svolto con il teorema dei residui quando cadranno all'interno del corrispondente contorno di Feynman. In particolare distinguiamo i due casi in base al segno di x_0 come mostrato in Figura 5, in modo da poter applicare il *lemma di Jordan* e trascurare il contributo dato dall'integrale di linea sui diversi semicerchi:

- se $x_0 > 0$ chiudiamo il percorso nel semipiano $\text{Im } p_0 > 0$. In questo modo contribuisce solo il polo $p_0 = -|\vec{p}| + i\varepsilon$, pertanto si avrà

$$\int \frac{d p_0}{(2\pi)} \frac{e^{i p_0 \cdot x_0}}{p_0^2 - |\vec{p}|^2 + i\varepsilon} = 2\pi i \lim_{p_0 \rightarrow -|\vec{p}| + i\varepsilon} \frac{e^{i p_0 \cdot x_0}}{p_0^2 - |\vec{p}|^2 + i\varepsilon} (p_0 + |\vec{p}| - i\varepsilon) = 2\pi i \frac{e^{-i|\vec{p}| \cdot x_0}}{-2|\vec{p}|}$$

Poichè x_0 rappresenta la differenza temporale che intercorre tra un evento e la sua causa, in questo caso la correlazione sarà quella standard delle particelle, ovvero

$$\Delta(x) \sim e^{-iEt} \quad \text{con} \quad E > 0$$

Pertanto per differenze temporali positive si propagano le particelle.

- se $x_0 < 0$ chiudiamo il percorso nel semipiano $\text{Im } p_0 < 0$. In questo modo contribuisce solo il polo $p_0 = |\vec{p}| - i\varepsilon$, pertanto si avrà

$$\int \frac{d p_0}{(2\pi)} \frac{e^{i p_0 \cdot x_0}}{p_0^2 - |\vec{p}|^2 + i\varepsilon} = -2\pi i \lim_{p_0 \rightarrow |\vec{p}| - i\varepsilon} \frac{e^{i p_0 \cdot x_0}}{p_0^2 - |\vec{p}|^2 + i\varepsilon} (p_0 - |\vec{p}| + i\varepsilon) = 2\pi i \frac{e^{i |\vec{p}| \cdot x_0}}{-2|\vec{p}|}$$

In questo caso, avendo considerato differenze di tempo negative, si propagheranno le anti-particelle, ovvero

$$\Delta(x) \sim e^{-iEt} \quad \text{con} \quad E < 0$$

L'utilizzo delle condizioni di Feynman risulta dunque la scelta più naturale nel contesto di una QFT che rispetti la simmetria CPT (che contiene dunque le anti-particelle). Ovviamente tali condizioni andrebbero abbandonate nel caso in cui si studiasse la propagazione di onde classiche (ad esempio quelle prodotte dalle antenne o dai ripetitori telefonici), per le quali si ha unicamente propagazione "in avanti" nel tempo e dunque le condizioni da scegliere sono quelle ritardate.

Per le condizioni di Feynman in particolare esiste una formulazione Euclidea equivalente alla precedente. Infatti è possibile notare che, grazie alla posizione dei poli, il risultato dell'integrale in p_0 non cambia se il percorso di integrazione viene ruotato di 90° , come mostrato nella Figura 6. Tale procedura è nota come *rotazione di Wick* ed è giustificata dal *principio di continuazione analitica* del propagatore: in particolare esso afferma che l'integrale di Cauchy (nel nostro caso quello in p_0) non dipende dalla scelta del contorno, purchè si resti nel dominio di analiticità della funzione.

Pertanto possiamo definire una nuova variabile di impulso p_4 e una nuova posizione x_4 come segue

$$p_0 = i p_4 \quad x_0 = -i x_4 \Rightarrow i p x \rightarrow (i p x)_E$$

in modo tale cioè che il prodotto scalare resti invariato.

Allora possiamo riscrivere l'integrale in termini delle nuove variabili

$$\int \frac{d p_0}{(2\pi)} \frac{e^{i p_0 \cdot x_0}}{p_0^2 - |\vec{p}|^2 + i\varepsilon} = -i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d p_4}{(2\pi)} \frac{e^{i p_4 \cdot x_4}}{p_4^2 + |\vec{p}|^2} \quad (14)$$

in cui $i\varepsilon$ non è più necessario in quanto le singolarità sono lontane dal contorno di integrazione.

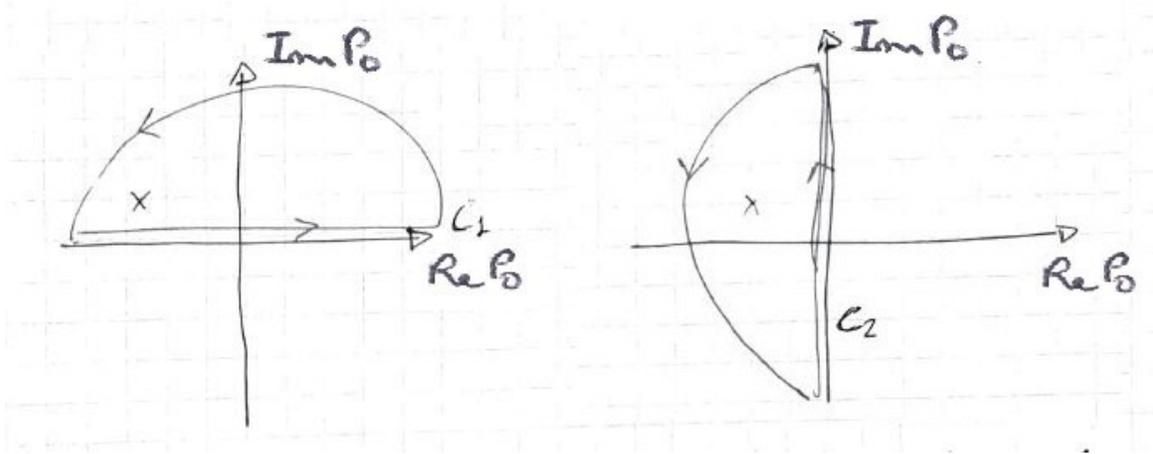


Figura 6: Rotazione di Wick nel piano complesso di p_0 . La scelta del cammino di integrazione C_1 o C_2 non altera il risultato dell'integrale perchè entrambi i contorni circondano il polo e appartengono al dominio di analiticità della funzione.

Adesso siamo dunque in grado di definire propriamente una Teoria di campo euclidea a partire dalla continuazione analitica del propagatore

$$\Delta(x_4, \vec{x}) \equiv i\Delta(ix_4, \vec{x}) \quad (15)$$

Poichè tale continuazione analitica è applicabile a tutti gli elementi della teoria (lagrangiana, azione, propagatore, diagrammi di Feynman etc...), posso estendere la descrizione euclidea a tutto il *path integral* che descrive la teoria di campo (si può dimostrare che esso risulta anche definito più correttamente).

Prendiamo come esempio la generica azione di un campo scalare ϕ

$$S[\phi] = \int d^n x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) - V(\phi) \right] \quad (16)$$

alla quale è associato il path integral

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} \quad (17)$$

Riscriviamo allora l'azione in termini delle variabili euclidee

$$S[\phi] = \int d^n x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) - V(\phi) \right] = \int d^{n-1} \vec{x} dx_0 \left[\frac{1}{2}(\partial_0 \phi \partial^0 \phi - \partial_i \phi \partial^i \phi) - V(\phi) \right] =$$

$$-i \int d^{n-1} \vec{x} dx_4 \left[-\frac{1}{2}(\partial_4 \phi \partial^4 \phi + \partial_i \phi \partial^i \phi) - V(\phi) \right] = i \int d^n x_E \left[\frac{1}{2}(\partial_4 \phi \partial^4 \phi + \partial_i \phi \partial^i \phi) + V(\phi) \right] \equiv i S_E[\phi]$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo definito l'azione euclidea $S_E[\phi]$

$$S_E[\phi] = \int d^n x_E \left[\frac{1}{2}(\partial_4 \phi \partial^4 \phi + \partial_i \phi \partial^i \phi) + V(\phi) \right] \quad (18)$$

che risulta dunque essere definita positiva.

Di conseguenza il *path integral euclideo* sarà dato da

$$Z_E = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]} \quad \text{con} \quad S_E[\phi] > 0 \quad (19)$$

Possiamo adesso fare un paragone con la meccanica statistica, in cui

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta H} \quad \text{con} \quad H > 0 \quad (20)$$

Questo ci porta inevitabilmente a collegare la meccanica statistica con la EFT con i seguenti parallellismi:

	Statistical Mechanics	Euclidean Field Theory
Dimensioni	$d + 1$	D
Variabili	σ_i (Spin su reticolo)	$\phi(x)$ (Campo continuo)
Sorgente	h (Campo esterno)	J (Sorgente nel funzionale generatore)
Peso	H (Hamiltoniana)	S_E (Azione euclidea)
Funzionali	$F = -\frac{1}{\beta} \log Z$ (Energia Libera)	$E[J] = \log Z[J]$ (Generatore dei diagrammi connessi)
Fluttuazioni	$\beta = \frac{1}{K_B T}$ (Fluttuazioni termiche)	$\frac{1}{\hbar}$ (Fluttuazioni quantistiche)

Sembra dunque evidente che la teoria di campo euclidea risulti essere una possibilità valida per studiare la meccanica statistica, anzi che sia possibile una vera e propria identificazione tra le due: parleremo dunque di *fenomeni critici* e di *fasi* in teoria dei campi così come di *gruppo di rinormalizzazione* per la meccanica statistica. Ad esempio la *rottura spontanea della simmetria* (SSB) è un concetto che nasce nel contesto della meccanica statistica (basti pensare alla magnetizzazione di un ferromagnete) e che poi venne applicato alla teoria dei campi (uno dei primi a farlo fu Nambu, nello studio della rottura spontanea della simmetria chirale) e viceversa, il gruppo di rinormalizzazione nasce dalla teoria dei campi (grazie a Wilson) e successivamente venne applicato alla meccanica statistica. Tuttavia vi sono due differenze sostanziali tra i due approcci:

1. il propagatore o correlatore della meccanica statistica ha già un significato fisico mentre in QFT è il modulo quadro del propagatore ad essere una grandezza fisica;
2. in EFT, per ottenere una sezione d'urto o la matrice di scattering S o in generale la probabilità di un dato processo, è necessario ritornare alla metrica di Minkowski e successivamente mettersi *on shell*, ovvero in quelle configurazioni dei campi che sono soluzioni delle equazioni del moto e per cui $p_0^2 = |\vec{p}|^2 + m^2$. Invece in meccanica statistica possiamo dire, col significato precedentemente specificato, che si lavori sempre *off shell*.

3 Potenziale efficace

Sappiamo che in meccanica statistica è possibile utilizzare diversi *potenziali termodinamici*, che dipendono da variabili differenti, e che è possibile passare dall'uno all'altro attraverso la *trasformata di Legendre*. Cerchiamo di comprenderne il meccanismo a partire dal passaggio da *Energia libera di Helmholtz* $F(T, h)$, funzione della temperatura T e del campo esterno h , all'*Energia libera di Gibbs* $G(T, M)$, funzione della temperatura e della magnetizzazione M . Il campo h nel primo caso e la magnetizzazione nel secondo vengono detti *parametri di controllo* in quanto si suppone che, nello studio sperimentale del sistema fisico in esame, essi siano controllabili e modificabili dallo sperimentatore. In particolare, supponendo che il sistema in esame sia canonico (che ne esista cioè una descrizione Hamiltoniana), le variabili

h ed M risultano *canonicamente coniugate*, poichè sussiste la relazione

$$M = -\frac{\partial F}{\partial h} \quad (21)$$

Ciò implica che, utilizzando F per la descrizione del mio sistema, h sia fissato mentre M fluttui, cioè $\langle M \rangle \neq 0$. Analogamente, utilizzando G , i ruoli saranno invertiti, cioè M sarà fissa mentre h fluttuerà.

Dal punto di vista matematico, la trasformata di Legendre consente di effettuare un cambio di variabili. In particolare, chiamando S l'entropia del sistema, scriviamo il differenziale totale per F

$$dF = -SdT - Mdh \quad (22)$$

Adesso possiamo definire G attraverso la trasformata di Legendre

$$G = F + Mh|_{M=-\frac{\partial F}{\partial h}} \quad (23)$$

In questo modo il differenziale totale per G sarà

$$dG = dF + Mdh + hdM = -SdT + hdM \quad \Rightarrow \quad G = G(T, M) \quad (24)$$

In particolare dalla precedente equazione ricaviamo immediatamente che

$$h = \frac{\partial G}{\partial M} \quad (25)$$

che è perfettamente speculare all'eq. (21).

Un ragionamento del tutto analogo al precedente può essere applicato alla EFT. In particolare il primo passo è introdurre il *Funzionale generatore* $Z[J]$ che dipende dalla sorgente del campo J nel seguente modo:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \ e^{-S[\phi] + \int J\phi} \equiv e^{E[J]} \quad (26)$$

dove abbiamo definito il *funzionale generatore dei diagrammi connessi* $E[J] = \log Z[J]$. Nel parallelismo col caso precedente la sorgente J è l'analogo del campo esterno h . Proseguendo con l'analogia calcoliamo la variabile canonicamente coniugata a J , l'analogo di M

$$\frac{\delta E}{\delta J} = \langle \phi \rangle = \varphi_{cl} \quad (27)$$

dove $\langle \phi \rangle$ indica il valor medio di ϕ su tutte le possibili configurazioni del sistema. Effettuiamo adesso la trasformata di Legendre, che ci permette di definire un nuovo funzionale Γ detto *potenziale efficace quantistico* (o più propriamente *azione efficace quantistica*)

$$\Gamma[\varphi_{cl}] = E[J] - \int J\varphi_{cl} \quad (28)$$

che non dipende più da J ma unicamente da φ_{cl} . Ciò risulta evidente calcolando il differenziale totale di Γ

$$d\Gamma = dE - Jd\varphi_{cl} - \varphi_{cl}dJ = -Jd\varphi_{cl} \quad (29)$$

da cui segue immediatamente che Γ soddisfa la relazione duale, cioè

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_{cl}} = -J \quad (30)$$

Il motivo per cui si parla di potenziale efficace risulta chiaro nel limite statico ($\varphi_{cl} = \text{cost} = v$, pertanto $\partial_\mu\phi = 0$) e classico (trascurando le correzioni a partire dal one-loop $o(\hbar)$). Infatti otteniamo:

$$\Gamma[\varphi_{cl}] = E[\varphi_{cl}] - J\phi_{cl} = -(S[\phi_{cl}] - J\varphi_{cl}) - J\varphi_{cl} = \int d^4x V(\varphi_{cl}) = -V_{ol}V(\varphi_{cl})$$

in cui $V_{ol} = \int d^4x$. Quindi in generale

$$\Gamma = -V_{ol}V(\varphi_{cl}) + o(\hbar)$$

cioè il potenziale efficace quantistico differisce da quello classico per termini di ordine $o(\hbar)$, che corrispondono alle *correzioni quantistiche*. Da ciò otteniamo quindi che

$$\lim_{J \rightarrow 0} \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_{cl}} \Big|_{\varphi_{cl}=\text{cost}=v} = \frac{\delta V}{\delta\varphi_{cl}} = 0 \quad (31)$$

cioè il minimo del potenziale efficace corrisponde al minimo del potenziale classico, nonché dell'azione classica. Questo discorso è molto utile nella discussione della *rottura spontanea della simmetria* del vuoto, quando si ha a che fare con un potenziale simile a quello mostrato in Figura 7: a livello classico essa è data dal minimo del potenziale, a livello quantistico dal minimo del potenziale efficace.

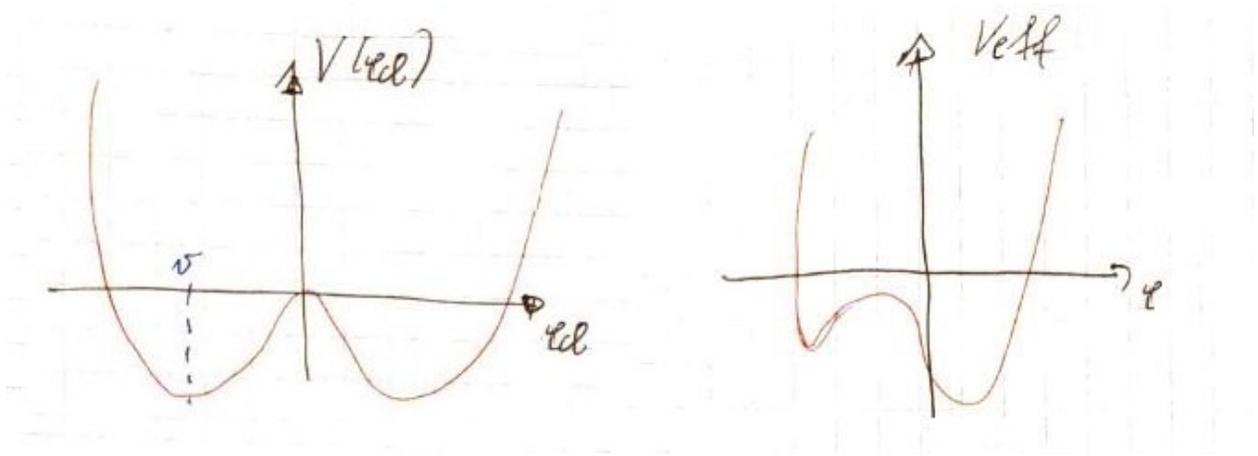


Figura 7: Sinistra: tipico potenziale che esibisce due minimi simmetrici, la scelta di uno dei quali determina la rottura spontanea della simmetria. Destra: l'aggiunta delle correzioni quantistiche al potenziale classico potrebbe alterarne l'equivalenza dei minimi.

4 Mapping Ising- $\lambda\phi^4$

A questo punto sembra abbastanza evidente che sia possibile collegare tra loro il modello di Ising (che è una teoria su reticolo) e la teoria $\lambda\phi^4$ (che è una teoria di campo continua). Cerchiamo di capire come ciò sia possibile.

Cominciamo riscrivendo l'hamiltoniana di Ising, su reticolo, e l'azione della teoria di campo, nel continuo, entrambe in $2D$

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i \quad \text{Ising} \quad (32)$$

$$S = \int d^2x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + V(\phi) \right] \quad \lambda\phi^4 \quad (33)$$

dove $\mu = 1, 2$. Per confrontare le due teorie possiamo discretizzare lo spazio continuo in cui è valida la teoria di campo. In particolare quello che faremo è, di fatto, una *lattice euclidean field theory*, cioè una teoria di campo su reticolo. Come prima cosa definiamo dunque un reticolo $2D$, di passo reticolare a , centrato in un punto qualsiasi dello spazio (ciò è possibile grazie all'invarianza per traslazioni), descritto dai due versori ortogonali $\hat{\mu}$ con $\mu = 1, 2$,

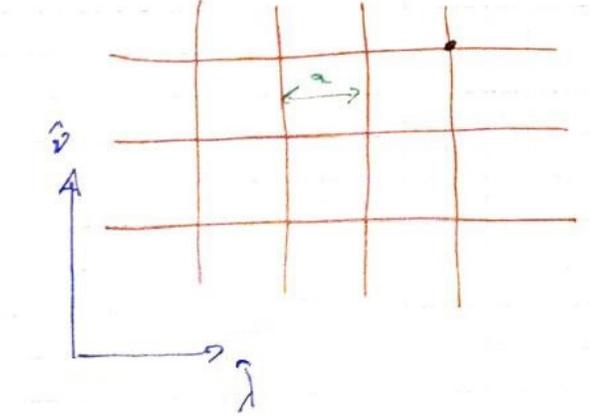


Figura 8: Reticolo quadrato di passo reticolare a ottenuto dalla discretizzazione dello spazio. In blu sono indicati i due versori ortogonali $\hat{\mu}_1 = \hat{\lambda}$ e $\hat{\mu}_2 = \hat{\nu}$.

come mostrato in Figura 8. Il generico punto del reticolo x^μ sarà dunque dato da $x^\mu = an^\mu$, con $n^\mu = (n^1, n^2)$ e n^1, n^2 interi. Procediamo adesso alla discretizzazione dell'azione

$$\begin{aligned}
 S &= \int d^2x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + V(\phi) \right] = \sum_{\{n^\mu\}} a^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\phi(x + \hat{\mu}a) - \phi(x)}{a} \right)^2 + V(\phi(x)) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\{n^\mu\}} \phi^2(x + \hat{\mu}a) + \phi^2(x) - 2\phi(x + \hat{\mu}a)\phi(x) + a^2 V(\phi(x))
 \end{aligned}$$

in cui $\sum_{\{n^\mu\}}$ indica la somma su tutti i siti reticolari, cioè $\sum_{\{n^\mu\}} = \sum_n \sum_{\hat{\mu}}$. Adesso è possibile riassorbire i primi due termini all'interno del potenziale, in quanto termini locali, che dipendono unicamente da una posizione fissata. Allora definiamo

$$V'(\phi) = a^2 V(\phi) + \frac{1}{2} \phi^2(x + \hat{\mu}a) + \frac{1}{2} \phi^2(x)$$

In questo modo otteniamo

$$S = \sum_n \sum_{\hat{\mu}} V'(\phi) - \phi(x + \hat{\mu}a)\phi(x) \quad (34)$$

Quello che si ottiene è dunque un termine di accoppiamento tra primi vicini, cioè tra il sito reticolare x e quello $x + \hat{\mu}a$. Tale accoppiamento risulta equivalente in forma a quello

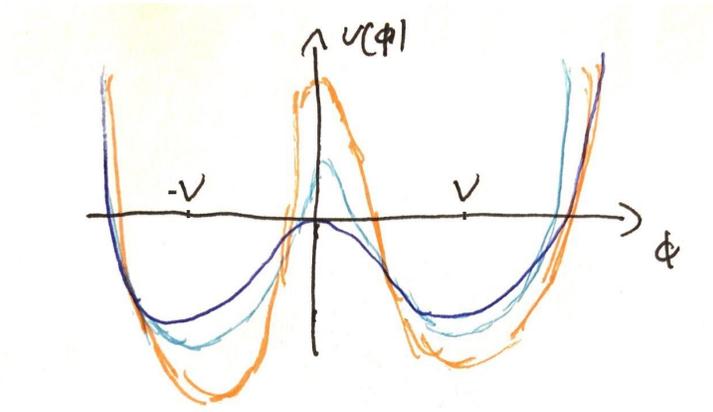


Figura 9: Tramite la modifica della forma del potenziale è possibile generare dei minimi sempre più profondi fino a che i valori che il campo potrà assumere saranno solo $\pm v$.

contenuto nell' eq.(32). Infatti la somma su $\hat{\mu} = \hat{1}, \hat{2}$, combinata alla somma sugli interi n (positivi e negativi), restituisce la somma sui primi vicini nel reticolo quadrato sul quale è definito il modello di Ising.

Per completare l'analogia basta aggiungere ad S il termine di sorgente $\int J\phi$ che è chiaramente l'analogo del termine $-h \sum_i \sigma_i$. Resta comunque il termine $V'(\phi)$ in più rispetto al modello di Ising che comunque può tornarci utile. Infatti $\phi \in \mathbb{R}$ mentre $\sigma_i = \pm 1$. Possiamo dunque immaginare di essere nella fase rotta della teoria (con i due minimi del potenziale in $\pm v$) e di rendere il potenziale sempre più ripido, come mostrato in 9. In questo modo forziamo ϕ ad assumere unicamente i valori dei minimi, cioè $\pm v$. Ciò significa che $\phi = \pm v = v\sigma$ con $\sigma = \pm 1$. Quindi abbiamo trovato che, in un opportuno limite, la teoria $\lambda\phi^4$ e il modello di Ising sono perfettamente equivalenti. In particolare l'opportuno limite che ci interessa, oltre al limite del continuo, è $\beta \rightarrow \beta_c$, cioè il caso in cui ho una SSB. Dunque in un intorno del punto critico ho che la transizione di fase nel modello di Ising può essere descritta da una teoria di campo efficace. Questo è un esempio di *universalità*: infatti i dettagli microscopici di una teoria, rilevanti nel limite di piccole lunghezze d'onda (UV) quando $\xi \rightarrow 0$, cioè di piccole distanze, diventano irrilevanti nel limite opposto (IR), quando $\xi \rightarrow \infty$, e ciò consente l'identificazione di teorie che differiscono per dettagli microscopici ma che esibiscono lo stesso

comportamento a grandi distanze. Tale comportamento comune definisce una classe di teorie tra loro equivalenti detta *classe di universalità*, ed è fissato da caratteristiche intrinseche del sistema quali:

- la dimensione, che nel caso in esame è $D = 2$ (spaziali) per Ising e $2 = d + 1$ (spazio-temporali) per $\lambda\phi^4$;
- le simmetrie interne dell'azione S o dell'Hamiltoniana H . Sia per il modello di Ising che per la teoria $\lambda\phi^4$ la simmetria è del tipo \mathbb{Z}_2 , cioè la teoria è invariante per lo scambio $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i \forall i$, o equivalentemente $\phi(x) \rightarrow -\phi(x) \forall x$;
- i gradi di libertà, infatti $\phi \in \mathbb{R}$ e $\sigma_i \in \mathbb{Z}_2$ appartengono alla medesima categoria di variabile.

In base a quanto detto, il modello di Ising, insieme ad alcune sue varianti che da esso differiscono per dettagli microscopici (ad esempio un'interazione aggiuntiva a secondi vicini), appartengono alla medesima classe d'universalità, e vicino al punto critico possono essere descritti dalla teoria $\lambda\phi^4$ che rappresenta dunque una *teoria di campo efficace*. Vedremo successivamente che il ragionamento appena svolto, cioè il passaggio da UV a IR, non è altro che il *flusso* del *gruppo di rinormalizzazione*, e come esso si inserisca coerentemente con il processo di rinormalizzazione che usualmente si svolge in QFT.

Notiamo infine che tale ragionamento sarebbe stato differente se l'azione, dipendente dal campo ϕ , avesse avuto una diversa simmetria, ad esempio una simmetria di tipo $U(1)$ con $\phi \in \mathbb{C}$. In questo caso la variabile statistica corrispondente non sarebbe stata uno spin con valori discreti \mathbb{Z}_2 , ma una variabile continua del tipo $\sigma_i = e^{i\theta}$, che ha una simmetria $U(1)$.

5 Esponenti critici

Una volta introdotto il concetto di classe di universalità, procediamo alla sua caratterizzazione. Siamo a conoscenza del fatto che alcune grandezze tipiche del sistema, derivabili dalla funzione di partizione o equivalentemente dalla funzione energia libera, diventano singolari approssimando le transizioni di fase, al tendere cioè di $\beta \rightarrow \beta_c$. In particolare esse seguono

delle *leggi a potenza*, caratterizzate da specifici esponenti, che vengono detti *esponenti critici*. Quindi ciò che caratterizza una data classe di universalità è il valore numerico di tali esponenti. Vediamoli nel dettaglio.

1. Magnetizzazione

Avevamo già visto il caso della magnetizzazione

$$M(\beta, h = 0) = \begin{cases} 0 & \beta < \beta_c \\ \sim (\beta - \beta_c)^\beta & \beta > \beta_c \end{cases} \quad (35)$$

Naturalmente l'esponente β e $\beta = \frac{1}{K_B T}$ sono quantità diverse, anche se condividono la stessa nomenclatura. Alla luce di quanto detto possiamo dunque definire β come l'esponente critico legato alla magnetizzazione, o, in generale al parametro d'ordine della teoria.

2. Lunghezza di correlazione

Avevamo visto, nella classe di universalità \mathbb{Z}_2 (cioè quella a cui appartiene la teoria $\lambda\phi^4$), che il correlatore, per grandi distanze, segue il tipico decadimento di Yukawa

$$\langle \phi(x^\mu = n^\mu a) \phi(0) \rangle \sim e^{-|n|/\xi} \quad (36)$$

con ξ detta *lunghezza di correlazione*. Essa è una grandezza adimensionata e vicino alla criticità sarà proporzionale a

$$\xi(\beta) \sim (\beta - \beta_c)^{-\nu} \quad (37)$$

Quindi ν è l'esponente critico che caratterizza la divergenza della lunghezza di correlazione in prossimità del punto critico. In questo caso il campo ϕ ricopre un ruolo di *parametro d'ordine*, analogo alla magnetizzazione M .

3. Suscettività

La suscettività non è altro che la derivata seconda dell'energia libera, e quindi la derivata prima della magnetizzazione, rispetto al campo esterno h . Di fatto essa misura la tendenza del sistema ad acquisire una data magnetizzazione.

$$\chi(\beta) = \frac{\partial M}{\partial h} = \sum_{n^\mu} \langle \phi(x^\mu = n^\mu a) \phi(0) \rangle \sim (\beta - \beta_c)^{-\gamma} \quad (38)$$

Quindi γ è l'esponente critico che caratterizza la divergenza della suscettività.

4. *Calore specifico o correlatore dell'energia*

Anche il calore specifico a volume costante si ottiene a partire da opportune derivate della funzione di partizione

$$C_v(\beta) = \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \log Z = \sum_{n^\mu} \langle \varepsilon(x^\mu = n^\mu a) \varepsilon(0) \rangle \sim (\beta - \beta_c)^{-\alpha} \quad (39)$$

Quindi α è l'esponente critico che caratterizza la divergenza del calore specifico. Il motivo per cui esso è anche noto come correlatore delle energie risulta chiaro dal secondo passaggio, che a sua volta è immediato considerando che $Z = \sum_{n^\mu} e^{-\beta H}$.

5. *Funzione di correlazione*

Anche il correlatore spaziale in d dimensioni segue una legge a potenza in prossimità del punto critico

$$\langle \phi(x^\mu = n^\mu a) \phi(0) \rangle \sim \frac{1}{|n|^{\eta-2+d}} \quad (40)$$

Quindi η è l'esponente critico che caratterizza la differenza tra la dimensione effettiva (che è quella delle correlazioni) che avrebbe il sistema se esso fosse libero ($\eta = 0$), cioè non interagente, e quella effettiva che esso acquista in prossimità della transizione di fase a causa delle interazioni.

6. *Isoterma critica o Equazione di stato*

Essa lega la magnetizzazione M , calcolata alla temperatura critica, al campo esterno h

$$M(h, \beta \sim \beta_c) \sim h^{1/\delta} \quad (41)$$

Quindi δ è l'esponente critico che caratterizza la dipendenza del parametro d'ordine dal campo esterno a temperatura fissata pari alla temperatura critica.

Nella seguente tabella sono elencati i valori degli esponenti critici per la teoria di campo medio e per il modello di Ising in 2 e 3 dimensioni.

Mentre i risultati per il modello di Ising $2D$ sono esatti, quelli per l'equivalente $3D$ sono ottenuti solitamente con simulazioni di tipo Montecarlo, in cui si simula numericamente la

Esponente	Campo medio	Ising 2D	Ising 3D
α	0(disc.)	0(log)	0.110(5)
β	1/2	1/8	0.325 ± 0.0015
γ	1	7/4	1.2405 ± 0.0015
δ	3	15	4.82(4)
ν	1/2	1	0.630(2)
η	0	1/4	0.032 ± 0.003

Tabella 1: Esponenti critici per la teoria di Landau (campo medio), il modello di Ising 2D e 3D.

somma su tutte le configurazioni, cioè la funzione di partizione. Tuttavia recentemente (dal 2014) il problema è stato approcciato con maggiore precisione grazie all'utilizzo di una tecnica nota come *conformal bootstrap*, che si basa sull'*invarianza conforme* (di cui discuteremo). Abbiamo dunque visto come esistano 6 esponenti critici. Tuttavia solo 2 di essi sono linearmente indipendenti a causa dell'esistenza di alcune relazioni tra essi, dette *leggi di scaling* o *relazioni di scala*. Esse sono:

$$\alpha = 2 - d\nu \quad \text{Relazione di Josephson} \quad (42)$$

$$\gamma = \nu(2 - \eta) \quad \text{Relazione di Fisher} \quad (43)$$

$$\gamma = \beta(1 - \delta) \quad \text{Relazione di Widom} \quad (44)$$

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad \text{Relazione di Rushbrooke} \quad (45)$$

in cui d rappresenta la dimensione del sistema. Queste relazioni si dimostrano a partire da semplici *argomenti di scala*. Dimostriamo a titolo esemplificativo la relazione di Fisher. Avevamo visto come la suscettività, che dipende dall'esponente critico γ , fosse definita a partire da una somma di correlatori tra campi, i quali a loro volta dipendono dall'esponente critico η . Infatti

$$\chi(\beta) = \sum_n \langle \phi(n)\phi(0) \rangle = \int d^d x \frac{1}{x^{d-2+\eta}}$$

in cui nell'ultimo passaggio è stato effettuato il limite del continuo. Sviluppando il calcolo

$$\int d^d x \frac{1}{x^{d-2+\eta}} \sim x^{2-\eta} \Big|_0^\xi \sim \xi^{2-\eta}$$

Il penultimo passaggio è giustificato dal fatto che l'andamento con legge a potenza del correlatore si verifica solo in prossimità della transizione di fase, in particolare per $x \leq \xi$. Infatti se tale condizione non fosse soddisfatta ritroverei l'andamento esponenziale dell'eq. (36) e ciò indica che ξ svolge il ruolo di *cutoff* tra i due diversi andamenti.

Adesso ricordiamo che $\xi \sim (\beta - \beta_c)^{-\nu}$, e pertanto otteniamo

$$\chi \sim \xi^{2-\eta} \sim (\beta - \beta_c)^{-\nu(2-\eta)}$$

Ma dalla definizione di γ sappiamo che

$$\chi \sim (\beta - \beta_c)^{-\gamma}$$

Confrontando le due equazioni concludiamo che

$$\gamma = \nu(2 - \eta)$$

che non è altro che la relazione di Fisher.

Dunque abbiamo trovato delle relazioni dimensionali, valide nell'intorno della criticità, che legano tra loro gli esponenti critici. Questo discorso verrà sviluppato con più dettaglio in seguito.

6 Teoria di Landau

Come risulta chiaro dagli argomenti trattati, siamo interessati a capire cosa accade nell'intorno dei punti critici, vogliamo cioè studiare le *transizioni di fase*. Per fare questo introduciamo innanzitutto la variabile t *temperatura ridotta*

$$t = \frac{T - T_c}{T_c} \propto \frac{\beta_c - \beta}{\beta_c} \tag{46}$$

dunque il punto critico $T = T_c$ corrisponderà al caso $t = 0$.

Vogliamo adesso fare un'ipotesi su quale sia la forma della funzione energia libera (o potenziale efficace) $\Gamma(M, t)$ in prossimità della criticità. In particolare assumiamo che $\Gamma(M, t)$ sia *analitica* in un intorno di $M = 0$. Ciò ci legittima, poichè M è piccolo, ad espandere $\Gamma(M, t)$

in potenze di M e del suo gradiente $\partial_\mu M$, e ad assumere che i coefficienti dell'espansione dipendano dalla temperatura ridotta t . Naturalmente la precedente ipotesi non è in generale verificata, a meno che non si tratti di una teoria libera, non interagente. Questo perchè nel caso di teorie interagenti l'energia libera non solo è non analitica, ma è anche non locale e a volte si trova persino difficoltà a scriverne un'espressione esplicita. Dunque in generale la nostra ipotesi è falsa, ma siamo ugualmente interessati ai risultati che ne conseguono per motivi che risulteranno chiari a breve.

In particolare il nostro approccio è catalogabile come *semi-classico*: infatti, mentre nel caso strettamente classico, sappiamo che $\Gamma \sim V(M)$, nel nostro approccio avremo che

$$\Gamma(M, t) = \Gamma_0 + \int d^D x \left(a(t) \frac{M^2}{2} + \frac{b(t)}{4!} M^4 + \frac{1}{2} (\partial_\mu M)^2 + \text{higher orders}(\partial_\mu M, M) \right) \quad (47)$$

in cui sono stati inclusi soltanto i termini con esponente pari per rispettare l'invarianza \mathbb{Z}_2 del sistema.

Come precedentemente affermato, i coefficienti dell'espansione dipendono in generale dalla temperatura t , mentre il termine cinetico $\frac{1}{2}(\partial_\mu M)^2$ è normalizzato ad 1/2 per convenzione. Cerchiamo adesso un'espressione funzionale per i coefficienti $a(t)$ e $b(t)$. In particolare, conoscendo l'andamento di M al variare di t sappiamo che:

- la massa si deve annullare al punto critico;
- per $t > 0$ il sistema si trova nella fase simmetrica, in cui il potenziale ammette un unico minimo, come mostrato nella Figura 10 a sinistra;
- per $t < 0$ il sistema si trova nella fase rotta, in cui, poichè il potenziale ammette due minimi distinti, simmetrici ed equiprobabili e il sistema si troverà solamente in uno dei due, avviene la rottura spontanea della simmetria \mathbb{Z}_2 , come mostrato nella Figura 10 a destra.

Dunque, per soddisfare tali requisiti ci basta assumere che

$$\begin{cases} a(t) \sim a_0 t + \dots \\ b(t) \sim b_0 + \dots \end{cases} \quad (48)$$

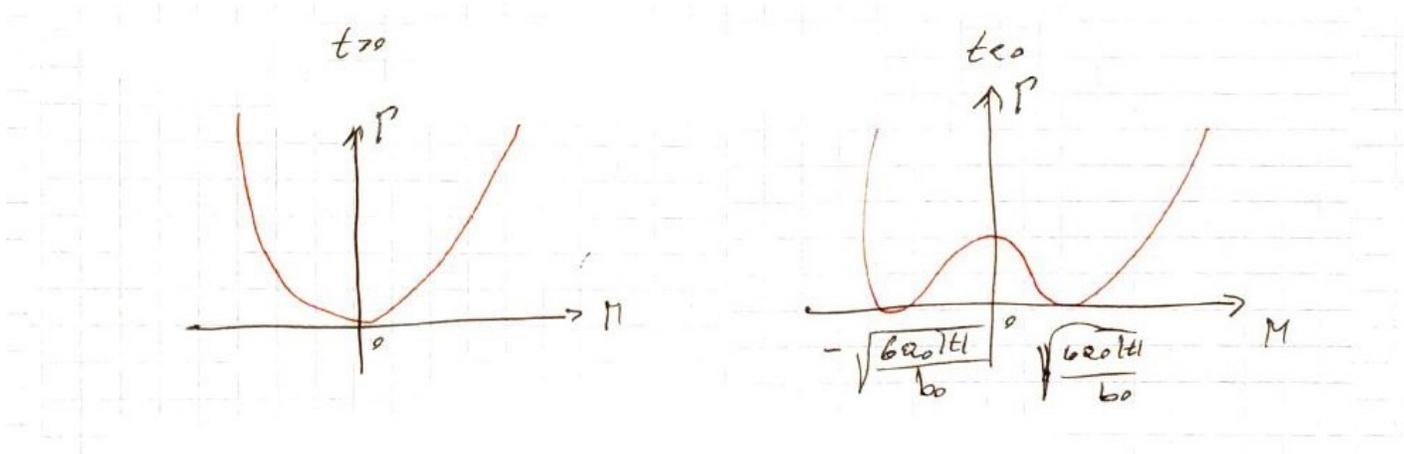


Figura 10: Rappresentazione del potenziale efficace classico ($M = \text{cost}$) nella fase simmetrica (a sinistra) per $t > 0$ e nella fase rotta (a destra) per $t < 0$. Per $t < 0$ sono indicati i valori di M per i quali si ottengono i due minimi simmetrici nel caso di campo esterno nullo $H = 0$.

Prima di procedere al calcolo degli esponenti critici, apriamo una breve *parentesi*.

Il nostro discorso è valido nel caso in cui il sistema presenti un punto critico semplice, cioè quando esistono due fasi della teoria e due minimi distinti che sono equivalenti vicino alla criticità. Tuttavia potrebbe esistere anche un punto *tricritico*, caso nel quale la teoria presenta tre fasi e tre minimi equivalenti. In questo caso il potenziale sarebbe descritto da un termine proporzionale a $M^2(M^2 - a^2)^2 \sim M^6$. Dunque dovrei aggiungere all'eq. (47) un termine del tipo $c(t)M^6$ e ipotizzare i seguenti andamenti:

$$\begin{cases} a(t) \sim a_0 t + \dots \\ b(t) \sim b_0 t + \dots \\ c(t) \sim c_0 + \dots \end{cases} \quad (49)$$

In generale dunque, in presenza di un punto critico, arresto l'espansione al primo termine che è non nullo vicino la criticità, che corrisponde ad M^4 per il punto critico semplice e ad M^6 per un punto tricritico.

Conclusa la *parentesi*, cerchiamo adesso il valore degli esponenti critici di questa teoria classica.

1. $\beta = \frac{1}{2}$

Utilizziamo l'eq. (25) e calcoliamo H

$$H = \frac{\partial \Gamma}{\partial M} = a(t)M + \frac{b(t)}{6}M^3 - \partial^2 M$$

Cerchiamo adesso le soluzioni classiche, quelle di campo medio, per cui $M = cost.$

$$H = M \left(a(t) + \frac{b(t)}{6}M^2 \right) = M \left(a_0 t + \frac{b_0}{6}M^2 \right) \quad (50)$$

in cui abbiamo sostituito le espansioni (48). Le soluzioni per la magnetizzazione M allora saranno, nel caso di campo nullo $H = 0$:

$$M = \begin{cases} 0 & \forall t \\ \pm \sqrt{-\frac{6a_0}{b_0}t} & t < 0 \quad (\beta > \beta_c) \end{cases} \quad (51)$$

Ritroviamo dunque le due fasi distinte: quella simmetrica in cui vi è un solo minimo banale $M = 0$, e quella rotta in cui ho due soluzioni equivalenti con $M \neq 0$.

Quindi dall'eq.(51) otteniamo che, nella fase rotta, $M \sim (-t)^{1/2}$, ma sappiamo che $M \sim (-t)^\beta$, da cui segue che $\beta = 1/2$.

2. $\gamma = 1$

Calcoliamo la suscettività magnetica

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right)^{-1} = \frac{1}{a_0 t + \frac{b_0}{2}M^2}$$

Dove nell' ultimo passaggio abbiamo utilizzato l'eq. (50). Sfruttiamo adesso l'eq. (51) per distinguere i casi $t < 0$ e $t > 0$ e calcolare gli esponenti critici γ_- e γ_+ (che in linea di principio potrebbero anche essere differenti).

- $t < 0$. In questo caso $M^2 = -\frac{6a_0}{b_0}t$. Dunque:

$$\chi = -\frac{1}{a_0 t} \sim (-t)^{-1}$$

Ma sappiamo che vicino la criticità $\xi \sim |t|^{-\gamma}$ da cui segue che $\gamma_- = 1$

- $t > 0$. Adesso $M = 0$, quindi otteniamo

$$\chi = \frac{1}{a_0 t} \sim (t)^{-1}$$

e dunque analogamente al caso precedente $\gamma_+ = 1$

Quindi possiamo concludere che $\gamma_+ = \gamma_- = \gamma = 1$.

3. $\delta = 3$

Scriviamo l'*equazione di stato*, che corrisponde all'eq.(50) nel caso dell'isoterma critica a $t = 0$

$$H = \frac{b_0}{6} M^3 \sim M^3$$

Ma sappiamo che in queste condizioni $H \sim M^\delta$, da cui segue che $\delta = 3$.

A partire dall'equazione di stato è possibile introdurre una *legge di scaling*, ovvero essa può essere messa in una *scaling form*

$$\frac{H}{M^\delta} = f\left(\frac{t}{M^{1/\beta}}\right) \quad (52)$$

in cui compaiono funzioni adimensionate di variabili adimensionate. Ciò segue naturalmente dal fatto che $H \sim M^\delta$ e $M \sim t^\beta$. In particolare nel caso in esame, con $\beta = 1/2$ e $\delta = 3$,

$$f(x) = \frac{b_0}{6} + ax$$

4. $\alpha = 0$

Calcoliamo il calore specifico ad $H = cost$

$$C_H = -T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_H$$

Ricordiamoci inoltre che

$$-\Gamma = -\beta F = \log Z \quad \Rightarrow \quad F = T\Gamma \quad (K_B = 1)$$

e che

$$t = \frac{T - T_c}{T_c} \quad \Rightarrow \quad T = T_c(1 + t)$$

Sostituendo quanto ricavato nella definizione del calore specifico otteniamo

$$C_H = -\frac{1}{T_c}(1+t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} [T_c(1+t)\Gamma] = -(1+t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[(1+t)V_{ol} \left(a_0 t \frac{M^2}{2} + \frac{b_0}{6} M^4 \right) \right]$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sostituito l'eq.(47) e chiamato $V_{ol} = \int d^D x$. Utilizzando l'eq.(51) per M e trascurando il fattore di volume e gli ordini successivi in t (che nel limite $t \rightarrow 0$ sono infinitesimi), otteniamo immediatamente

$$C_H = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ 3\frac{a_0^2}{b_0} + o(t) & t < 0 \end{cases} \quad (53)$$

Quindi il calore specifico non esibisce una singolarità ma un salto, cioè una discontinuità finita per $t \rightarrow 0$, infatti

$$C_H(t \rightarrow 0^-) - C_H(t \rightarrow 0^+) = 3\frac{a_0^2}{b_0}$$

Ma sappiamo che

$$C_H(t \rightarrow 0^-) - C_H(t \rightarrow 0^+) \sim t^{-\alpha}$$

Ciò significa che $\alpha = 0$. Questo risultato è indice del fatto che vi siano poche fluttuazioni. Infatti sappiamo che il calore specifico dipende dal numero di gradi di libertà del sistema, e il fatto che esso resti finito alla transizione di fase è giustificato proprio dall'assenza di fluttuazioni (includendo le quali con approssimazione gaussiana si ottiene $\alpha = 2 - \frac{d}{2}$, con d dimensione del sistema).

5. $\nu = \frac{1}{2}$

Dobbiamo valutare l'esponente critico ν con cui diverge la lunghezza di correlazione $\xi^{-\nu}$. In particolare ricordiamo che avevamo ottenuto un termine di massa m tale che

$$\xi \sim \frac{1}{m} \quad (54)$$

Il termine di massa in Γ è rappresentato dal coefficiente dei termini quadratici, che chiamiamo Γ_2 , e avrà forma $\Gamma_2 = m^2 M^2$. Dunque

$$\Gamma_2 = atM^2 \quad \Rightarrow \quad m^2 = at \sim t \quad \Rightarrow \quad m \sim t^{1/2}$$

Sostituendo quanto ottenuto nell'eq.(54) otteniamo

$$\xi \sim m^{-1} \sim t^{-1/2}$$

Da cui segue immediatamente che $\nu = 1/2$.

6. $\eta = 0$

Studiamo la funzione di correlazione a due punti della teoria. Essa sarà la stessa della teoria libera perchè $M \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$, e dunque in Γ resta solamente il termine cinetico $(\partial_\mu M)^2$ che è lo stesso della teoria libera (il termine in M^4 da delle correzioni logaritmiche). Dunque in trasformata di Fourier abbiamo che, al punto critico

$$G(p) = \langle M(p)M(-p) \rangle|_{t=0} = \frac{1}{p^2} \quad (55)$$

Sappiamo inoltre che per $t = 0$

$$G(x) = \frac{1}{x^{d-2+\eta}}$$

che trasformata secondo Fourier diventa

$$G(p) = \frac{1}{p^{2-\eta}} \quad (56)$$

Confrontando dunque le equazioni (55) e (56) otteniamo che $\eta = 0$, che è tipico delle teorie libere.

I valori degli esponenti critici appena calcolati, insieme a quelli per il modello di Ising in 2 e 3 dimensioni, sono raccolti nella Tabella 1. Confrontando in particolare i diversi valori di η possiamo osservare come il valore che esso assume nel modello di Ising $3D$ $\eta = 0.032$ non sia numericamente troppo distante da quello della teoria di Landau $\eta = 0$. Notiamo invece che nel caso del modello di Ising $2D$, η risulta significativamente non nullo $\eta = 1/4$ e dunque questo è il caso di una teoria fortemente interagente e non perturbativa. Questa è una considerazione di validità generale per i sistemi a bassa dimensionalità, in cui lo spazio delle fasi è ristretto e dunque una volta accese le interazioni esse coinvolgono tutti i gradi di libertà, cioè le fluttuazioni sono molto intense.

Proseguendo invece il confronto tra teoria di Landau e Ising $3D$ possiamo chiederci se esista un approccio di tipo perturbativo che colleghi i due modelli. In particolare si potrebbe ipotizzare di aggiungere alla Γ di Landau (teoria classica) delle correzioni quantistiche da trattare perturbativamente:

$$\Gamma(M, t) = \frac{1}{\hbar} \int d^D x \left(a(t) \frac{M^2}{2} + \frac{b(t)}{4!} M^4 + \frac{1}{2} (\partial_\mu M)^2 \right) + o(\hbar)$$

in cui $o(\hbar)$ rappresenta le correzioni *one-loop* da trattare perturbativamente e da variare per ottenere accordi migliori con gli esperimenti. Questa è di fatto l'idea alla base del *gruppo di rinormalizzazione* e sarà oggetto del prossimo paragrafo. Notiamo infine come la teoria di Landau coincida praticamente con la versione classica della teoria $\lambda\phi^4$ (possiamo però aggiungere le correzioni quantistiche e trattarle perturbativamente), fornendo un motivazione fisica all'utilizzo ricorrente di quest'ultima.

7 Gruppo di rinormalizzazione

Sappiamo che gli anni '70 videro la teoria dei campi come tematica centrale di ricerca, soprattutto con l'introduzione del *gruppo di rinormalizzazione* (RG). Il contributo maggiore in questa direzione fu dato soprattutto da M.Fisher, K.Wilson, A.Polyakov (il cui punto di vista leggermente diverso porterà alle CFT). L'idea cardine del gruppo di rinormalizzazione è che le costanti di accoppiamento della teoria diventano *running*, cioè dipendenti dalla scala energetica. Ad esempio, nella teoria $\lambda\phi^4$, si vede che λ cresce, diventa cioè *rilevante*, in un regime infrarosso IR, nel caso in cui la dimensione del sistema d sia minore di 4, cioè $d = 4 - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$. Ciò dipende dal fatto che solo per $d < 4$ la costante λ acquista una dimensione fisica e quindi una dipendenza rilevante dalla scala energetica: infatti sappiamo che l'azione deve essere adimensionata (in unità naturali) e dunque da ciò possiamo ricavare le dimensioni del campo ϕ e di λ in unità di massa. Esse sono, in d dimensioni

$$[\phi] = m^{d/2-1} \quad \Rightarrow \quad [\lambda] = m^{4-d}$$

Risulta dunque evidente che, per $d > 4$, λ scala con una potenza negativa della massa, diventando dunque irrilevante nel limite di basse energie. Viceversa, per $d < 4$ ed in particolare

$d = 4 - \varepsilon$ otteniamo che $\lambda = m^\varepsilon$, dunque scala con una potenza positiva della massa. Il caso in fine in cui $d = 4$ corrisponde a λ a-dimensionata e quindi coincide con il caso classico (a meno di correzioni logaritmiche). Questo ragionamento è noto come *power counting theorem*. Definiamo allora una costante adimensionata g riassorbendo il termine di scala energetica μ

$$\lambda = \mu^\varepsilon g \tag{57}$$

Naturalmente anche g dipenderà dalla scala energetica, che è conveniente scrivere come

$$\sigma = -\log \mu$$

in modo tale che σ cresca nell'IR.

Possiamo dunque definire la *RG beta function*

$$\frac{dg}{d\sigma} = -\beta(g) \tag{58}$$

che indica proprio la dipendenza di g dalla scala energetica σ . Tale dipendenza è la diretta conseguenza dell'aver applicato la procedura di *rinormalizzazione* della teoria: infatti gli effetti dell'aver rinormalizzato la teoria si possono assorbire all'interno di una costante d'accoppiamento running, che dipende dalla scala. Il segno negativo che compare nella precedente definizione è legato alla convenzione di definire la beta function alle alte energie: infatti la convenzione standard che si adopera in fisica delle alte energie (ad esempio Modello standard) è:

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = \beta(g) \tag{59}$$

Tale equazione è anche detta *equazione del flusso del gruppo di rinormalizzazione*, per motivi che risulteranno chiari a breve. In particolare l'eq. (59) è della stessa forma di un'equazione di flusso, tipica dell'idrodinamica

$$\vec{v} = \vec{F}(\vec{x})$$

Per avere una visualizzazione concreta di tale equazione si potrebbe utilizzare un ventilatore con dei foglietti ad esso attaccati: in ogni punto \vec{x} ho un vettore \vec{v} la cui direzione è data dall'orientazione dei foglietti e la cui intensità è legata al flusso, legato a sua volta dal moto dei foglietti.

Nel nostro caso siamo interessati, come spiegato in precedenza, agli elementi della teoria rilevanti nel limite IR, dove i dettagli UV diventano trascurabili, e dunque la definizione (58) è motivata da ciò. Tuttavia, per semplicità ci rifaremo all'eq.(59).

Cerchiamo adesso un'espressione per la beta function. Supponiamo innanzitutto che essa sia sviluppabile perturbativamente, ovvero in potenze della costante d'accoppiamento adimensionata g

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = ag + bg^2 + cg^3 + \dots$$

Ragionando in termini dimensionali si trova facilmente che

$$\beta(g) = -\varepsilon g + \dots \tag{60}$$

dove i puntini indicano correzioni di ordini superiori al one-loop. In particolare questo risultato discende dal seguente ragionamento abbastanza standard. Definiamo λ come parametro *bare* della teoria, cioè quello che compare nella descrizione UV della teoria fornita dall'azione bare. Tale parametro si assume dunque essere indipendente dalla scala energetica μ alla quale rinormalizzo la teoria, cioè

$$\mu \frac{d\lambda}{d\mu} = 0$$

Utilizzando l'eq.(57) otteniamo

$$\mu \frac{d\lambda}{d\mu} = 0 = \varepsilon \mu^\varepsilon g + \mu^\varepsilon \frac{dg}{dg} \mu \frac{dg}{d\mu}$$

cioè

$$\mu \frac{d\lambda}{d\mu} = 0 = \varepsilon g + \beta(g)$$

da cui

$$\beta(g) = -\varepsilon g$$

Dunque effettivamente otteniamo l'eq.(60). Tale risultato è valido al cosiddetto *leading order*, cioè tenendo conto di correzioni quantistiche apportate da diagrammi fino al one-loop, e contiene praticamente solo la dimensione della costante λ . Nel caso di correzioni di

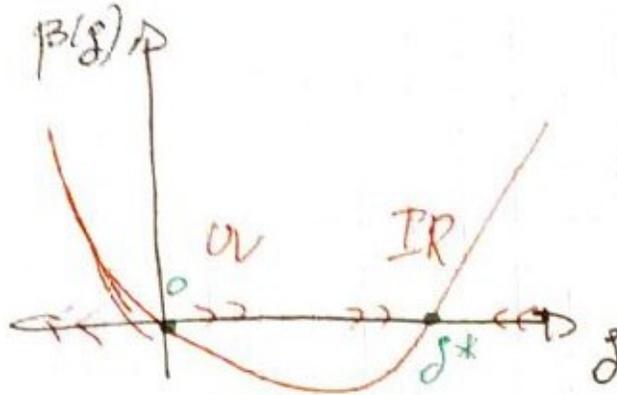


Figura 11: β -function in funzione di g . I punti $g = 0$ e $g = g^*$ corrispondono ai punti fissi e le frecce rosse indicano la direzione del flusso del gruppo di rinormalizzazione in prossimità di essi.

ordini successivi il risultato che si ottiene è il seguente

$$\beta(g) = -\varepsilon g + b g^2 + o(g^3) \quad (61)$$

Studiamo allora l'andamento di $\beta(g)$ in funzione di g , così come mostrato nella Figura 11. Utilizzando l'eq.(61), $\beta(g)$ si annulla per

$$\beta(g) = \mu \frac{dg}{d\mu} = 0 \quad \text{per} \quad \begin{cases} g = 0 \\ g = g^* = \frac{\varepsilon}{b} \end{cases}$$

Questi due punti sono detti *punti fissi*, e il motivo di tale dicitura risulta chiaro: infatti in questi punti

$$\frac{dg}{d\mu} = 0$$

e dunque si perde la dipendenza di g dalla scala μ e non si verifica il running. Ovviamente i due punti corrispondono a due fasi distinte della teoria: la fase libera $g = 0$ e la fase interagente $g = g^*$, che identificheremo con il modello di Ising vicino la criticità. Distinguiamo adesso i due casi.

- Per piccoli valori di g il termine dominante è quello lineare e dunque riotteniamo la β al leading order dell'eq.(60). In questo caso

- se $g > 0$ allora $\beta(g) < 0$ e dunque g tende a crescere allontanandosi dal punto fisso $g = 0$;
- se $g < 0$ allora $\beta(g) > 0$ e dunque g tende a decrescere allontanandosi nuovamente dal punto fisso $g = 0$.

Per tale ragione, il punto fisso $g = 0$ è detto *repulsivo*.

- Viceversa all'aumentare di g l'andamento è circa parabolico e dunque troveremo l'espressione (61). In questo caso
 - se $g < g^*$ allora $\beta(g) < 0$ e dunque g tende a crescere avvicinandosi dal punto fisso $g = g^*$;
 - se $g > g^*$ allora $\beta(g) > 0$ e dunque g tende a decrescere avvicinandosi nuovamente dal punto fisso $g = g^*$.

Per tale ragione, il punto fisso $g = g^*$ è detto *attrattivo*.

Dunque, in $d = 4 - \varepsilon$, $g = 0$ è un punto fisso UV, in quanto corrisponde al caso $\mu = \infty$ (ciò si deduce dall'eq.(57)), e analogamente $g = g^*$ è un punto fisso IR. In base al ragionamento precedente, qualsiasi g perturbativo ($g \sim 0$) si scelga come punto di inizio del running, si andrà sempre a finire nel punto fisso $g = g^*$ IR. Una volta raggiunto il valore g^* , la coupling constant non dipenderà più dalla scala e dunque avremo un punto di *invarianza di scala*, cioè un punto critico. Poichè $g^* = \frac{\varepsilon}{b} \sim \varepsilon$ ed ε è piccolo, lo sarà anche g^* . Dunque tutta la regione $g > 0$ risulta essere trattabile perturbativamente, consistentemente con l'assunzione di lavorare in $d = 4 - \varepsilon$ dimensioni.

In virtù dell'analogia tra il modello di Ising e la teoria $\lambda\phi^4$ trattata nello scorso paragrafo, possiamo dunque identificare il Modello di Ising, vicino alla criticità, in $d = 4 - \varepsilon$ dimensioni con la teoria $\lambda\phi^4$ nel caso in cui g corrisponda all'IR fixed point $g^* = \frac{\varepsilon}{b}$.

Uno degli effetti del running della coupling constant è la comparsa di una dimensione anomala η . In particolare svolgendo i calcoli perturbativi al one loop si trova che η dipende da g e vale

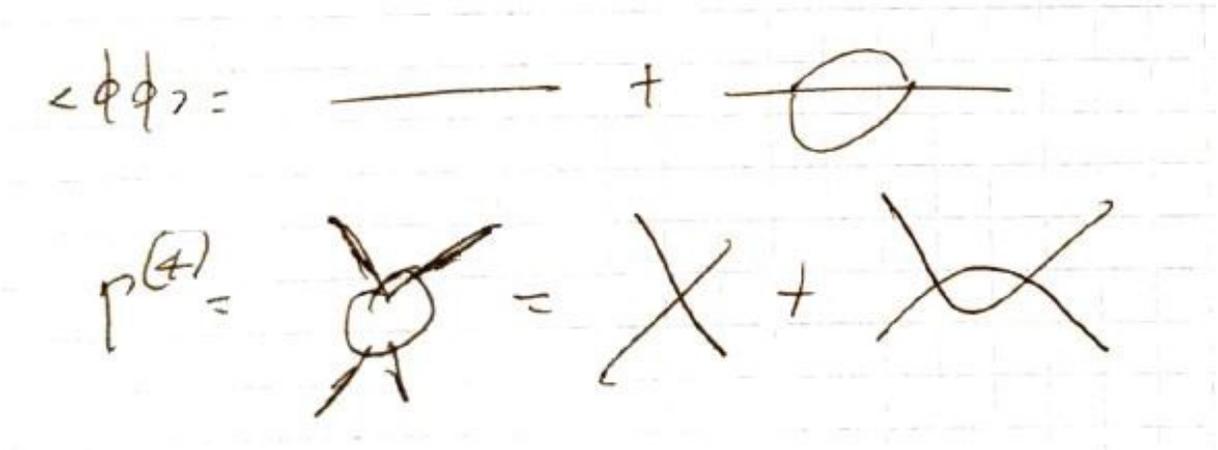


Figura 12: Rappresentazione diagrammatica dei termini che contribuiscono alla rinormalizzazione della coupling constant fino all'ordine one loop. Sopra: la funzione a due punti è data dal propagatore bare più il termine di self-energia. Sotto: il vertice completo della teoria (fino al one loop) è dato dalla somma del vertice bare e delle correzioni one loop.

$$\eta = \frac{g^2}{48} + o(g^3)$$

Dunque il valore della dimensione anomala al punto critico, che corrisponde al punto in cui è valida l'identificazione tra le due teorie e in cui si ferma il running della costante, è

$$\eta(g^*) = \frac{(g^*)^2}{48} = \frac{\varepsilon^2}{174} \quad \text{con} \quad b = \frac{3}{2}$$

In particolare i diagrammi che contribuiscono in questo caso alla funzione a due punti sono quelli mostrati nella Figura 12 in alto (propagatore bare e self energia one loop). Naturalmente bisogna anche calcolare le correzioni al vertice, in cui i diagrammi che contribuiscono al one loop sono quelli mostrati nella Figura 12 in basso (vertice bare e correzioni one loop). Quindi in concreto ciò che abbiamo fatto è stata un'espansione perturbativa in $d = 4 - \varepsilon$ dimensioni, in cui il parametro perturbativo è proprio $\varepsilon \ll 1$. Tale procedura, molto utilizzata nel contesto della QFT, è nota infatti come ε -*expansion*. Quindi tutti i nostri calcoli sono validi e consistenti per $\varepsilon \ll 1$, tanto è vero che l'articolo originale di Wilson, in cui tale tecnica venne introdotta, era intitolato "Critical exponents in 3.99 dimensions". Tuttavia

noi siamo interessati al caso $d = 3$ ovvero $\varepsilon = 1$, che ovviamente non rientra nel regime di consistenza e validità dell'approccio perturbativo. Possiamo comunque *estrapolare* i valori che ci interessano, ovvero trascurare la non validità dell'approccio perturbativo e utilizzare i risultati per esso ottenuti per il caso $\varepsilon = 1$. Con tale procedura si ottiene

$$\eta(g^*)|_{\varepsilon=1} \sim \frac{1}{100}$$

che confrontato con il valore ottenuto numericamente, cioè $\eta \sim 0,04$ è abbastanza vicino. Anche i valori degli altri esponenti critici non risultano molto lontani dal valore "corretto", il che risulta sorprendente se pensiamo in che modo li abbiamo ottenuti.

Parte II

Teoria di campo conforme

La ε -expansion rappresenta il modo in cui, intorno agli anni '70 -'75 la comunità scientifica cercava di ottenere gli esponenti critici tramite la teoria statistica dei campi, servendosi dell'equazione di flusso del gruppo di rinormalizzazione, dei suoi punti fissi e del conseguente running della coupling constant. Questo dunque rappresenta l'essenza stessa della teoria dei campi e della sua dinamica e ha rappresentato il paradigma della sua applicazione ai fenomeni critici fino al 1983. In quell'anno venne pubblicato un lavoro di Belavin, Polyakov e Zamolodchikov in cui veniva risolto *esattamente* il modello di Ising in 2D con l'ausilio della *teoria di campo conforme* (CFT). Tale approccio risulta indubbiamente più potente della ε -expansion (basti pensare che si trovano soluzioni esatte) anche se quest'ultima ha un range di applicazione molto più ampio. Infatti, come precedentemente analizzato, la ε -expansion si adatta alla maggior parte dei fenomeni critici, partendo dalla teoria classica di Landau e aggiungendo le correzioni perturbative al one-loop, ma non solo: essa è stata applicata (a volte anche impropriamente) negli ambiti più disparati come ad esempio l'andamento dei mercati finanziari e la diffusione delle epidemie. Tuttavia, come abbiamo già sottolineato, il vero problema di tale approccio è la mancata legittimità dello sviluppo perturbativo nel

caso di valori di ε non piccoli. Ad esempio, nel calcolo della dimensione anomala $\eta(g^*)$ si considera di solito uno sviluppo del tipo

$$\eta(g^*) \sim \sum_{n=2}^{\infty} a_n \varepsilon^n$$

Quindi la convergenza della serie, nonché la validità dell'approccio perturbativo, è strettamente legata al valore di ε , ed in generale la serie non converge, infatti si parla di *serie asintotica*, e a maggior ragione non converge per $\varepsilon = 1$. E' dunque legittimo chiedersi se l'espansione stessa, nonostante si siano ottenuti degli ottimi risultati con calcoli fino a 7 loop (con correzioni $\sim \varepsilon^7$), abbia senso. Infatti esistono dei metodi per risommare la serie e si ottengono dei buoni risultati nel caso $d = 3$, ma dei risultati sbagliati nel caso $d = 2$, mostrando dunque come tale approccio non riesca a rendere conto dei fenomeni critici a bassa dimensionalità.

Le CFT superano tale questione, fornendo delle soluzioni esatte e analitiche nel caso di Ising 2D (e di tutte le sue varianti che in esso possono essere mappate), che potremmo paragonare, ricordando però che in questo caso i gradi di libertà in gioco sono infiniti, alla risoluzione dello spettro dell'algebra dei momenti angolari o dell'oscillatore armonico in meccanica quantistica non relativistica. Tale approccio fornisce anche delle soluzioni numeriche ma *non perturbative* nel caso di Ising 3D, risolvendo dunque la più semplice CFT in $d = 3$ tramite la tecnica nota come *numerical conformal boost* (Rychkov 2012-2013). Così è stato mostrato che le correzioni ai risultati ottenuti con la ε -expansion non siano trascurabili soprattutto, per ovvie ragioni, nel caso bidimensionale. Duque i vantaggi chiave delle CFT sono l'esattezza e analiticità (in $d = 2$) e la non-perturbatività (in generale).

8 Invarianza di scala

Come precedentemente sottolineato, i punti fissi del gruppo di rinormalizzazione costituiscono dei punti in cui si ottengono teorie invarianti di scala ed in particolare saremo interessati al punto fisso interagente $g = g^*$, dove è possibile stabilire il mapping tra teoria di campo e Modello di Ising. Nello specifico siamo interessati allo studio delle teorie che godono dell'invarianza di scala in quanto l'invarianza conforme è una sua generalizzazione.

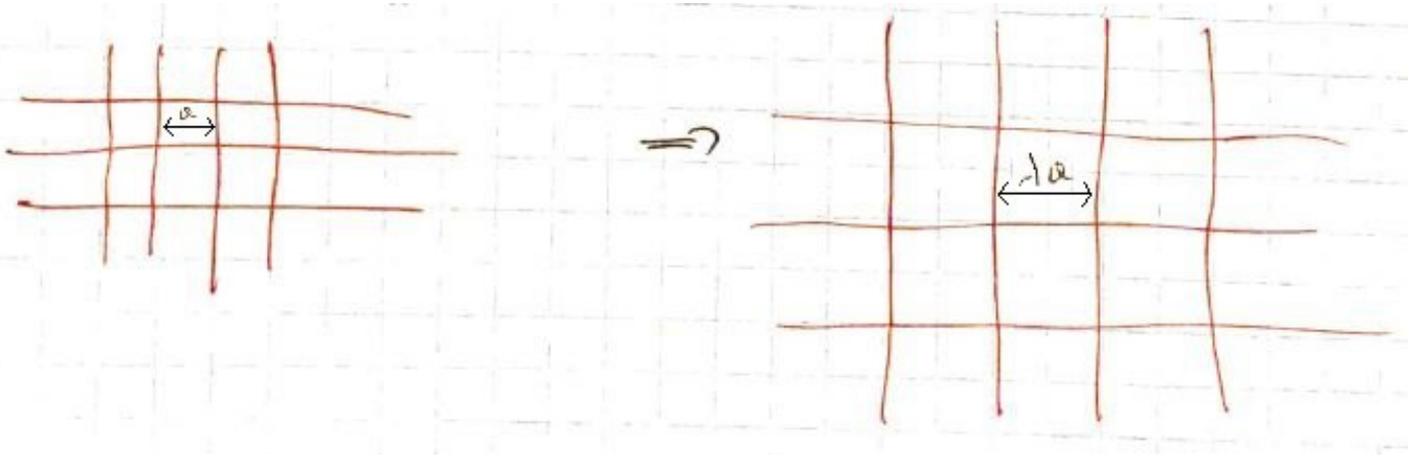


Figura 13: Possibile dilatazione di un fattore λ applicata ad un reticolo quadrato bidimensionale.

Prendiamo come esempio la teoria $\lambda\phi^4$ e partiamo dall'azione in n dimensioni

$$S = \int d^n x \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\eta}{4!}m^2\phi^4 \right)$$

Una *trasformazione di scala* è una dilatazione delle coordinate secondo un fattore di scala λ

$$x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu \tag{62}$$

che di fatto significa che sto passando ad una teoria con un reticolo di passo reticolare più grande (se $\lambda > 1$) come mostrato in Figura 13. Ci chiediamo adesso se la teoria risulti invariante per questa trasformazione. In generale la risposta a tale quesito è negativa, in quanto il termine di massa, che sia essa fisica o generata dinamicamente, rompe l'invarianza di scala. Questo perchè il correlatore dei campi andrà come

$$\langle\phi(x)\phi(0)\rangle \sim e^{-m(x)}$$

il che significa che le interazioni avranno un range finito, proporzionale ad $1/m$, il che rompe manifestamente l'invarianza di scala.

Se invece il termine di massa è nullo, $m = 0$, il range dell'interazione sarà infinito (come ad

esempio nel caso coulombiano), e il propagatore andrà come

$$\langle \phi(x)\phi(0) \rangle = \frac{1}{|x|^{d-2+\eta}}$$

cioè una legge a potenza, che come sappiamo dalla discussione precedente sugli esponenti critici, è un invariante di scala. Ciò è coerente con il range infinito dell'interazione, infatti poichè l'interazione raggiunge ogni punto dello spazio, un riscaldamento non influenza tale situazione.

Vediamo adesso esplicitamente la veridicità di tale ragionamento. Affinchè la teoria risulti globalmente invariante per trasformazioni di scala, al riscaldamento delle coordinate $x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$ seguirà un opportuno riscaldamento del campo ϕ

$$\phi \rightarrow \lambda^{-\Delta} \phi$$

dove Δ è detta *dimensione di scala* del campo ϕ che vedremo essere strettamente collegata agli esponenti critici. Naturalmente dobbiamo tener conto del fatto che anche le derivate saranno riscalate di un fattore λ :

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Cerchiamo dunque di determinare Δ affinchè sia verificata l'invarianza di scala. Calcoliamo

$$S [x \rightarrow \lambda x, \phi \rightarrow \lambda^{-\Delta} \phi] = \int d^n x \lambda^n \left(\lambda^{-2(\Delta+2)} \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \lambda^{-2\Delta} \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \lambda^{-4\Delta} \frac{\eta}{4!} m^2 \phi^4 \right) \quad (63)$$

Affinchè il termine cinetico risulti invariante di scala si deve avere che

$$\Delta + 1 = \frac{n}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta = \frac{n-2}{2} = \begin{cases} 1 & n = 4 \\ 0 & n = 2 \end{cases}$$

e dunque ritroviamo che Δ assume i valori delle note dimensioni di massa del campo scalare rispettivamente in $d = 4$ e in $d = 2$. Sostituiamo dunque il valore di Δ appena ottenuto nell'eq.(63)

$$\begin{aligned} S [x \rightarrow \lambda x, \phi \rightarrow \lambda^{-\Delta} \phi] &= \int d^n x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \lambda^{n-n+2} \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \lambda^{n-2n+4} \frac{\eta}{4!} m^2 \phi^4 \right) = \\ &= \int d^n x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \lambda^2 \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \lambda^{-n+4} \frac{\eta}{4!} m^2 \phi^4 \right) \end{aligned}$$

Possiamo notare come il termine di massa non risulti mai invariante di scala, a causa del fattore λ^2 , esattamente come avevamo anticipato.

Il termine di interazione in η risulta invece invariante di scala in $n = 4$ dimensioni, e dunque in questo caso η è adimensionato. Invece se $n = 4 - \varepsilon$, cioè $n < 4$, otteniamo che l'accoppiamento sarà $\eta\lambda^{-\varepsilon}$ il che significa che η acquista una dimensione $[\eta] = \varepsilon$. Questo è lo stesso risultato che avevamo ottenuto nel paragrafo precedente e che ci aveva permesso di stabilire che η (o λ con la precedente nomenclatura) risultasse un accoppiamento rilevante (dimensionato) in $d < 4$. In particolare riotteniamo la β -function in assenza di correzioni quantistiche: infatti se calcoliamo

$$\lambda \frac{d\eta}{d\lambda} = -\varepsilon\eta$$

che corrisponde esattamente all'eq.(59) con l'utilizzo dell'eq.(60). Dunque questo ragionamento sull'invarianza di scala è stato fatto al livello classico. Se dovessimo considerare delle correzioni quantistiche, si potrebbero avere degli scaling non banali e quindi recuperare l'invarianza di scala anche per teorie che a livello classico sembravano non goderne.

Come *esercizio* lasciato al lettore, è possibile verificare che l'azione fermionica in n dimensioni

$$S_F = \int d^n x \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi$$

è invariante di scala per ogni valore di n . In particolare per $n = 4$ otteniamo che il campo si trasforma nel seguente modo

$$\psi \rightarrow \lambda^{-3/2}\psi \quad (n = 4)$$

cioè $\Delta = 3/2$ per $n = 4$. Questo risultato è abbastanza evidente considerando il termine di corrente fermionica

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

che ha dimensione 3 per $n = 4$.

Un ragionamento analogo si può applicare allo studio dell'elettromagnetismo

$$S = \int d^n x \frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu}^2$$

verificando che esso è invariante di scala per $n = 4$ con

$$A_\mu \rightarrow \lambda^{-1}A_\mu$$

cioè in questo caso $\Delta = 1$. Ciò è fissato da motivi geometrici, in quanto la dimensione della fase

$$\oint A_\mu dx^\mu$$

che compare nelle quantità fisiche è canonica, dunque fissata.

9 Invarianza conforme

Come visto dunque la teoria $\lambda\phi^4$ è invariante di scala in $d = 4$ dimensioni nel caso classico. Ma il gruppo di rinormalizzazione ci dice che, inserendo le correzioni quantistiche, esiste un altro punto g^* in cui la teoria è invariante di scala, e che corrisponde al punto fisso non banale per il quale abbiamo calcolato gli esponenti critici (η) e che viene mappato nel modello di Ising. Vogliamo adesso andare oltre questi risultati. In particolare siamo interessati a cosa accade se la trasformazione di scala dipende dalle coordinate, cioè

$$\lambda \rightarrow \lambda(x)$$

Un tale tipo di trasformazione, ovvero una trasformazione di scala *locale*, è detta *trasformazione conforme*. Dunque richiedere ad una teoria di essere invariante per trasformazioni conformi equivale a richiedere che essa sia invariante per trasformazioni di scala locali. In particolare, il fatto che il fattore di scala dipenda dal punto dello spazio implica che un eventuale reticolo sul quale sia definita la teoria possa essere distorto, come mostrato nella Figura 14. Il fatto che la trasformazione mostrata Figura 14 sia una trasformazione di scala locale segue dal fatto che l'angolo tra due versori \vec{A} , \vec{B} è conservato, cioè

$$\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \cos \theta = \text{costante} \quad (64)$$

Quanto appena visto è valido sia per i versori di un reticolo che per le coordinate stesse di una varietà differenziale, cioè per la struttura differenziale della varietà. Ci si può dunque chiedere quale sia il motivo per cui ricerchiamo una simile proprietà di invarianza di scala locale in una teoria. Il motivo è che, nella maggior parte dei casi, vedremo come *l'invarianza di scala globale implica quella locale*. L'idea che svilupperemo meglio in seguito è che, considerata

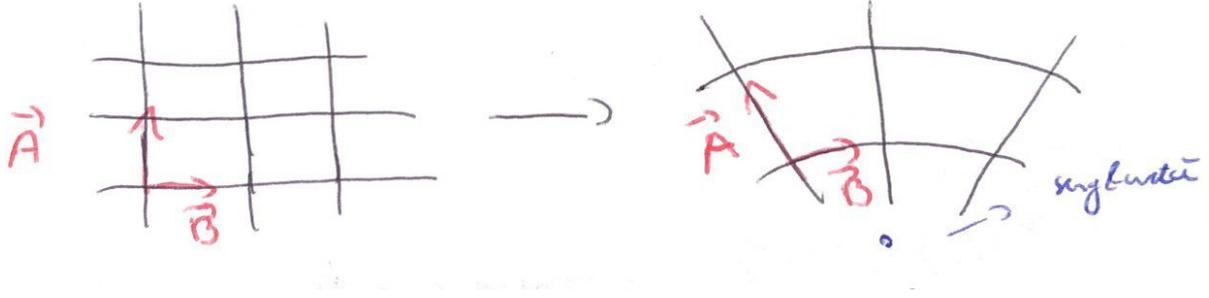


Figura 14: Esempio di trasformazione conforme su un reticolo quadrato bidimensionale. In rosso sono indicati i versori per i quali l'angolo tra essi compreso non viene modificato e in blu è indicata una possibile singolarità che potrebbe essere generata dalla trasformazione.

la località della teoria di campo, esistono degli operatori che generano tali trasformazioni di scala e che possono essere scritti in forma locale.

Cerchiamo adesso di comprendere meglio cosa sia una trasformazione conforme ricavando l'equazione che la caratterizza. Innanzitutto consideriamo il generico *diffeomorfismo* locale

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}(x) \quad (65)$$

e proviamo a comprendere quando esso determina una trasformazione conforme. In particolare calcoliamo la quantità $\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$ facendo uso della seguente identità:

$$\begin{aligned} \delta_{\nu}^{\mu} + \frac{\partial \varepsilon^{\mu}}{\partial x^{\nu}} &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \left(1 + \frac{\partial_{\alpha} \varepsilon^{\alpha}}{d}\right) \left[\delta_{\nu}^{\mu} + \frac{1}{2}(\partial_{\nu} \varepsilon^{\beta} - \partial^{\beta} \varepsilon_{\nu})\right] \left[\left(1 - \frac{\partial_{\alpha} \varepsilon^{\alpha}}{d}\right) \delta_{\beta}^{\mu} + \frac{1}{\xi}(\partial_{\beta} \varepsilon^{\mu} + \partial^{\mu} \varepsilon_{\beta})\right] \equiv \\ &\equiv (1 + \sigma(x)) R_{\nu}^{\beta} S_{\beta}^{\mu} \end{aligned}$$

Nel primo passaggio ci siamo serviti dell'eq.(65) e nell'ultimo passaggio abbiamo definito le seguenti quantità:

$$\left(1 + \frac{\partial_{\alpha} \varepsilon^{\alpha}}{d}\right) \equiv (1 + \sigma(x))$$

che corrisponde ad una *dilatazione locale*,

$$\left[\delta_{\nu}^{\mu} + \frac{1}{2}(\partial_{\nu} \varepsilon^{\beta} - \partial^{\beta} \varepsilon_{\nu})\right] \equiv R_{\nu}^{\beta}$$

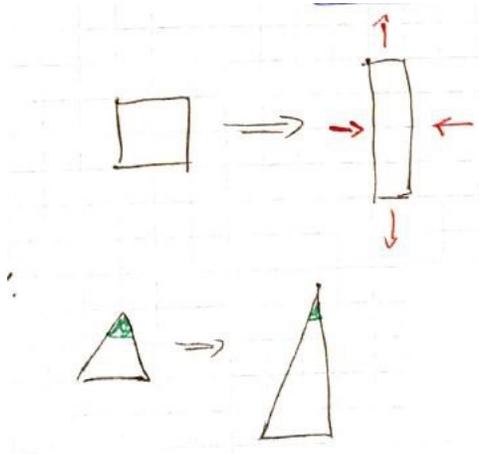


Figura 15: Sopra: esempio dell'effetto di una trasformazione di shear su un quadrato. Sotto: una trasformazione di shear non conserva gli angoli.

che indica una *rotazione infinitesima locale*, e infine

$$\left[\left(1 - \frac{\partial_\alpha \varepsilon^\alpha}{d} \right) \delta_\beta^\mu + \frac{1}{\xi} (\partial_\beta \varepsilon^\mu + \partial^\mu \varepsilon_\beta) \right] \equiv S_\beta^\mu$$

che è un termine noto come trasformazione di *shear* o di *stiramento* infinitesima e locale. Tale trasformazione è responsabile di una modifica nella forma di un elemento di varietà: ad esempio potrebbe restringerne una dimensione e allargarne un'altra, come mostrato nella Figura 15, non conservando pertanto gli angoli. Definiamo allora le *trasformazioni conformi* come quelle trasformazioni che sono una combinazione esclusivamente di una dilatazione locale e di una rotazione locale, cioè per cui il termine di shear non contribuisce. Infatti, come mostrato nell'esempio precedente nella Figura 14, l'effetto di una trasformazione conforme su un elemento infinitesimo della varietà, è la combinazione di una dilatazione locale e di una rotazione locale, ma non compaiono effetti di stiramento perchè gli angoli sono conservati. Dunque imponiamo che il termine di shear non contribuisca alla trasformazione, il che equivale ad imporre che

$$S_\beta^\mu = \delta_\beta^\mu$$

da cui segue immediatamente che

$$\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu = \frac{2}{d} (\partial_\alpha \varepsilon^\alpha) \delta_{\mu\nu} \quad (66)$$

Questa appena ricavata è l'equazione che definisce una trasformazione conforme in d dimensioni. Tale equazione ammette soluzioni differenti in base al fatto che $d > 2$ o $d = 2$.

Per $d > 2$ si può dimostrare che la soluzione ammette un numero finito di parametri e vale

$$\epsilon^\mu(x) = b^\mu + \lambda x^\mu + \omega_\nu^\mu x^\nu + a^\mu x^2 - 2(a \cdot x)x^\mu$$

dove

- b^μ indica una *traslazione*;
- λx^μ rappresenta una *dilatazione*;
- $\omega_\nu^\mu x^\nu$ esprime una *rotazione*, in quanto $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$;
- $a^\mu x^2 - 2(a \cdot x)x^\mu$ è detta *trasformazione conforme speciale*.

Sappiamo che nel caso di una teoria euclidea in d dimensioni, la combinazione del gruppo delle traslazioni e delle rotazioni $SO(d)$ restituisce il *gruppo di Poincarè*. Con l'aggiunta ad esso delle trasformazioni speciali conformi e delle dilatazioni si ottiene il *gruppo conforme* in $d > 2$ dimensioni, che nel caso euclideo si dimostra essere

$$SO(d+1, 1)$$

Nel caso invece della metrica di Minkowski, al posto delle rotazioni euclidee avremo le *trasformazioni di Lorentz*, il cui gruppo è $SO(d-1, 1)$ e dunque il gruppo conforme si dimostra essere

$$SO(d, 2)$$

Nel caso $d = 2$ avremo che il generico punto dello spazio avrà coordinate

$$x^\mu = (x^1, x^2)$$

Tuttavia conviene utilizzare delle *coordinate complesse*:

$$z = x^1 + ix^2 \quad \text{e} \quad \bar{z} = x^1 - ix^2$$

Dunque siamo interessati alla *metrica* in queste nuove coordinate

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 = dzd\bar{z} \quad (67)$$

dove nel secondo passaggio abbiamo utilizzato il fatto che $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ per le coordinate di partenza (spazio piatto), e nel secondo passaggio abbiamo sostituito le definizioni delle nuove coordinate.

Nelle vecchie coordinate un vettore v^μ ha componenti

$$v^\mu = (v^1, v^2)$$

Introduciamo la seguente notazione per le componenti di un vettore nelle nuove coordinate

$$v^\mu = (v^z, v^{\bar{z}})$$

Allora in generale avremo che

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{zz} dzdz + 2g_{z\bar{z}} dzd\bar{z} + g_{\bar{z}\bar{z}} d\bar{z}d\bar{z}$$

Confrontando con l'ultimo membro dell'eq. (67) otteniamo immediatamente che

$$g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \quad g_{z\bar{z}} = \frac{1}{2} \Rightarrow g^{z\bar{z}} = 2$$

Possiamo riscrivere anche le derivate in queste nuove coordinate

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)$$

e ovviamente

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{z} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} z = 0$$

Riscriviamo allora l'eq. (66) nel caso di $d = 2$ e con la generica metrica $g_{\mu\nu}$

$$\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu = (\partial_\alpha \varepsilon^\alpha) g_{\mu\nu}$$

e cerchiamo di esprimerla in termini delle nuove coordinate complesse introdotte. Analizziamo i tre possibili casi:

- $\mu = \nu = z$

In questo caso otteniamo

$$2\partial_z \varepsilon_z = 0$$

ma

$$\varepsilon_z = g_{z\bar{z}} \varepsilon^{\bar{z}}$$

e dunque

$$\partial_z \varepsilon^{\bar{z}} = 0$$

Ciò significa che $\varepsilon^{\bar{z}}$ non dipende da z e sarà una funzione della sola \bar{z} , e quindi la soluzione sarà

$$\varepsilon^{\bar{z}} = F(\bar{z}) \tag{68}$$

Questa condizione appena trovata non è altro che la *condizione di analiticità di Cauchy* per la funzione $\varepsilon^{\bar{z}}(\bar{z})$.

- $\mu = \nu = \bar{z}$

In questo caso si ottiene

$$\partial_{\bar{z}} \varepsilon^z = 0$$

la cui soluzione è, analogamente al caso precedente

$$\varepsilon^z = F(z) \tag{69}$$

- $\mu = z, \nu = \bar{z}$

In questo caso si verifica che l'equazione si riduce semplicemente ad una identità. Infatti l'equazione diventa

$$\partial_z \varepsilon_{\bar{z}} + \partial_{\bar{z}} \varepsilon_z = (\partial_z \varepsilon^z + \partial_{\bar{z}} \varepsilon^{\bar{z}}) g_{z\bar{z}}$$

ma usando la metrica abbiamo che

$$\partial_z \varepsilon_{\bar{z}} + \partial_{\bar{z}} \varepsilon_z = \frac{1}{2} (\partial_z \varepsilon^z + \partial_{\bar{z}} \varepsilon^{\bar{z}})$$

Dunque l'identità è verificata visto che $g_{z\bar{z}} = \frac{1}{2}$.

Siamo dunque partiti dalla generica trasformazione

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \varepsilon^\mu(x^1, x^2)$$

con

$$\varepsilon^\alpha(x^\mu) = \varepsilon^\alpha(x^1, x^2) = \varepsilon^\alpha(z, \bar{z})$$

Imponendo la conformità della trasformazione abbiamo dunque ricavato l'importante asserito che dice che *trasformazioni analitiche di z e \bar{z} sono conformi*, cioè *una trasformazione conforme in $d = 2$ corrisponde ad una riparametrizzazione analitica delle coordinate z e \bar{z}*

$$\begin{cases} z \rightarrow z + \varepsilon^z(z) & \text{con } \varepsilon^z(z) \text{ analitica} \\ \bar{z} \rightarrow \bar{z} + \varepsilon^{\bar{z}}(\bar{z}) & \text{con } \varepsilon^{\bar{z}}(\bar{z}) \text{ analitica} \end{cases} \quad (70)$$

In linea di principio dovremmo considerare il fatto che z e \bar{z} sono l'uno il coniugato dell'altro e dunque non indipendenti. Ciò implicherebbe che $\overline{\varepsilon^{\bar{z}}(\bar{z})} = \varepsilon^z(z)$ e quindi $\overline{\varepsilon^{\bar{z}}(\bar{z})}$ dovrebbe essere una funzione *anti-analitica* di z e il numero di gradi di libertà verrebbe ridotto da 2 ad 1 . Tuttavia nel futuro le tratteremo come delle variabili separate in modo da poter *complessificare* l'algebra, ovvero sceglieremo la sua rappresentazione complessa, e solo alla fine dei calcoli imporrò la condizione di realtà, cioè $\overline{(\bar{z})} = z$. Ad esempio nel caso dell'algebra delle rotazioni, la complessificazione consente di passare nel caso in cui i gruppi sono compatti, dal gruppo $SO(3)$ al gruppo $SU(2)$, oppure nel caso in cui i gruppi sono non compatti, dal gruppo $SO(3, 1)$ al gruppo $SU(2, 1)$.

Uno dei punti cruciali di questo ragionamento è legato all'analiticità di $\varepsilon^z(z)$, che implica che essa ammetta uno sviluppo in serie di Laurent della forma

$$\varepsilon^z(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$$

Ciò significa che il numero di parametri da cui dipende la trasformazione analitica è infinito, a differenza del caso in $d > 2$ in cui era finito. Per cercare di esemplificare quanto ricavato, possiamo deformare un elemento di superficie bidimensionale con arbitraria finezza (trasformazione locale che dipende da infiniti parametri), ma non possiamo fare altrettanto con un cubo tridimensionale, che presenta alcuni vincoli di rigidità (e ciò si manifesta con un numero finito di parametri). Un'altra conseguenza diretta dell'analiticità della trasformazione

discende dal *teorema di Louville* che afferma che le funzioni analitiche che non presentano singolarità sono costanti. Ciò implica che ε è costante, e dunque la trasformazione risulta una banale traslazione, oppure essa presenta delle singolarità. Dunque concludiamo che *le trasformazioni analitiche non banali generano delle singolarità*, di cui possiamo vederne un esempio nella Figura 14. Tuttavia il vantaggio delle funzioni analitiche è che le singolarità possono essere spostate, in modo tale che localmente esse non siano presenti e dunque, in una regione finita dello spazio, la trasformazione analitica risulterà regolare. Il problema della regolarità della trasformazione passa dunque da locale a globale, cioè le singolarità saranno ugualmente presenti ma non in un intorno infinitesimo dei punti che considero. Ciò ancora una volta è legato al numero infinito di parametri disponibili nel caso analitico, che consentono di effettuare tali spostamenti, mentre il numero limitato di parametri in $d > 2$ non lo consente. Approfondiremo questo aspetto nel seguito del corso. A titolo esemplificativo vale la seguente affermazione il cui significato sarà più chiaro in seguito: "L'invarianza conforme è simile allo stirare una camicia o una muta da sub : posso stirare la camicia in modo che sia perfettamente piatta ma nella muta da sub qualche bozzo resta sempre!".

10 Significato geometrico delle trasformazioni conformi e trasformazioni di Weyl

Per capire meglio questa scherzosa affermazione, torniamo un attimo indietro. Abbiamo visto infatti che una trasformazione infinitesima di coordinate

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x) \quad (71)$$

è una trasformazione conforme se e solo se vale la seguente condizione

$$\partial_{(\mu} \varepsilon_{\nu)} = \frac{2}{d} (\partial_\alpha \varepsilon^\alpha) \delta_{\mu\nu}. \quad (72)$$

Vogliamo adesso interpretare il significato geometrico di questa relazione e per far ciò partiamo dalla seguente considerazione: un generico diffeomorfismo (71) induce una variazione della metrica pari a

$$\delta g_{\mu\nu} = \nabla_{(\mu} \varepsilon_{\nu)} \simeq \partial_{(\mu} \varepsilon_{\nu)}$$

dove nel secondo passaggio ci mettiamo nel limite di uno spazio di partenza piatto. La (72) ci dice dunque che specificando al caso di un cambiamento di coordinate conforme su uno spazio piatto avremo

$$\delta g_{\mu\nu}^{(conf)} = \frac{2}{d}(\partial_\alpha \varepsilon^\alpha) \delta_{\mu\nu}.$$

Dunque, nonostante un cambiamento di coordinate non sia altro che una riparametrizzazione e dunque non abbia alcun contenuto fisico, la cosa interessante delle trasformazioni conformi è che il cambiamento della metrica indotto ammonta a un fattore di scala locale. Ciò significa che può essere "annullato" effettuando una trasformazione di Weyl, cioè una trasformazione che lascia inalterate le coordinate ma che modifica la metrica riscalandola localmente. Una generica trasformazione di Weyl sarà dunque scrivibile nel seguente modo

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow e^{2\sigma(x)} g_{\mu\nu}(x). \quad (73)$$

da cui, passando in forma infinitesima e nell'intorno di una metrica piatta, otteniamo una variazione infinitesima della metrica

$$\delta g_{\mu\nu}^{(weyl)} = 2\sigma(x) g_{\mu\nu}(x) \simeq 2\sigma(x) \delta_{\mu\nu}.$$

Vediamo dunque che componendo alla riparametrizzazione conforme una trasformazione di Weyl della metrica con $\sigma(x) = -\frac{1}{d} \partial_\alpha \varepsilon^\alpha$ si avrà una variazione complessiva nulla

$$\delta g_{\mu\nu}^{(conf)} + \delta g_{\mu\nu}^{(weyl)} = 0.$$

Il contenuto fisico di una trasformazione conforme si realizza dunque proprio in questo senso, componendo la riparametrizzazione con una trasformazione di Weyl che mi riporti alla metrica piatta.¹

Tutto questo discorso può essere fatto anche partendo da una metrica generale: in tal caso la condizione affinché un diffeomorfismo (71) definisca una trasformazione conforme sarà data dalla versione covariantizzata di (72) cioè $\nabla_{(\mu} \varepsilon_{\nu)} = \frac{2}{d}(\nabla_\alpha \varepsilon^\alpha) g_{\mu\nu}$. Facendo un collegamento

¹Per comprendere poi dunque la battuta basta pensare al fatto che in $d = 2$ dimensioni, la curvatura è descritta unicamente da uno scalare, il che significa che posso portarmi a una metrica piatta tramite una trasformazione conforme. In $d > 2$ la curvatura è descritta da un numero più alto di parametri e una semplice trasformazione conforme non basta.

con quanto studiato in Relatività Generale, possiamo riconoscere in questa relazione una generalizzazione del concetto di Killing vector, cioè i generatori delle isometrie, per i quali $\nabla_{(\mu} \varepsilon_{\nu)} = 0$. Poichè in questo caso invece il campo $\varepsilon^\mu(x)$ genera una trasformazione che è un'isometria a meno di un riscaldamento locale della metrica (cioè una trasformazione di Weyl), si dirà allora *conformal Killing vector*. Data questa definizione, potremmo dunque dire per concludere che le trasformazioni conformi (72) sono generate dai conformal Killing vector dello spazio piatto.

11 I generatori delle trasformazioni conformi in $d = 2$: l'algebra di Virasoro

Fatta questa dovuta parentesi, torniamo a parlare delle trasformazioni conformi nel caso particolare $d = 2$, che sarà di nostro maggior interesse. Abbiamo visto come nel caso bidimensionale, passando alle coordinate complesse z e \bar{z} , le trasformazioni conformi corrispondano a riparametrizzazioni analitiche (e antianalitiche) delle coordinate

$$\begin{cases} z \rightarrow z + \varepsilon(z) & \text{con } \varepsilon(z) \text{ analitica} \\ \bar{z} \rightarrow \bar{z} + \bar{\varepsilon}(\bar{z}) & \text{con } \bar{\varepsilon}(\bar{z}) \text{ anti-analitica} \end{cases} \quad (74)$$

e questa condizione di analicità permette di sviluppare le trasformazioni in serie di Laurent

$$\varepsilon(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon_n z^{n+1} \quad (75)$$

dove lo shift degli indici è una convenzione la cui giustificazione sarà chiara a breve, e ovviamente uno sviluppo analogo vale per $\bar{\varepsilon}$. È facile vedere che il termine $n = -1$ corrisponde a traslazioni, $n = 0$ a dilatazioni e rotazioni (il fatto che questo termine comprenda le rotazioni deriva dal fatto che si deve considerare anche il corrispettivo termine lineare di $\bar{\varepsilon}$ e che i coefficienti hanno delle parti immaginarie), e il termine $n = 1$, in quanto quadratico, corrisponde a quelle che avevamo chiamato trasformazioni conformi speciali. Tutti gli altri termini corrispondono a trasformazioni aggiuntive che abbiamo la libertà di fare solo in $d = 2$.

Si può vedere che le trasformazioni corrispondenti a $n = -1, 0, 1$, ossia quelle fattibili anche in $d > 2$, sono le uniche trasformazioni conformi che possono essere definite in maniera

globale su tutta la sfera di Riemann e proprio per questo motivo vengono dette trasformazioni conformi regolari. Tutte le altre trasformazioni analitiche sono accettabili solo localmente, in regioni finite, in quanto presentano necessariamente delle singolarità da qualche parte nel piano complesso o perchè non sono univocamente invertibili su tutto il piano. Si può vedere inoltre che le trasformazioni conformi regolari infinitesime producono delle trasformazioni finite regolari e invertibili su tutto il piano complesso, dette mappe di Moebius, cioè le trasformazioni del tipo:

$$z \rightarrow z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{con} \quad a, d, b, c \in \mathbb{C} \text{ t.c. } ad - bc = 1$$

Vogliamo adesso studiare l'algebra dei generatori di questo gruppo di trasformazioni. Per far ciò, consideriamo ad esempio una funzione scalare $f(z, \bar{z})$ che sotto la trasformazione infinitesima di coordinate (74) varierà come:

$$\begin{aligned} \delta f &\equiv f'(z, \bar{z}) - f(z, \bar{z}) \simeq -(\varepsilon(z)\partial_z + \bar{\varepsilon}(\bar{z})\partial_{\bar{z}})f(z, \bar{z}) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} -(\varepsilon_n z^{n+1} \partial_z + \bar{\varepsilon}_n \bar{z}^{n+1} \partial_{\bar{z}}) f(z, \bar{z}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\varepsilon_n \hat{L}_n + \bar{\varepsilon}_n \hat{\bar{L}}_n) f(z, \bar{z}) \end{aligned} \quad (76)$$

dove abbiamo introdotto gli operatori

$$\hat{L}_n = -z^{n+1} \partial_z \quad \text{e} \quad \hat{\bar{L}}_n = -\bar{z}^{n+1} \partial_{\bar{z}} \quad (77)$$

che sono dunque i generatori delle trasformazioni conformi nella rappresentazione scalare. Possiamo dunque vedere che algebra soddisfano questi operatori calcolandone il commutatore:

$$\begin{aligned} [\hat{L}_n, \hat{L}_m] f &= [-z^{n+1} \partial_z, z^{m+1} \partial_z] f = [z^{n+1} \partial_z (z^{m+1} \partial_z f) - z^{m+1} \partial_z (z^{n+1} \partial_z f)] \\ &= (m - n) z^{m+n+1} \partial_z f \quad \forall f \end{aligned} \quad (78)$$

da cui otteniamo $[\hat{L}_n, \hat{L}_m] = (n - m) \hat{L}_{n+m}$. Facendo lo stesso ragionamento per gli operatori $\hat{\bar{L}}_n$ si ottiene un risultato analogo, e ovviamente operatori relativi alle trasformazioni analitiche e antianalitiche commutano tra loro. Dunque in definitiva la simmetria conforme

sarà espressa in termini della somma diretta di due algebre infinito dimensionali isomorfe:

$$\left[\hat{L}_n, \hat{L}_m \right] = (n - m) \hat{L}_{n+m} \quad (79)$$

$$\left[\hat{\hat{L}}_n, \hat{\hat{L}}_m \right] = (n - m) \hat{\hat{L}}_{n+m} \quad (80)$$

$$\left[\hat{L}_n, \hat{\hat{L}}_m \right] = 0 \quad (81)$$

La singola algebra $\left[\hat{L}_n, \hat{L}_m \right] = (n - m) \hat{L}_{n+m}$, che è un'algebra di Lie lineare e infinito-dimensionale, viene detta algebra di Virasoro. Per comprendere meglio le proprietà di quest'algebra, è interessante notare che il sottogruppo di operatori $\hat{L}_0, \hat{L}_1, \hat{L}_{-1}$ costituisce una sottoalgebra

$$\left[\hat{L}_0, \hat{L}_{\pm 1} \right] = \pm \hat{L}_{\pm 1} \quad (82)$$

$$\left[\hat{L}_1, \hat{L}_{-1} \right] = 2\hat{L}_0 \quad (83)$$

che non è altro che l'algebra di $SU(2)$ espressa tramite i familiari operatori \hat{J}_{\pm} e \hat{J}_z . Ciò significa che dentro una rappresentazione irriducibile dell'algebra di Virasoro ci sono infinite rappresentazioni di $SU(2)$: in questo senso dunque l'algebra di Virasoro è un'estensione infinito-dimensionale dell'algebra $SU(2)$. Continuando con l'analogia, così come le rappresentazioni irriducibili finito-dimensionali di $SU(2)$ erano dati dai multipletti di dimensione $(2l + 1)$, adesso i multipletti diventano infinito dimensionali, con gli operatori $\hat{L}_{\pm n}$ con $n > 1$ che fanno muovere sulla scala a salti di n sugli autovalori di \hat{L}_0 . Dal momento però che, come vedremo, \hat{L}_0 giocherà un pò il ruolo di Hamiltoniana del sistema, faremo espressamente la richiesta fisica che la scala sia sì infinita ma limitata inferiormente.

Vedremo poi che la realizzazione quantistica della simmetria conforme richiederà un'estensione centrale dell'algebra di Virasoro, data da

$$\left[\hat{L}_n, \hat{L}_m \right] = (n - m) \hat{L}_{n+m} + \delta_{n+m,0} \frac{c}{12} n (n^2 - 1) \quad (84)$$

Questo pezzo in più è un effetto quantistico, e prende il nome di anomalia conforme.

12 Simmetria Conforme al livello classico

Vogliamo adesso valutare le conseguenze della simmetria conforme su una teoria di campo classica. Sappiamo che al livello classico, lo studio delle simmetrie di una teoria nel formalismo lagrangiano parte dall'analisi delle proprietà di invarianza dell'azione rispetto a trasformazioni delle coordinate e dei campi, e a ogni simmetria continua dell'azione il teorema di Noether fa corrispondere una quantità conservata. In particolare alle traslazioni spazio-temporali il teorema di Noether fa corrispondere il tensore energia-impulso definito canonicamente come:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (85)$$

Un'altra definizione può essere data passando al contesto più generale del formalismo covariante in cui si estende la definizione dell'azione a

$$S = \int d^d x \sqrt{g} \mathcal{L}. \quad (86)$$

e a partire da questa si definisce poi il tensore energia-impulso tramite la variazione del funzionale azione rispetto a una variazione del tensore metrico:

$$\delta S^{(metr)} = \frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \implies T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (87)$$

Si può vedere come effettivamente queste due definizioni siano equivalenti (nel senso che portano alle stesse leggi di conservazione nelle soluzioni delle EOM dei campi), ma la seconda definizione, oltre ad essere più generale, non risente anche di alcuni problemi di cui invece risente la definizione canonica (ad esempio il fatto che non sia garantito che il tensore canonico sia simmetrico).

Supponiamo adesso di effettuare una trasformazione di coordinate infinitesima (71), per la quale sappiamo che la variazione della metrica indotta è $\delta g_{\mu\nu} = \nabla_{(\mu} \varepsilon_{\nu)}$, da cui passando alle componenti controvarianti otteniamo $\delta g^{\mu\nu} = -\nabla^{(\mu} \varepsilon^{\nu)}$ ². Dunque in tal caso avremo:

$$\delta S^{(metr)} = -\frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{g} T_{\mu\nu} \nabla^{(\mu} \varepsilon^{\nu)} = - \int d^d x \sqrt{g} T_{\mu\nu} \nabla^\mu \varepsilon^\nu. \quad (88)$$

²Il cambio di segno viene da $\delta(g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}) = 0$

Imponendo dunque $\delta S = 0$ e mettendoci on-shell³, un'integrazione per parti dell'equazione precedente ci fa giungere alla versione "covariantizzata" della legge di conservazione del tensore energia-impulso, cioè $\Delta^\mu T_{\mu\nu} = 0$.

Vogliamo adesso vedere quali sono le conseguenze su una teoria di campo dell'invarianza conforme, in particolare sulle proprietà del tensore energia-impulso. Prendiamo prima di tutto in esame il più semplice caso di una trasformazione di scala locale. Essendo in tal caso $\delta g^{\mu\nu} = \lambda g^{\mu\nu}$, per una teoria invariante di scala avremo

$$0 = \delta S = \frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{g} T_{\mu\nu} \lambda g^{\mu\nu} \implies \int d^d x \sqrt{g} T_\mu^\mu = 0 \quad (89)$$

il che in prossimità dello spazio piatto implica che l'integrale della traccia del tensore sia nullo. Se rafforziamo adesso l'ipotesi richiedendo che la teoria goda di simmetria conforme, allora l'azione dovrà essere invariante per variazioni della metrica per fattori di scala locali $\delta g^{\mu\nu} = \lambda(x) g^{\mu\nu}$, da cui

$$0 = \delta S = \frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{g} \lambda(x) T_\mu^\mu \quad \forall \lambda(x) \implies T_\mu^\mu(x) = 0 \quad (90)$$

La simmetria conforme implica che il tensore energia-impulso abbia traccia nulla.

Questa osservazione ci permetterà di guardare da un altro punto di vista la domanda che ci siamo posti all'inizio del corso, cioè "la simmetria di scala globale implica quella locale?", che in questo contesto può essere riformulata chiedendosi se vale generalmente la seguente implicazione:

$$\int d^d x \sqrt{g} T_\mu^\mu = 0 \stackrel{?}{\implies} T_\mu^\mu(x) = 0 \quad (91)$$

Ebbene, ci sono vari argomenti che permettono di vedere come questa implicazione sia generalmente valida. Supponiamo che la traccia non sia banalmente nulla, allora affinché l'integrale su tutto lo spazio sia nullo la traccia dovrebbe essere data dalla divergenza di un altro campo, $T_\alpha^\alpha = \partial_\mu V^\mu$. A questo punto ricorriamo a un ragionamento dimensionale: poiché il tensore energia-impulso ha dimensione d , allora il campo V dovrebbe avere dimensione $d - 1$. Poiché inoltre il tensore energia-impulso è associato a una legge di conservazione, la

³La condizione on-shell serve essenzialmente ad annullare la seconda parte di variazione dell'azione, $\delta S^{(fields)}$ dovuta alla variazione dei campi indotta dalla trasformazione. Essendo questa infatti proporzionale alle EOM, andando on-shell dovrà annullarsi anche $\delta S^{(metr)}$.

sua dimensione sarà quella canonica non può essere soggetta a correzioni radiative (no anomalie). Dunque si dovrebbe trovare nella teoria un campo a dimensione $d - 1$ e "protetto" dalla comparsa di dimensione anomala. Senza entrare nei dettagli, si vede che nella stragrande maggioranza dei casi (cioè a meno di particolare simmetrie aggiuntive o di rotture di simmetrie fondamentali, o dunque in generale a meno di casi patologici) ciò non è possibile. In $d = 2$ l'argomento può essere reso ancora più forte, mostrando che addirittura dovrebbe esistere un campo scalare ϕ tale che $V_\mu = \partial_\mu \phi$ e dunque che la traccia dovrebbe essere data dal laplaciano di un campo scalare. Seguendo sempre il ragionamento dimensionale di prima, questo scalare dovrebbe avere dimensione nulla e l'esistenza di un campo del genere è vietata dal teorema di Coleman.

Prima di passare a un esempio pratico, vogliamo specificare un attimo il discorso a $d = 2$ e vedere come la simmetria conforme si traduce sulla forma del tensore energia-impulso quando espresso in coordinate complesse. Prima di tutto, ricordando che le componenti del tensore metrico nelle coordinate complesse sono

$$g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = \frac{1}{2} \quad g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0$$

la condizione di traccia nulla implica che si annullino le componenti diagonali del tensore energia-impulso:

$$T_\alpha^\alpha = T_z^z + T_{\bar{z}}^{\bar{z}} = g^{z\bar{z}}T_{\bar{z}z} + g^{\bar{z}z}T_{z\bar{z}} = 4T_{z\bar{z}} = 0 \quad \implies \quad T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0. \quad (92)$$

Tenendo conto di ciò, dalla legge di conservazione invece si ottiene:

$$0 = \partial^\mu T_{\mu z} = \partial^z T_{zz} = g^{z\bar{z}} \partial_{\bar{z}} T_{zz} \quad \implies \quad T_{zz} = T_{zz}(z) \quad (93)$$

cioè che la componente T_{zz} è una funzione analitica e analogamente $T_{\bar{z}\bar{z}} = T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z})$ è una funzione antianalitica.

Esempio: Teoria libera di campo scalare massless in $d = 2$. Per prendere un pò di dimestichezza, consideriamo il caso di una teoria scalare libera a massa nulla, che è una teoria invariante di scala. La lagrangiana sarà data da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi \quad (94)$$

da cui segue per la definizione canonica del tensore energia-impulso

$$T_{\mu\nu}^{(canonical)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi \quad (95)$$

Analogamente, utilizzando la definizione più generale partendo dall'azione covariante

$$S = \int d^d x \sqrt{g} \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$$

otteniamo per il tensore energia-impulso:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\delta \sqrt{g}}{\delta g^{\mu\nu}} \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi + \sqrt{g} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right] \quad (96)$$

e poichè $\delta \sqrt{g} = -\frac{\sqrt{g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$ si ottiene infine

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi \quad (97)$$

che coincide esattamente con quello canonico.

Verifichiamo adesso che valgono la legge di conservazione on-shell e la proprietà di annullamento della traccia. Partendo dall'ultima, abbiamo

$$T_\mu^\mu = \left(1 - \frac{d}{2}\right) \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi = 0 \quad (98)$$

da cui si vede che per $d = 2$ la proprietà è rispettata.⁴ Per quanto riguarda la legge di conservazione, mettendoci per semplicità nell'ipotesi di spazio piatto abbiamo:

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu} &= \partial_\mu \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + \partial^\mu \phi \partial_\mu \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu (\partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi) \\ &= \partial_\mu \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + \partial^\mu \phi \partial_\mu \partial^\nu \phi - \partial^\alpha \phi \partial^\nu \partial_\alpha \phi = \partial_\mu \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi \end{aligned} \quad (99)$$

da cui vediamo che effettivamente la corrente si conserva lungo le soluzioni delle EOM $\partial_\mu \partial^\mu \phi = 0$.

⁴Si può dimostrare che il risultato vale anche in $d \neq 2$ a meno di un improvement del tensore.

13 Simmetria Conforme al livello quantistico: Conformal Ward Identity

Dopo aver visto cosa comporti la simmetria conforme su una teoria di campo al livello classico, vogliamo adesso esplorarne le conseguenze su una teoria di campo quantistica. Nelle QFT le leggi di conservazione sono formulate tramite le identità di Ward.

13.1 Recap sulle Ward Identities

Nel formalismo funzionale ciò che dobbiamo attenzionare è il path integral. In questo contesto, una trasformazione delle coordinate e dei campi

$$x \rightarrow x + \delta x \quad \phi \rightarrow \phi + \delta\phi \quad (100)$$

non è altro che un cambiamento delle coordinate di integrazione, e dunque lascerà invariato un integrale funzionale generico. Da questa considerazione è possibile ricavare la generalizzazione quantistica delle leggi del moto del campo classiche o delle leggi di conservazione.

Consideriamo ad esempio una teoria di campo scalare e una generica funzione di correlazione $\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle$. Operando il cambiamento di variabili (100) dovremo avere ovviamente una variazione nulla. Supponiamo per semplicità di considerare trasformazioni che lasciano invariata la misura dell'integrale funzionale (in caso contrario si dice che si ha un'anomalia). Avremo dunque che

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle = \delta \int D\phi e^{-S[\phi]} \phi(x_1) \dots \phi(x_n) = \\ &= \int D\phi e^{-S[\phi]} [(-\delta S)\phi(x_1) \dots \phi(x_n) + \delta\phi(x_1) \dots \phi(x_n) + \dots + \phi(x_1) \dots \delta\phi(x_n)] \end{aligned} \quad (101)$$

da cui

$$\langle -\delta S \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle + \langle \delta\phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle + \dots + \langle \phi(x_1) \dots \delta\phi(x_n) \rangle = 0 \quad (102)$$

che non è altro che la generalizzazione del risultato classico, il cui corrispettivo è dato dal primo termine. Vediamo ad esempio cosa succede con le leggi del moto.

Esempio 1: Generalizzazione quantistica delle equazioni del moto Consideriamo una trasformazione dei campi $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$ per la quale avremo

$$\delta S = \int d^d x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta\phi) \right] = \int d^d x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] \delta\phi \quad (103)$$

dove il secondo step segue da un'integrazione per parti. Andando a sostituire nell'equazione (102) per la variazione di una funzione di correlazione tra campi otteniamo:

$$\left\langle \int d^d x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] \delta\phi(x) \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \phi(x_1) \dots \delta\phi(x_i) \dots \phi(x_n) \rangle \quad (104)$$

da cui, scrivendo la variazione dei campi esterni come $\delta\phi(x_i) = \int d^d x \delta(x - x_i) \delta\phi(x)$, ricaviamo per genericità della trasformazione $\delta\phi$

$$\left\langle \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \phi(x_1) \dots \delta(x - x_i) \dots \phi(x_n) \rangle. \quad (105)$$

Questa equazione ci dice che l'equazione classica di Eulero-Lagrange per il campo ϕ è soddisfatta per tutte le funzioni di Green del campo a meno di *contact terms* provenienti dalle regole di commutazione non banali degli operatori di campo.

13.2 Conformal Ward Identity

Passiamo adesso al nostro caso di interesse, considerando una teoria di campo scalare in $d = 2$ e specificando l'identità di Ward al caso di una trasformazione conforme. Consideriamo dunque un osservabile locale $X[\phi]$, dato ad esempio dal prodotto di campi $X = \phi(x_1) \dots \phi(x_n)$. Operiamo dunque un cambiamento di coordinate generico $x^\mu \rightarrow x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$, rispetto al quale il valore d'aspettazione dell'osservabile X dovrà rimanere invariato essendo una semplice riparametrizzazione. Avremo dunque che

$$0 = \delta \langle X \rangle = \langle \delta_\varepsilon X \rangle - \langle (\delta_\varepsilon S) X \rangle \quad (106)$$

Concentriamoci prima di tutto sul secondo pezzo. Sappiamo che per un diffeomorfismo generico la variazione dell'azione è data in termini del tensore energia impulso dalla (87) che nel nostro caso (cioè $d = 2$ e spazio piatto) si riduce a:

$$\delta_\varepsilon S = \frac{1}{4\pi} \int d^2 x \sqrt{g} \delta g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \int d^2 x \partial^{(\mu} \varepsilon^{\nu)} T_{\mu\nu}$$

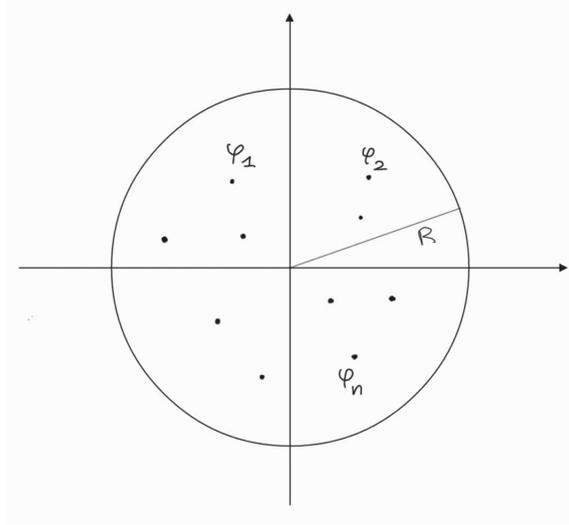


Figura 16: Rappresentazione della circonferenza di raccordo della trasformazione di coordinate conforme.

dove rispetto alla (87) abbiamo moltiplicato per un fattore $\frac{1}{2\pi}$ per convenzione. Prendendo invece in particolare una trasformazione delle coordinate conforme, usando la (72) si avrà

$$\delta_\varepsilon S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2x (\partial_\alpha \varepsilon^\alpha) T_\mu^\mu$$

Fatta questa premessa, ci chiediamo rispetto a quale trasformazione delle coordinate vogliamo specificare l'identità di Ward (106). Affinché il cambiamento di variabili sia lecito e si possa applicare la (106), la trasformazione deve essere regolare all'infinito, mentre sappiamo che nel caso generico di una trasformazione conforme 2d, cioè una trasformazione $z \rightarrow z + \varepsilon(z)$ analitica e corrispettiva anti-analitica per \bar{z} , introduce delle singolarità da qualche parte del piano complesso. Facciamo dunque il seguente ragionamento: consideriamo un cerchio di raggio R tale che tutti i campi presenti nell'operatore X siano valutati in punti interni al cerchio, come in figura. A questo punto facciamo un cambiamento di coordinate conforme regolare all'interno del cerchio di raggio R , regione che chiamiamo R_1 . Per quanto detto prima, una trasformazione del genere avrà necessariamente delle singolarità nella regione esterna R_2 , dunque quello che facciamo è raccorderla all'esterno con un diffeomorfismo generico che sia regolare in tutto R_2 (e dunque anche all'infinito). A questa trasformazione,

essendo regolare in tutto il piano, possiamo applicare l'identità di Ward. La variazione dell'azione causata da questa trasformazione sarà dovuta solamente alla regione esterna, mentre per la parte in R_1 la variazione sarà nulla grazie all'invarianza conforme ($T_\alpha^\alpha = 0$). Avremo dunque che:

$$\delta_\varepsilon S = -\frac{1}{2\pi} \int_{|x|>R} d^2x \partial^\mu \varepsilon^\nu T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\pi} \int_{|x|>R} d^2x [\partial^\mu (\varepsilon^\nu T_{\mu\nu}) - \varepsilon^\nu \partial^\mu T_{\mu\nu}] . \quad (107)$$

Osserviamo che il secondo termine si annulla per la legge di conservazione del tensore energia-impulso, e dunque ciò che otteniamo in definitiva è che la variazione dell'azione sarà data da un termine di superficie sulla superficie di raccordo:

$$\delta_\varepsilon S = -\frac{1}{2\pi} \int_{|x|>R} d^2x \partial^\mu (\varepsilon^\nu T_{\mu\nu}) = \frac{1}{2\pi} \oint_C d\Sigma n^\mu \varepsilon^\nu T_{\mu\nu} \quad (108)$$

dove $C = \partial R_1$ è la circonferenza di raggio R e n^μ è il versore perpendicolare a C che punta verso l'esterno del cerchio. Passiamo adesso alle coordinate complesse z, \bar{z} e le corrispondenti componenti del tensore energia-impulso, e utilizzando le convenzioni $\varepsilon(z) = \varepsilon^z(z), \bar{\varepsilon}(\bar{z}) = \varepsilon^{\bar{z}}(\bar{z})$ e $T(z) = T_{zz}(z), \bar{T}(\bar{z}) = T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z})$, possiamo scrivere

$$\delta_\varepsilon S = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} \varepsilon(z) T(z) - \oint_C \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \bar{\varepsilon}(\bar{z}) \bar{T}(\bar{z}) \quad (109)$$

dove il segno meno del secondo termine proviene dal fatto che il verso standard della circolazione in \bar{z} è l'opposto di quello in z . In definitiva dunque il secondo termine dell'Eq. (106) sarà

$$\langle (\delta_\varepsilon S) X \rangle = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} \varepsilon(z) \langle T(z) X \rangle - \oint_C \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \bar{\varepsilon}(\bar{z}) \langle \bar{T}(\bar{z}) X \rangle . \quad (110)$$

Passiamo adesso al primo pezzo, cioè $\langle \delta_\varepsilon X \rangle$. In particolare siamo interessati al caso in cui X sia il prodotto di campi appartenenti a una classe peculiare, quella dei *campi primari*. Definiamo un campo primario un campo $\phi(z, \bar{z})$ tale che sotto una arbitraria trasformazione conforme $z \rightarrow z' = f(z), \bar{z} \rightarrow \bar{z}' = \bar{f}(\bar{z})$ si trasforma come:

$$\phi(z, \bar{z}) = \left(\frac{df}{dz} \right)^h \left(\frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} \right)^{\bar{h}} \phi'(z', \bar{z}') \quad (111)$$

dove i due esponenti h e \bar{h} vengono detti *conformal weights* del campo primario ϕ . L'idea che porta a questa definizione, e da cui nasce l'interesse per questi campi, è il fatto che generalizza il concetto di campo tensoriale (definito in termini della sua trasformazione rispetto a un cambiamento di coordinate) in un modo tale da estenderlo al caso delle trasformazioni conformi. Sappiamo infatti che rispetto a un semplice riscalamento globale delle coordinate $x \rightarrow x' = \lambda x$ doveva essere $\phi \rightarrow \phi' = \lambda^{-\Delta} \phi$ dove Δ è la scaling dimension⁵. In questo senso si capisce il significato dei pesi conformi h e \bar{h} , che sono presenti proprio per far in modo che la trasformazione dei campi primari sia una generalizzazione al caso delle trasformazioni conformi di quanto succede con una trasformazione di scala. Inoltre, specificando nella (111) il caso di una trasformazione di scala, cioè $z' = \lambda z$ e c.c., è facile vedere che la scaling dimension di un campo primario di pesi (h, \bar{h}) è proprio $\Delta = h + \bar{h}$. La quantità $s = h - \bar{h}$ viene invece detta *conformal spin* del campo, capiremo in seguito perché.

Abbiamo dunque dato una definizione di campo primario, che identifica una particolare e, come vedremo, fondamentale classe di campi. Ovviamente non tutti i campi sono primari (così come non tutti i campi sono tensoriali), e per rendersene conto basta prendere come esempio il campo $\partial\phi$ dato dalla derivata di un campo primario: calcolandone la legge di trasformazione verranno chiaramente dei pezzi aggiuntivi rispetto alla legge (111), dunque il campo in questione non è primario. In seguito capiremo perché proprio i campi primari giocano un ruolo principale nelle teorie conformi.

Per proseguire adesso nel nostro obiettivo, dobbiamo considerare il caso di una trasformazione conforme infinitesima e sviluppare la legge (111), da cui otteniamo:

$$\phi(z, \bar{z}) = [1 + h(\partial_z \varepsilon)] [1 + \bar{h}(\partial_{\bar{z}} \bar{\varepsilon})] \phi'(z', \bar{z}') = [1 + h(\partial_z \varepsilon) + \varepsilon \partial_z] [1 + \bar{h}(\partial_{\bar{z}} \bar{\varepsilon}) + \bar{\varepsilon} \partial_{\bar{z}}] \phi'(z, \bar{z})$$

da cui, trascurando termini di ordine superiore, e definendo per convenzione⁶ $\delta\phi = \phi(z, \bar{z}) - \phi'(z, \bar{z})$ avremo (utilizzando le solite nomenclature)

$$\delta\phi = [h(\partial\varepsilon) + \varepsilon\partial + \bar{h}(\bar{\partial}\bar{\varepsilon}) + \bar{\varepsilon}\bar{\partial}] \phi(z, \bar{z})$$

⁵In questo caso ϕ è un generico campo autostato dell'operatore di dilatazione. Il classico esempio è un campo scalare libero, il quale varia secondo la sua dimensione di massa $\Delta = 1 - d/2$

⁶questo cambio di segno mi è poco chiaro

Prendiamo adesso ad esempio come operatore X il prodotto di due campi primari $X = \phi_1(z_1, \bar{z}_1)\phi_2(z_2, \bar{z}_2)$, per il quale avremo:

$$\delta X = \sum_{i=1,2} \left(h_i(\partial\varepsilon) + \varepsilon\partial \right)_{z_i} \phi_1 \phi_2 + c.c.$$

dove ricordiamo anche la presenza del termine anti-analitico. A questo punto osserviamo che, essendo la trasformazione regolare in tutta la regione R_1 , possiamo utilizzare il teorema di Cauchy per riscrivere il termine analitico come:

$$\sum_{i=1,2} \left(h_i(\partial\varepsilon) + \varepsilon\partial \right)_{z_i} \phi_1 \phi_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \varepsilon(z) \sum_{i=1,2} \left[\frac{h_i}{(z - z_i)^2} + \frac{1}{z - z_i} \partial_i \right] \phi_1 \phi_2$$

e analogamente per il termine anti-analitico

$$\sum_{i=1,2} \left(\bar{h}_i(\bar{\partial}\bar{\varepsilon}) + \bar{\varepsilon}\bar{\partial} \right)_{\bar{z}_i} \phi_1 \phi_2 = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C d\bar{z} \bar{\varepsilon}(\bar{z}) \sum_{i=1,2} \left[\frac{\bar{h}_i}{(\bar{z} - \bar{z}_i)^2} + \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_i} \bar{\partial}_i \right] \phi_1 \phi_2$$

In definitiva, il primo termine dell'identità di Ward (106) si ottiene prendendo il valore di aspettazione di queste due espressioni. Unendo questo risultato con quanto ricavato per il secondo termine, cioè Eq.(110), otteniamo la seguente identità:

$$0 = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} \varepsilon(z) \left[\sum_{i=1,2} \left[\frac{h_i}{(z - z_i)^2} + \frac{1}{z - z_i} \partial_i \right] \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \rangle - \langle T(z) \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \rangle \right] + c.c. \quad (112)$$

Complessificando le variabili e dunque considerando $\varepsilon(z)$ e $\bar{\varepsilon}(\bar{z})$ come variabili indipendenti, la parte analitica e la parte anti-analitica dovranno annullarsi separatamente. Inoltre, essendo $\varepsilon(z)$ e $\bar{\varepsilon}(\bar{z})$ trasformazioni analitiche generiche, si dovranno annullare localmente le integrande (a meno di termini regolari che comunque darebbero un integrale nullo), dovrà cioè essere:

$$\langle T(z) \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \sum_{i=1,2} \left[\frac{h_i}{(z - z_i)^2} + \frac{1}{z - z_i} \partial_i \right] \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \rangle + \text{reg. terms} \quad (113)$$

e analogamente per la parte antianalitica.

Dunque riassumendo, abbiamo ricavato delle identità di Ward locali per i campi primari, e il fatto che le identità integrali abbiano implicato quelle locali è dovuto essenzialmente al fatto che in $d = 2$ una trasformazione conforme è infinito-dimensionale, cioè in particolare una generica trasformazione analitica nelle coordinate complesse.

Soffermiamoci a questo punto su queste identità, facendo qualche commento sul risultato ottenuto. Prima di tutto queste identità ci dicono che l'inserzione del tensore energia-impulso all'interno di un correlatore di campi primari è nota, perchè determinata dalla simmetria conforme, e che inoltre l'inserzione di $T(z)$ e di $\bar{T}(\bar{z})$ sono rispettivamente analitiche e anti-analitiche.

La seconda osservazione che dobbiamo fare è che questa relazione esprime, piuttosto che un'invarianza, una sorta di covarianza di $\langle X \rangle$ rispetto a una generica trasformazione conforme. Per capirlo, vediamo un attimo le cose dal punto di vista hamiltoniano. In questo formalismo una funzione di correlazione tra campi corrisponde al valore d'aspettazione nel vuoto del prodotto temporalmente ordinato degli operatori di campo, $\langle \phi_1 \phi_2 \rangle \rightarrow \langle 0 | \mathcal{T}(\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2) | 0 \rangle$. Inoltre, la variazione di un operatore rispetto a una trasformazione sarà espressa in termini del commutatore dell'operatore con il generatore della trasformazione. Ad esempio nel caso di una traslazione, essendo l'operatore impulso il generatore delle traslazioni, si avrà che $\delta \hat{\phi} = i [\hat{p}, \hat{\phi}]$. Da questo segue che la variazione di una funzione di correlazione a due punti nel formalismo hamiltoniano sarà data da:

$$\delta \langle \phi_1 \phi_2 \rangle = i \langle 0 | [\hat{p}, \mathcal{T}(\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2)] | 0 \rangle = i \langle 0 | \hat{p} \mathcal{T}(\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2) | 0 \rangle - i \langle 0 | \mathcal{T}(\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2) \hat{p} | 0 \rangle$$

da cui si ricava facilmente che nel caso in cui lo stato di vuoto sia invariante rispetto alle traslazioni, cioè $\hat{p}|0\rangle = 0$, allora il valore di aspettazione è invariante, cioè $\delta \langle \phi_1 \phi_2 \rangle = 0$. Tornando allora all'identità di Ward locale che abbiamo ottenuto, ci rendiamo conto che la presenza del termine $\langle T(z) \phi_1 \phi_2 \rangle$ nel membro di sinistra (che ricordiamo essere proveniente dal termine dovuto alla variazione dell'azione $\langle (\delta_\epsilon S) \phi_1 \phi_2 \rangle$) indica il fatto che per generiche trasformazioni conformi infinito dimensionali, non è detto che il vuoto sia invariante. Per questo motivo la local conformal Ward identity (113), non esprime l'invarianza della funzione di correlazione quanto piuttosto una sorta di covarianza rispetto a una generica trasformazione conforme (cioè per una generica $\epsilon(z)$ analitica).

Ci possiamo chiedere a questo punto: quand'è che l'identità di Ward (112) si riduce alla legge di invarianza $\delta\langle\phi_1\phi_2\rangle = 0$? Ebbene, questo accade per le cosiddette trasformazioni conformi regolari, cioè per le trasformazioni del tipo:

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_{-1} + \varepsilon_0 z + \varepsilon_1 z^2$$

ovvero del sottogruppo dato dalle traslazioni, dilatazioni, rotazioni e trasformazioni conformi speciali. In questo caso infatti, si ha che

$$\langle(\delta_\varepsilon S)\phi_1\phi_2\rangle = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} (\varepsilon_{-1} + \varepsilon_0 z + \varepsilon_1 z^2) \langle T(z)\phi_1\phi_2\rangle + c.c. = 0.$$

Questo perchè, essendo la trasformazione regolare, posso mandare il contorno di integrazione C all'infinito e inoltre si dimostra che il correlatore si comporta all'infinito come $\langle T(z)\phi_1\phi_2\rangle \stackrel{|z|\rightarrow\infty}{\sim} \frac{1}{z^4}\langle\phi_1\phi_2\rangle$ e facendo sì che l'integrale sia nullo. Dunque per trasformazioni conformi regolari non c'è il contributo dovuto alla non-invarianza del vuoto, e l'identità di Ward si riduce alla seguente relazione:

$$0 = \delta_\varepsilon\langle\phi_1\phi_2\rangle = \sum_{i=1,2} \left(h_i(\partial\varepsilon) + \varepsilon\partial \right)_{z_i} \langle\phi_1\phi_2\rangle + c.c. \quad (114)$$

che esprime la simmetria del correlatore rispetto a queste trasformazioni.

Vediamo a questo punto quali proprietà del correlatore derivano da queste simmetrie. Consideriamo per il momento solamente la parte analitica, lasciando sottinteso che risultati analoghi si hanno per la parte antianalitica.

- Traslazioni - In questo caso $\varepsilon(z) = \varepsilon_{-1}$ e la (114) implica che:

$$\varepsilon_{-1}(\partial_1 + \partial_2)\langle\phi_1\phi_2\rangle = 0 \quad \implies \quad \langle\phi_1\phi_2\rangle = f(z_1 - z_2) \quad (115)$$

che è il solito risultato per cui il correlatore a due punti per invarianza traslazionale deve dipendere solo dalla differenza delle posizioni

- Dilatazioni - In questo caso $\varepsilon(z) = \varepsilon_0 z$ e la (114) si riduce a:

$$\varepsilon_0(h_1 + z_1\partial_1 + h_2 + z_2\partial_2)\langle\phi_1\phi_2\rangle = 0 \quad (116)$$

da cui, utilizzando il risultato del punto precedente, si ottiene

$$(h_1 + h_2 + (z_1 - z_2)\partial_1)f(z_1 - z_2) = 0 \quad (117)$$

che implica che la forma funzionale della parte analitica debba essere

$$\langle \phi_1 \phi_2 \rangle = \frac{c_{12}}{(z_1 - z_2)^{h_1+h_2}} \quad (118)$$

- Special conf. transf. - In questo caso $\varepsilon(z) = \varepsilon_1 z^2$ e la (114) si riduce a:

$$\varepsilon_1(h_1 2z_1 + z_1^2 \partial_1 + h_2 2z_2 + z_2^2 \partial_2) \langle \phi_1 \phi_2 \rangle = 0 \quad (119)$$

che se applicata all'espressione del correlatore ottenuta sopra, implica che valga una condizione di ortogonalità tra i campi primari, cioè che il correlatore sia nullo a meno che i due campi siano gli stessi, ossia per $h_1 = h_2$. Dunque in definitiva

$$\langle \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \rangle = \frac{\delta_{1,2}}{(z_1 - z_2)^{2h_1}} \quad (120)$$

dove la costante c è stata normalizzata a 1.

Considerando dunque il correlatore a due punti dello stesso campo primario di pesi (h, \bar{h}) e riprendendo anche la dipendenza data dalla parte analitica, si avrà la seguente espressione:

$$\langle \phi(z_1, \bar{z}_1) \phi(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \frac{1}{(z_1 - z_2)^{2h} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{2\bar{h}}}. \quad (121)$$

Ricordando adesso che $(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = (x_1 - x_2)^2$ e utilizzando le quantità prima definite

$$\begin{cases} \Delta = h + \bar{h} \\ S = h - \bar{h} \end{cases} \implies \begin{cases} h = \frac{\Delta+S}{2} \\ \bar{h} = \frac{\Delta-S}{2} \end{cases} \quad (122)$$

possiamo riscrivere il correlatore come:

$$\langle \phi(z_1, \bar{z}_1) \phi(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \frac{1}{(x_1 - x_2)^{2\Delta}} \left(\frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{z_1 - z_2} \right)^S. \quad (123)$$

Da questa espressione vediamo nuovamente che $\Delta = h + \bar{h}$ è proprio la scaling dimension del campo e, inoltre, capiamo il motivo per cui la quantità S venga chiamata *conformal spin*.

Infatti il termine $\left(\frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{z_1 - z_2}\right)^S$ non è altro che una fase, e S misura in un certo senso la risposta alle rotazioni nel campo complesso. Per quanto non si tratti di vero spin, perchè le rotazioni che prendiamo in considerazione non sono solo spaziali ma dello spazio-tempo euclideo, si comporta in maniera simile: supponendo ad esempio di ruotare i campi l'uno attorno all'altro secondo la rotazione $(z_1 - z_2) \rightarrow e^{i\pi}(z_1 - z_2)$ (che corrisponde all'operazione di scambio dei due campi), il correlatore acquisisce una fase $\langle\phi_1\phi_2\rangle \rightarrow e^{-2\pi i S}\langle\phi_1\phi_2\rangle$ e se $S = 1/2$ lo scambio degli operatori fa cambiare di segno il correlatore come accade nella statistica fermionica.

Prima di chiudere la sezione, ci sono altri due risultati importanti da sottolineare. Il primo è che l'invarianza della teoria rispetto alle trasformazioni conformi regolari globali non solo specifica totalmente l'espressione dei correlatori di due campi primari, ma anche di quelli a tre campi. Senza addentrarci nel calcolo, applicando la regular Ward identity, si vede che l'unica forma compatibile con la simmetria conforme è la seguente (scriviamo solo la parte analitica)

$$\langle\phi_1\phi_2\phi_3\rangle = \frac{C_{123}}{(z_1 - z_2)^{\gamma_{12}}(z_1 - z_3)^{\gamma_{13}}(z_2 - z_3)^{\gamma_{23}}} \quad (124)$$

con $\gamma_{ij} = h_i + h_j - h_k$ dove $k \neq i, j$. Le costanti C_{ijk} sono fissate una volta che abbiamo normalizzato i campi in modo tale da eliminare la costante c dai correlatori a due campi, dunque sono delle costanti con un reale significato, e vengono dette *costanti di struttura* della teoria.

Il secondo punto da evidenziare è invece che il tensore energia-impulso, oltre ad essere il generatore delle trasformazioni conformi, è esso stesso un campo conforme primario. In particolare, sappiamo che ha scaling dimension $\Delta = d = 2$ e che le componenti $T = T_{zz}$ e $\bar{T} = T_{\bar{z}\bar{z}}$ sono rispettivamente analitica e antianalitica, da cui si ricava che sono rispettivamente dei campi primari di peso $(2, 0)$ e $(0, 2)$. Questo significa dunque che conosciamo esplicitamente l'espressione del suo correlatore (e analogo per la componente antianalitica)

$$\langle T(z)T(z')\rangle = \frac{c}{2(z - z')^4}. \quad (125)$$

dove l'importanza del coefficiente c sarà chiara in seguito.

Dunque, riassumendo, abbiamo visto come la simmetria della teoria rispetto alle trasformazioni conformi globali dà luogo alle regular Ward identities, leggi di simmetria che

specificano completamente l'espressione dei correlatori di due e tre campi primari. Nel caso generale delle trasformazioni conformi locali analitiche, invece, la teoria presenta a livello quantistico un'anomalia che fa sì che i correlatori non siano invarianti rispetto ad esse: in sostanza il vuoto risente delle singolarità introdotte dalla trasformazione nel piano complesso, e dà un contributo non nullo alla variazione dei correlatori sotto trasformazioni locali, come descritto dall'identità di Ward (112), che inoltre specifica anche l'espressione della parte singolare dell'inserzione del tensore energia-impulso in un correlatore.

14 Operator Product Expansion

Introduciamo adesso un altro concetto di fondamentale importanza, cioè quello della Operator Product Expansion. Si tratta un concetto legato a una visione diversa della QFT rispetto a quella a cui siamo soliti oggi, e che prende spunto da un'assunzione fondamentale, cioè che in una QFT esista una base di operatori di campo locali tramite la quale poter esprimere ogni altro operatore locale. Fatta questa ipotesi, risulta naturale richiedere che l'algebra dei campi della teoria sia completa e associativa. In particolare la richiesta di completezza si concretizza nella seguente condizione: consideriamo il prodotto di due campi locali $\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)$ in due punti differenti e consideriamo in particolare il limite in cui $x_1 \rightarrow x_2$, allora il prodotto dei campi dovrà essere scrivibile come uno sviluppo nella base degli operatori locali in x_2

$$\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2) \underset{x_1 \rightarrow x_2}{\sim} \sum_k f_k(x_1, x_2)\hat{\phi}_k(x_2)$$

dove i campi ϕ_k sono i campi della base dell'algebra e le funzioni f_k sono i coefficienti dello sviluppo che contengono la dipendenza dalla variabile x_1 . Dal punto di vista matematico stiamo chiedendo dunque che le proprietà di questo operatore composto diventino in questo limite del tutto simili a quelle di un operatore locale, dunque esprimibile nella base locale. Dal punto di vista fisico è come se stessimo richiedendo che un'eccitazione composta, nel limite di coalescenza, debba essere descrivibile in termini delle eccitazioni elementari locali della teoria. Questo sviluppo all'interno dell'algebra viene detto *Operator Product Expansion* (OPE).

Concentriamoci adesso sul nostro caso di interesse, cioè quello delle CFT in $d = 2$, e consideriamo l'algebra generata dai campi primari. In questo caso, ci rendiamo conto che l'OPE del prodotto di due campi primari è totalmente specificata. Grazie alla relazione di ortogonalità dei campi primari $\langle \phi_i \phi_j \rangle \sim \delta_{ij}$, le ampiezze dell'OPE del prodotto di due campi primari sono legate alle funzioni di correlazione a tre punti (di cui conosciamo perfettamente l'espressione), come si capisce prendendo il valore di aspettazione nel vuoto della relazione dell'OPE dopo avere moltiplicato entrambi i membri per un terzo operatore della base:

$$\hat{\phi}_i(z_1)\hat{\phi}_j(z_2) \underset{z_1 \rightarrow z_2}{\sim} \sum_k f_{ij}^k(z_1, z_2)\hat{\phi}_k(z_2) \implies f_{ij}^k \sim \langle \phi_i \phi_j \phi_k \rangle.$$

Seguendo la stessa linea di ragionamento che si era vista per le funzioni di correlazione, si capisce che la simmetria conforme impone che l'OPE di due campi primari debba essere della forma

$$\hat{\phi}_i(z_1)\hat{\phi}_j(z_2) \underset{z_1 \rightarrow z_2}{\sim} \sum_k \frac{C_{ij}^k}{(z_1 - z_2)^{h_i+h_j-h_k}} \phi_k(z_2) + \text{derivatives}$$

dove la forma della dipendenza da z_1 è fissata dall'invarianza di scala, mentre le costanti C_{ij}^k sono proprio le costanti di struttura viste per le three-points correlation functions.

A questo punto, possiamo vedere l'identità di Ward (112) ricavata nella sezione precedente sotto un altro aspetto: essa permette di ricavare facilmente l'OPE del prodotto del tensore energia impulso con un campo primario

$$T(z)\phi_1(z_1) \sim \left(\frac{h_1}{(z - z_1)^2} + \frac{1}{z - z_1} \partial_{z_1} \right) \phi(z_1) + \text{regular terms} \quad (126)$$

Questa formula risulterà parecchio utile nel seguito della trattazione.

Adesso fermiamoci un attimo e proviamo a studiare qualche esempio, per mettere in pratica e vedere un pò tutto quello di cui abbiamo parlato in queste ultime sezioni.

Esempio 1: Free Scalar Field Partiamo dall'azione, che scriviamo per semplicità dei conti futuri secondo una normalizzazione diversa dalla solita:

$$S = \frac{1}{8\pi} \int d^2x \sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$$

Avevamo già ricavato il tensore energia impulso

$$T_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi$$

e in particolare passando alle componenti complesse, ricordando che $g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0$ e $g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = 1/2$, otteniamo

$$T_{zz} = (\partial_z \phi)^2 \quad T_{\bar{z}\bar{z}} = (\partial_{\bar{z}} \phi)^2.$$

Passando invece alla funzione di correlazione a due punti, si calcola facilmente che :

$$\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle = -\frac{1}{2} \log(x_1 - x_2)^2 = -\frac{1}{2} \log(z_1 - z_2) - \frac{1}{2} \log(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$$

il che implica che il campo scalare libero a massa nulla non sia primario! In realtà l'andamento logaritmico può essere visto come il comportamento limite per $h, \bar{h} \rightarrow 0$ (che dovesse verificarsi questo limite ce lo dovevamo aspettare perchè la dimensione canonica del campo in questo caso è $1 - d/2 = 0$).

Se invece calcoliamo la funzione di correlazione per il campo $J = \partial_z \phi$ otteniamo

$$\langle \partial_z \phi(z) \partial_{z'} \phi(z') \rangle = \partial_z \partial_{z'} \left(-\frac{1}{2} \log(z - z') \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{(z - z')^2}$$

e dunque il campo $\partial_z \phi$ è un campo primario di pesi conformi $h = 1, \bar{h} = 0$. Ci rimane da calcolare adesso la funzione di correlazione a due punti per le componenti del tensore energia impulso. Consideriamo dunque la componente analitica $T(z) = (\partial_z \phi)^2$. Osserviamo però che essendo i due campi valutati nello stesso punto, l'operatore andrà costruito considerando il prodotto normalmente ordinato dei campi, e dunque $T(z) = : \partial_z \phi \partial_z \phi :.$ Calcoliamo adesso il correlatore

$$\langle T(z) T(z') \rangle = \langle : \partial_z \phi(z) \partial_z \phi(z) : : \partial_{z'} \phi(z') \partial_{z'} \phi(z') : \rangle = 2 \langle \partial_z \phi(z) \partial_{z'} \phi(z') \rangle^2 = \frac{1}{2(z - z')^4}$$

da cui, confrontando con l'espressione generale trovata prima, troviamo che nel caso di campo scalare massless libero, si ha per la costante il valore $c = 1$. Vedremo che questa costante è tipica della teoria, ed è associata all'anomalia conforme e all'estensione centrale dell'algebra di Virasoro.

15 Campo scalare e *vertex operator*

In questo capitolo continuiamo l'analisi dei campi primari analizzando il comportamento dei *vertex operator* e del tensore energia-impulso, per poi passare al formalismo hamiltoniano e iniziare lo studio della teoria delle rappresentazioni dell'*algebra di Virasoro*. Prima di procedere oltre, richiamiamo alcune utili relazioni.

Per prima cosa ricordiamo che un campo $\phi(z, \bar{z})$ è *primario* se quando viene effettuata la trasformazione $(z, \bar{z}) \rightarrow (w, \bar{w})$ si trasforma secondo la seguente legge:

$$\phi'(w, \bar{w}) = \left| \frac{dz}{dw} \right|^h \left| \frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} \right|^{\bar{h}} \phi(z, \bar{z}) \quad (127)$$

La quantità $\Delta = h + \bar{h}$ è detta *dimensione di scala* del campo ϕ . Al fine di alleggerire la notazione, porremo nel seguito $\phi_i \triangleq \phi(z_i, \bar{z}_i)$ e spesso ometteremo la dipendenza del campo da \bar{z} . Un risultato di fondamentale importanza è la *regular Ward identity*:

$$\langle T(z)\phi_1\phi_2 \rangle = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{h_i}{(z - z_i)^2} + \frac{1}{z - z_i} \partial_{z_i} \right] \langle \phi_1\phi_2 \rangle \quad (128)$$

Cui si aggiunge la *OPE*:

$$T(z)\phi_1 \sim \left[\frac{h_1}{(z - z_1)^2} + \frac{1}{z - z_1} \partial_{z_1} \right] \phi_1 + \text{regular part} \quad (129)$$

quando $z \rightarrow z_1$. Per finire, se ϕ è un campo primario:

$$\langle \phi(z, \bar{z})\phi(z', \bar{z}') \rangle = \frac{1}{(z - z')^{2h}} \frac{1}{(\bar{z} - \bar{z}')^{2\bar{h}}} \quad (130)$$

Nel caso del campo scalare libero $\langle \phi\phi \rangle$ va logicamente, quindi ϕ non è primario. Tuttavia, proprio per via di tale andamento logaritmico è possibile costruire dei nuovi campi primari prendendo l'esponenziale del campo ϕ e introducendo i *vertex operator*

$$V_\alpha =: e^{i\alpha\phi(z)} : \quad (131)$$

($: \dots :$ indica il *normal ordering*). Tali operatori sono stati introdotti da Fubini e Veneziano e ricoprono un ruolo molto importante nella teoria delle stringhe. Senza entrare nei dettagli del calcolo,

$$\langle : e^{i\alpha\phi(z)} :: e^{i\beta\phi(z')} : \rangle = \frac{1}{Z} \int D\phi e^{i\alpha\phi(z)} e^{i\beta\phi(z')} e^{-S} = \frac{1}{Z} \int D\phi e^{-S+fJ\phi}$$

con $J(y) = \alpha\delta^{(2)}(y - z) + \beta\delta^{(2)}(y - z')$. L'integrale funzionale può essere calcolato esattamente dando (ricordando che in realtà il campo ϕ dipende anche da \bar{z} e ripetendo lo stesso ragionamento) il seguente risultato:

$$\langle V_\alpha(z, \bar{z}) V_\beta(z', \bar{z}') \rangle = (z - z')^{\alpha\beta} (\bar{z} - \bar{z}')^{\alpha\beta}$$

Si può dimostrare che l'invarianza per trasformazioni conformi globali impone che i campi all'interno di una prodotto d'aspettazione non nullo abbiano la stessa dimensione conforme e questo unito alla richiesta che la funzione di correlazione non cresca con la distanza (i.e. $\alpha\beta < 0$) impone che $\beta = -\alpha$. Quindi:

$$\langle V_\alpha(z, z') V_{-\alpha}(z', \bar{z}') \rangle = \frac{1}{(z - z')^{\alpha^2} (\bar{z} - \bar{z}')^{\alpha^2}} \quad (132)$$

Quindi il campo V_α ha dimensioni conformi

$$(h, \bar{h}) = \left(\frac{\alpha^2}{2}, \frac{\alpha^2}{2} \right)$$

In un certo senso α è la carica elettrica del campo ϕ . In generale, il correlatore di una stringa di operatori di vertice V_{α_i} è nullo a meno che $\sum_i \alpha_i = 0$. Se si compattifica il campo ϕ identificando fra loro ϕ e $\phi + 2\pi R$ si trova che α^2 è un numero razionale.

L'equazione del moto del campo scalare $\partial_\mu \partial^\mu \phi = 0$ ci permette poi di ricavare un altro interessante risultato. Infatti

$$\partial^z \partial_z \phi + \partial^{\bar{z}} \partial_{\bar{z}} \phi = g^{z\bar{z}} \partial_{\bar{z}} \partial_z \phi + g^{\bar{z}z} \partial_z \partial_{\bar{z}} \phi = 0$$

Quindi

$$\partial_{\bar{z}} \partial_z \phi = 0$$

Da cui

$$\partial_{\bar{z}} J_z = 0$$

$$\partial_z J_{\bar{z}} = 0$$

Con $J_z = \partial_z \phi$ e $J_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} \phi$. Quindi

$$\partial^\mu J_\mu = 0$$

e J_μ è una corrente conservata. Notiamo poi che dalla funzione di correlazione $\langle \phi \phi \rangle = -\log(z - z') - \log(\bar{z} - \bar{z}')$ possiamo ottenere immediatamente $\langle J_z J_z \rangle$:

$$\langle J_z J_z \rangle = \partial_z \partial_{z'} \langle \phi \phi \rangle = -\frac{1}{(z - z')^2}$$

Quindi per J_z

$$(h, \bar{h}) = (1, 0)$$

L'aver trovato $\bar{h} = 0$ è una naturale conseguenza del fatto che $\partial_{\bar{z}} J_z = 0$.

Aver trovato h ci permette di scrivere la *OPE*

$$T(z)J_z(z') \sim \left[\frac{1}{(z - z')^2} + \frac{1}{z - z'} \partial_{z'} \right] J_z(z')$$

Si può verificare che allo stesso risultato si arriva calcolando (per tramite del *teorema di Wick*) il *vacuum expectation value* di

$$T(z)J_z(z') = -\frac{1}{2} : \partial_z \phi(z) \partial_z \phi(z) : \partial_{z'} \phi(z')$$

Per finire, enunciamo altre due importanti relazioni:

$$: e^{i\alpha\phi(z, \bar{z})} : : e^{i\beta\phi(z', \bar{z}')} : = |z - z'|^{2\alpha\beta} : e^{i\alpha\phi(z, \bar{z}) + i\beta\phi(z', \bar{z}')} :$$

$$J_z(z)V_\alpha(z', \bar{z}') = \partial_z \phi : e^{i\alpha\phi(z', \bar{z}')} : \sim \frac{\alpha}{z - z'} : e^{i\alpha\phi(z', \bar{z}')} :$$

16 Tensore energia-impulso e anomalia conforme

Il tensore energia-impulso non è un campo primario. La funzione di correlazione è infatti

$$\langle T(z)T(z') \rangle = \left[\frac{2}{(z - z')^2} + \frac{1}{z - z'} \partial_{z'} \right] \langle T(z') \rangle + \frac{c}{2(z - z')^4} \hat{I} \quad (133)$$

(\hat{I} è l'operatore identità). Ne segue quindi che la *OPE* è

$$T(z)T(z') \sim \frac{c}{2(z-z')^4} \hat{I} + \left[\frac{h}{(z-z')^2} + \frac{1}{z-z'} \partial_{z'} \right] T(z') + \text{regular part} \quad (134)$$

(con $h=2$). Il motivo per cui il tensore energia-impulso non è un campo primario è sottile e porta il nome di *anomalia conforme*. Il problema è che la misura $D\phi$ usata per calcolare il *pathintegral* non è invariante quando viene effettuata una trasformazione conforme. Ad esempio, tramite l'*argomento di Fujikawa* è possibile far vedere che una fra $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ e $T_\alpha^\alpha = 0$ è violata. Possono quindi verificarsi due possibilità:

1. $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ e $\langle T_\alpha^\alpha \rangle = -\frac{c}{12}R$ dove R è lo scalare di curvatura. Si parla in questo caso di *conformal trace anomaly*.
2. $\langle T_\alpha^\alpha = 0 \rangle$ e $\partial^\mu T_{\mu\nu} = -\frac{c}{12}\partial_\nu R$. In questo caso si parla di *gravitational anomaly*.

Per quanto ci riguarda siamo interessati alla *trace anomaly*. La costante c che compare nell'anomalia di traccia è infatti la stessa che compare nella funzione di correlazione $\langle TT \rangle$. Infatti:

$$\begin{aligned} T_\mu^\mu &= g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 2g^{z\bar{z}} T_{z\bar{z}} = 4T_{z\bar{z}} \\ \Rightarrow \langle T_{z\bar{z}} \rangle &= \frac{\langle T_\alpha^\alpha \rangle}{4} = -\frac{c}{48}R \end{aligned}$$

Inoltre da

$$\partial_z T_{z\bar{z}} + \partial_{z\bar{z}} T_{z\bar{z}} = 0$$

segue

$$\partial_z \partial_{z'} \langle T_{zz}(z) T_{z\bar{z}}(z') \rangle = \partial_z \partial_{z'} \langle T_{z\bar{z}}(z) T_{z\bar{z}}(z') \rangle$$

Quando $g^{\mu\nu} \rightarrow e^{-2\sigma} g^{\mu\nu}$ abbiamo che

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{4\pi} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int T_\alpha^\alpha \delta \sigma \\ \Rightarrow \frac{\delta S}{\delta \sigma} &= \frac{1}{2\pi} T_\alpha^\alpha \end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{\delta \langle T_\alpha^\alpha(y) \rangle}{\delta \sigma(x)} = \frac{1}{2\pi} \langle T_\alpha^\alpha(y) T_\beta^\beta(x) \rangle = \frac{16}{2\pi} \langle T_{z\bar{z}}(y) T_{z\bar{z}}(x) \rangle$$

Sfruttando adesso le relazioni

$$\begin{aligned} \langle T_\alpha^\alpha \rangle &= -\frac{c}{12}R \\ R &= e^{-2\sigma}(-\partial_\mu^2\sigma) \end{aligned}$$

e riscrivendo tutto in termini delle coordinate complesse si arriva a

$$\partial_{\bar{z}}\partial_{z'} \langle T_{zz}(z)T_{zz}(z') \rangle = \partial_z\partial_{z'} \langle T_{z\bar{z}}(z)T_{z\bar{z}}(z') \rangle = \frac{c\pi}{12}\partial_z\partial_{z'}\partial_z\partial_{\bar{z}}\delta^{(2)}(z-z')$$

Quando $z \rightarrow z'$ possiamo sostituire $\partial_{z'}$, $\partial_{z'} \rightarrow \partial_z$, $\partial_{\bar{z}}$ e ricavare

$$\partial_{\bar{z}} \langle T_{zz}(z)T_{zz}(z') \rangle = \frac{c\pi}{12}\partial_z^3\delta^{(2)}(z-z')$$

Inserendo

$$\langle T_{zz}(z)T_{zz}(z') \rangle = \frac{c'}{2(z-z')^4}$$

nell'equazione sopra e usando l'identità

$$\partial_{\bar{z}}\frac{1}{z-z'} = \pi\delta^{(2)}(z-z')$$

si verifica che

$$c = c'$$

Questo dimostra il collegamento fra anomalia di traccia e comportamento della funzione di correlazione a 2 punti del tensore energia-impulso. Nello spazio degli impulsi avremo

$$\langle T_{z\bar{z}}(p)T_{z\bar{z}}(-p) \rangle \sim cp^2$$

La classe di universalità di una teoria conforme quindi non è determinata solo da (h, \bar{h}) , ma anche da c . Al contrario di h e \bar{h} , c non è direttamente legata agli esponenti critici, ma è caratteristica della teoria (1 per i bosoni scalari, $\frac{1}{2}$ per i fermioni di Majorana...)

17 Algebra di Virasoro e formalismo hamiltoniano

Finora il nostro studio delle teorie conformi si è avvalso del formalismo funzionale, ma è ovviamente possibile riformulare la teoria usando il formalismo hamiltoniano, come stiamo per vedere. Per prima cosa richiamiamo l'algebra di Virasoro:

$$[\hat{L}_n, \hat{L}_m] = (n-m)\hat{L}_{n+m} + \frac{c}{12}\delta_{n+m,0} \quad (135)$$

Per passare al formalismo hamiltoniano è necessario introdurre un ordinamento temporale, i.e.

$$\langle \hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2) \rangle = \langle 0|\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2)|0\rangle\Theta(t_1 - t_2) + \langle 0|\hat{B}(t_2)\hat{A}(t_1)|0\rangle\Theta(t_2 - t_1)$$

Nel caso delle teorie conformi in 2d si introduce l'ordinamento temporale tramite la *radial quantization*. Tale procedura è stata introdotta da Fubini e consiste nel porre

$$\tau = \log |z| \tag{136}$$

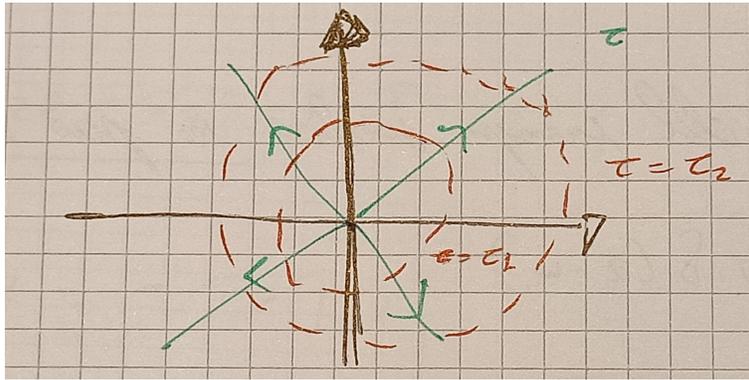


Figura 17: Il valore di τ aumenta muovendosi in direzione radiale.

Tramite questa posizione abbiamo che

$$e^{-i\hat{H}t} \rightarrow e^{-\tau\hat{H}} \rightarrow |z|^{-\hat{H}}$$

Gli autovalori di \hat{H} corrispondono alla dimensione di scala e in un certo senso l'hamiltoniana viene a coincidere con l'operatore di dilatazione, i cui autostati sono i campi primari. La mappa $\tau = \log |z|$ è una mappa conforme dal piano al cilindro.

Infatti, se $z = e^{\frac{w}{R}}$, allora w e $w + 2\pi iR$ sono identificati fra loro e si ha una periodicità lungo l'asse immaginario. La striscia di piano complesso compresa tra $Im(w) = 0$ e $Im(w) = 2\pi R$ è quindi "ripiegata" in modo che tali due rette coincidano, diventando un cilindro. Cambiano la parte reale di w si ha una dilatazione di z .

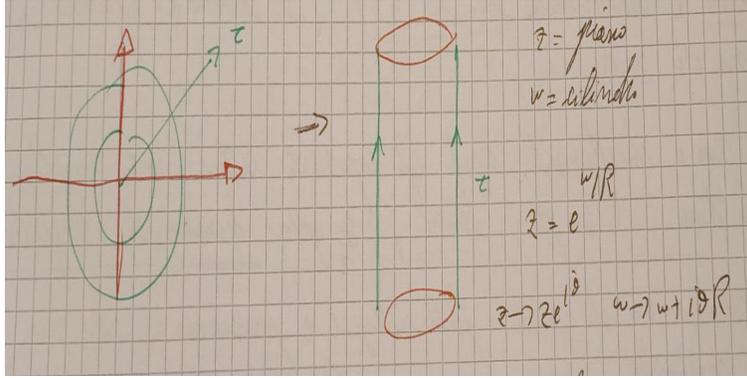


Figura 18: Passaggio da piano a cilindro.

A questo punto quantizzando la teoria sul cilindro, quantizziamo pure quella sul piano perché la mappa è conforme. Quindi

$$\text{Radial quantization} = \text{Canonical quantization on the cylinder}$$

Notiamo che $z \rightarrow 0$ quando $\tau \rightarrow -\infty$ e che $z \rightarrow \infty$ quando $\tau \rightarrow +\infty$.

Espandiamo \hat{T} in serie di Laurent attorno all'origine:

$$\hat{T}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{L}_n}{z^{n+2}} \quad (137)$$

$$\hat{L}_n = \oint_{C_\tau} \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} \hat{T}(z) \quad (138)$$

Nell'equazione sopra C_τ è una circonferenza di raggio τ centrata nell'origine percorsa in senso antiorario.

Calcoliamo adesso il commutatore (ordinato temporalmente)

$$\begin{aligned} [\hat{L}_n, \hat{L}_m] &= \hat{L}_n(\tau + \delta) \hat{L}_m(\tau) - \hat{L}_m(\tau + \delta) \hat{L}_n(\tau) = \\ &= \oint_{C_{\tau+\delta}} \frac{dz}{2\pi i} \oint_{C_\tau} \frac{dw}{2\pi i} z^{n+1} w^{m+1} \hat{T}(z) \hat{T}(w) - \oint_{C_\tau} \frac{dz}{2\pi i} \oint_{C_{\tau+\delta}} \frac{dw}{2\pi i} z^{n+1} w^{m+1} \hat{T}(z) \hat{T}(w) \end{aligned}$$

Adesso bisogna deformare i cammini di integrazione in modo conveniente. Nel secondo termine della somma sostituiamo il percorso C_τ con $C_{\tau-\delta}$ e il cammino $C_{\tau+\delta}$ con C_τ . In questo

modo la differenza di tempo fra i due cammini è sempre δ e gli integrali su w sono calcolati lungo lo stesso percorso. Usiamo poi il segno $-$ per far passare il senso di percorrenza del percorso $C_{\tau-\delta}$ da antiorario ad orario.

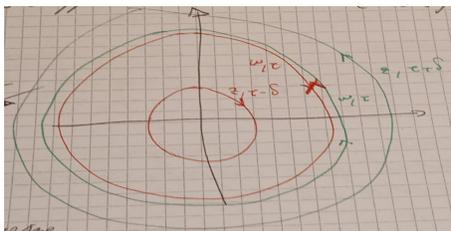


Figura 19: Passaggio da piano a cilindro.

A questo punto diventa possibile accorpare i due addendi in

$$\oint_{C_{\tau+\delta}} \frac{dz}{2\pi i} \oint_{C_{\tau-\delta}} \frac{dw}{2\pi i} z^{n+1} w^{m+1} \hat{T}(z) \hat{T}(w)$$

Fissato un valore di w , congiungiamo adesso i percorsi $C_{\tau+\delta}$ e $C_{\tau-\delta}$ tramite due segmenti infinitamente vicini in modo da circondare il punto w . (I segmenti che abbiamo aggiunto non danno nessun contributo all'integrale in quanto percorsi in versi opposti.)

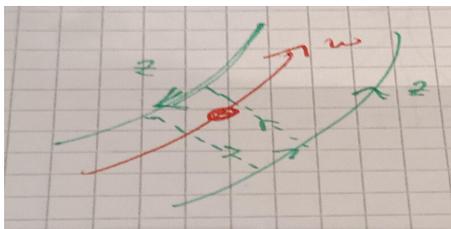


Figura 20: z percorre una curva chiusa che racchiude w .

La variabile z si muove adesso lungo una curva chiusa che circonda w , che possiamo deformare in una circonferenza C_w di raggio infinitesimo centrata in w .

Resta quindi da calcolare l'integrale

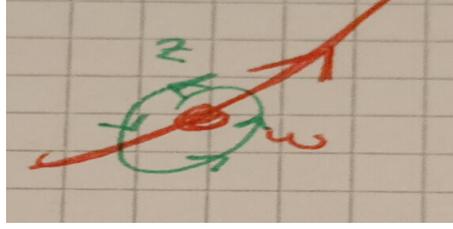


Figura 21: z percorre una circonferenza centrata in w .

$$\oint_{C_\tau} \frac{dw}{2\pi i} \oint_{C_w} \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} w^{m+1} \hat{T}(z) \hat{T}(w)$$

A questo punto usiamo la *OPE* (valida quando $z \rightarrow w$)

$$\hat{T}(z) \hat{T}(w) = \frac{c}{2(z-w)^4} + \left[\frac{2}{(z-w)^2} + \frac{1}{z-w} \partial_w \right] \hat{T}(w) + \text{reg}$$

L'integrale su z adesso può essere immediatamente svolto usando il teorema dei residui:

$$\begin{aligned} \oint_{C_w} \frac{dz}{2\pi i} \frac{cz^{n+1}}{2(z-w)^4} &= \frac{c}{2} \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3(z^{n+1})}{dz^3} \right|_{z=w} = \\ &= \frac{c}{12} n(n^2 - 1) w^{n-2} \end{aligned}$$

$$\oint_{C_w} \frac{dz}{2\pi i} \frac{2z^{n+1}}{(z-w)^2} = 2 \left. \frac{d(z^{n+1})}{dz} \right|_{z=w} = 2(n+1)w^n$$

$$\oint_{C_w} \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^{n+1}}{z-w} = w^{n+1}$$

La parte regolare non contribuisce e quindi resta da calcolare

$$\oint_{C_\tau} \frac{dw}{2\pi i} \frac{c}{12} n(n^2 - 1) w^{n+m-1} + 2(n+1) \hat{T}(w) w^{n+m+1} + \partial_w \hat{T}(w) w^{n+m+2}$$

Anche questo integrale può essere svolto grazie al teorema dei residui:

$$\oint_{C_\tau} \frac{dw}{2\pi i} \frac{c}{12} n(n^2 - 1) w^{n+m-1} = \frac{c}{12} n(n^2 - 1) \delta_{n+m,0}$$

$$\oint_{C_\tau} \frac{dw}{2\pi i} 2(n+1) \hat{T}(w) w^{n+m+1} = \oint_{C_\tau} \frac{dw}{2\pi i} 2(n+1) \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{L}_l}{w^{l+2}} w^{n+m+1} =$$

$$= 2(n+1) \hat{L}_{n+m}$$

$$\oint_{C_\tau} \frac{dw}{2\pi i} \partial_w \hat{T}(w) w^{n+m+2} = \oint_{C_\tau} \frac{dw}{2\pi i} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{-(l+2) \hat{L}_l}{w^{l+3}} w^{n+m+2} =$$

$$= -(n+m+2) \hat{L}_{n+m}$$

E rimettendo assieme i pezzi:

$$[\hat{L}_n, \hat{L}_m] = \frac{c}{12} n(n^2 - 1) \delta_{n+m,0} + (n-m) \hat{L}_{n+m}$$

Partendo dall'OPE abbiamo trovato l'algebra di Virasoro, a dimostrazione del fatto che formalismo funzionale e canonico sono equivalenti.

18 Teoria delle rappresentazioni dell'algebra di Virasoro

La teoria delle rappresentazioni dell'algebra di Virasoro è stata risolta nei primi anni '80 da Feigin, Fuchs e Kac (pronuncia: *Kaz*).

L'unitarietà richiede $c > 0$ e si hanno risultati drasticamente differenti a seconda che c sia maggiore o minore di 1. Sempre l'unitarietà richiede che se $0 < c < 1$ allora $c = 1 - \frac{6}{m(m+1)}$ con $m = 3, 4, \dots$

Per $c < 1$ si hanno i *modelli minimali*, il più semplice dei quali è quello con $c = \frac{1}{2}$, corrispondente al modello di Ising. Tali modelli sono *esattamente risolubili* e permettono di ottenere gli esponenti critici e le funzioni di correlazione del modello di Ising. Questi risultati furono ricavati nel 1983 e furono di grande importanza in quanto in accordo con le soluzioni già note del modello di Ising, permettendo così di confermare la potenza delle teorie conformi. Negli anni seguenti le applicazioni delle teorie conformi si moltiplicarono ed oggi tali teorie sono usate per lo studio dei sistemi 2d più disparati, tra cui:

1. Modelli di meccanica statistica (e.g. Ising e Potts, ma anche modelli con simmetrie più estese)
2. Catene di Kitaev
3. Modelli integrabili
4. Meccanica statistica fuori dall'equilibrio
5. Problemi di spin in materia condensata (del tipo dell'effetto Kondo)
6. Effetto Hall quantistico e stati topologici della materia (oggi si stima che il 10% dei composti sia in uno stato topologico!)

Terminata l'introduzione storica, entriamo adesso nel vivo della nostra trattazione. Assumiamo che esista uno stato $|0\rangle$, il *vuoto* della teoria, a partire dal quale è costruito lo spazio di Hilbert della nostra teoria. Definiamo gli stati *in* come gli stati del campo libero a $t \rightarrow -\infty$, ossia come

$$|\phi_{in}\rangle = \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \hat{\phi}(z, \bar{z})|0\rangle \quad (139)$$

ricordando che usando la quantizzazione radiale $t \rightarrow -\infty$ corrisponde a $z \rightarrow 0$ (e quindi anche $\bar{z} \rightarrow 0$ dato che a noi interessa il caso in cui \bar{z} è il coniugato di z). Assumiamo che il campo ϕ sia (quasi-) primario con dimensioni conformi (h, \bar{h}) . Introduciamo adesso gli stati *out* tramite

$$\langle \phi_{out} | = |\phi_{in}\rangle^\dagger \quad (140)$$

Il prodotto scalare sarà

$$\langle \phi_{out} | \phi_{in} \rangle = \langle 0 | \lim_{z, \bar{z}, w, \bar{w} \rightarrow 0} \hat{\phi}^\dagger(z, \bar{z}) \hat{\phi}(w, \bar{w}) |0\rangle$$

La necessità di avere un prodotto scalare ben definito ci spinge a dare la seguente definizione di hermitiano coniugato

$$\hat{\phi}^\dagger(z, \bar{z}) = \bar{z}^{-2h} z^{-2\bar{h}} \hat{\phi}\left(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{z}\right) \quad (141)$$

Infatti in questo modo

$$\begin{aligned}
\langle \phi_{out} | \phi_{in} \rangle &= \langle 0 | \lim_{z, \bar{z}, w, \bar{w} \rightarrow 0} \bar{z}^{-2h} z^{-2\bar{h}} \hat{\phi}(1/\bar{z}, 1/z) \hat{\phi}(w, \bar{w}) | 0 \rangle = \\
&= \lim_{\xi, \bar{\xi} \rightarrow \infty} \langle 0 | \bar{\xi}^{2h} \xi^{2\bar{h}} \hat{\phi}(\bar{\xi}, \xi) \hat{\phi}(0, 0) | 0 \rangle
\end{aligned}$$

Dato che gli operatori sono temporalmente ordinati (nella quantizzazione radiale) il valore d'aspettazione che stiamo calcolando è la funzione di correlazione ed essendo ϕ primario

$$\langle 0 | \hat{\phi}(\bar{\xi}, \xi) \hat{\phi}(0, 0) | 0 \rangle = \frac{1}{\bar{\xi}^{2h} \xi^{2\bar{h}}}$$

Quindi $\langle \phi_{out} | \phi_{in} \rangle$ è ben definito. Il fatto che anche le coordinate siano colpite dall'operazione di coniugazione hermitiana si può intuitivamente giustificare con il fatto che se t deve restare invariato, dato che $\tau = it$, dovremo avere $\tau \rightarrow -\tau$ e quindi $z \rightarrow (1/z)$

Ricaviamo adesso l'espressione dell'hermitiano coniugato dell'operatore $\hat{T}(z)$.

$$\hat{T}^\dagger(z) = \bar{z}^{-4} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{L}_n}{(1/\bar{z})^{n+2}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{L}_n}{\bar{z}^{2-n}}$$

D'altra parte calcolando direttamente l'hermitiano coniugato di $\hat{T}(z)$ sulla siperficie reale $z^* = \bar{z}$ abbiamo

$$\hat{T}^\dagger(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{L}_n^\dagger}{\bar{z}^{n+2}}$$

Confrontando le due espressioni sopra otteniamo

$$\hat{L}_n^\dagger = \hat{L}_{-n} \quad (142)$$

Richiediamo adesso che $\lim_{z \rightarrow 0} \hat{T}(z) | 0 \rangle$ sia ben definito, il che implica

$$\hat{L}_n | 0 \rangle = 0 \text{ se } n \geq -1 \quad (143)$$

$$\langle 0 | \hat{L}_m = 0 \text{ se } m \leq 1 \quad (144)$$

$$\langle 0 | \hat{T}(z) | 0 \rangle = 0 \quad (145)$$

Risultati analoghi valgono per gli operatori \hat{L}_n ottenuti dallo sviluppo di $\hat{T}(\bar{z})$. Nel seguito ometteremo la dipendenza dei campi dalla coordinata antiolomorfa, essendo facile

restaurarla quando necessario grazie al disaccoppiamento tra i gradi di libertà olomorfo ed antiolomorfo.

Calcoliamo adesso

$$\begin{aligned}\langle 0|\hat{T}(z)\hat{T}(w)|0\rangle &= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \frac{\langle 0|\hat{L}_n\hat{L}_m|0\rangle}{z^{n+2}w^{m+2}} = \sum_{\substack{m\leq -2 \\ n\geq 2}} \frac{\langle 0|\hat{L}_n\hat{L}_m|0\rangle}{z^{n+2}w^{m+2}} = \\ &= \sum_{\substack{m\geq 2 \\ n\geq 2}} \frac{\langle 0|\hat{L}_n\hat{L}_{-m}|0\rangle}{z^{n+2}w^{-m+2}}\end{aligned}$$

Usiamo adesso il commutatore

$$\begin{aligned}\langle 0|\hat{T}(z)\hat{T}(w)|0\rangle &= \sum_{\substack{m\geq 2 \\ n\geq 2}} \frac{\langle 0|\hat{L}_{-m}\hat{L}_n|0\rangle}{z^{n+2}w^{-m+2}} + \\ &+ \sum_{\substack{m\geq 2 \\ n\geq 2}} \frac{1}{z^{n+2}w^{2-m}} \left[\frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n-m,0} + (n+m)\langle 0|\hat{L}_{n-m}|0\rangle \right]\end{aligned}$$

Grazie alle relazioni (143) e (144) la prima sommatoria e tutti i termini $\langle 0|\hat{L}_{n-m}|0\rangle$ sono nulli. Quindi

$$\begin{aligned}\langle 0|\hat{T}(z)\hat{T}(w)|0\rangle &= \sum_{\substack{m\geq 2 \\ n\geq 2}} \frac{1}{z^{n+2}w^{2-m}} \left[\frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n-m,0} \right] = \\ &= \frac{c}{12}n(n^2-1) \frac{1}{z^2w^2} \sum_{n\geq 2} \left(\frac{w}{z}\right)^n = \frac{c}{12}n(n^2-1) \frac{1}{z^4} \sum_{n\geq 2} \left(\frac{w}{z}\right)^{n-2}\end{aligned}$$

Ponendo $x = w/z$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\langle 0|\hat{T}(z)\hat{T}(w)|0\rangle &= \frac{c}{12} \frac{1}{z^4} \frac{d^3}{dx^3} \sum_{n\geq -1} x^{n+1} = \frac{c}{12} \frac{1}{z^4} \frac{d^3}{dx^3} \sum_{m\geq 0} x^m = \\ &= \frac{c}{12} \frac{1}{z^4} \frac{d^3}{dx^3} \frac{1}{1-x} = \frac{c}{2} \frac{1}{z^4} \frac{1}{(1-\frac{w}{z})^4} = \\ &= \frac{c}{2(z-w)^4}\end{aligned}$$

Che è proprio la funzione di correlazione $\langle TT \rangle$, a ulteriore dimostrazione di come il formalismo hamiltoniano e quello funzionale siano equivalenti.

19 Rappresentazioni dell'algebra di Virasoro

Vogliamo adesso studiare la teoria delle rappresentazioni dell'algebra di Virasoro. Notiamo per prima cosa che \hat{L}_0 (tecnicamente $\hat{L}_0 + \hat{\bar{L}}_0$) è il generatore delle dilatazioni $z \rightarrow \lambda z$, che nella quantizzazione radiale altro non sono che le traslazioni temporali $\tau = \log |z| \rightarrow \tau + \delta\tau$, Quindi \hat{L}_0 è proporzionale all'hamiltoniana. Notiamo poi che $\hat{L}_0|0\rangle = 0$. Dall'algebra di Virasoro discende che

$$[\hat{L}_0, \hat{L}_{-k}] = k\hat{L}_{-k} \quad (146)$$

Quindi lo stato $\hat{L}_{-k}|0\rangle$ è autostato dell'hamiltoniana. In generale, lo stato

$$|\{n_i\}, 0\rangle = \hat{L}_{-n_k}\hat{L}_{-n_{k-1}}\cdots\hat{L}_{-n_1}|0\rangle \quad (147)$$

con $(2 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k)$ è un autostato dell'hamiltoniana.

Sia adesso $\phi_h(z)$ un campo primario di dimensione conforme h e introduciamo lo stato

$$|h\rangle = \lim_{z \rightarrow 0} \hat{\phi}_h(z)|0\rangle \quad (148)$$

Calcoliamo adesso (usando la *OPE*)

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \hat{T}(z)|h\rangle &= \lim_{z \rightarrow 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{L}_n}{z^{n+2}}|h\rangle = \lim_{\substack{z \rightarrow z' \\ z' \rightarrow 0}} \hat{T}(z)\hat{\phi}_h(z')|0\rangle = \\ &= \lim_{\substack{z \rightarrow z' \\ z' \rightarrow 0}} \left\{ \left[\frac{h}{(z-z')^2} + \frac{1}{z-z'}\partial_{z'} \right] \hat{\phi}_h(z') + \text{regular part} \right\} |0\rangle = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{h}{z^2}|h\rangle + \frac{1}{z}(\partial_{z'}\hat{\phi}_h|_{z'=0})|0\rangle + \text{regular part} \right] \end{aligned}$$

Quindi

$$\hat{L}_0|h\rangle = h|h\rangle \quad (149)$$

$$\hat{L}_{-1}|h\rangle = (\partial_z\hat{\phi}_h(z)|_{z=0})|0\rangle \quad (150)$$

$$\hat{L}_n|h\rangle = 0 \quad n \geq 1 \quad (151)$$

Quindi lo stato $|h\rangle$ è un autostato dell'hamiltoniana e a partire da esso possiamo costruire gli stati eccitati applicando gli operatori \hat{L}_{-k} :

$$\hat{L}_{-n_k} \hat{L}_{-n_{k-1}} \cdots \hat{L}_{-n_1} |h\rangle \quad (152)$$

dove, per convenzione, $1 \leq n_1 \leq \cdots \leq n_k$. Se gli n_i fossero ordinati in altro modo si potrebbe comunque scrivere lo stato come combinazione lineare di stati ordinati nel modo convenzionale usando le regole di commutazione. Gli stati (152) sono detti *discendenti* di $|h\rangle$. Un discendente di $|h\rangle$ è autostato di \hat{L}_0 con autovalore

$$h' = h + \sum_{i=1}^k n_i = h + N$$

L'intero positivo N è detto *livello del discendente*. Il numero dei discendenti di $|h\rangle$ distinti e linearmente indipendenti al livello N è il numero $p(N)$ delle partizioni di N , ossia il numero dei diversi modi possibili per scrivere N come somma di interi positivi (due diverse scritture che differiscono solo per l'ordine degli addendi sono considerate la stessa partizione). Si può dimostrare che la funzione generatrice dei numeri $p(N)$ è

$$P(q) = \sum_{N=0}^{\infty} p(N) q^N = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)}$$

L'importanza dei discendenti deriva dalle loro proprietà conformi. L'effetto di una trasformazione conforme su uno stato si ottiene facendo agire su di esso una opportuna funzione dei generatori dell'algebra di Virasoro e il sottospazio dello spazio di Hilbert generato dallo stato $|h\rangle$ e dai suoi discendenti è chiuso rispetto all'azione dei generatori \hat{L}_n . Tale sottospazio, detto *modulo di Verma*, ci permette di costruire una rappresentazione dell'algebra di Virasoro. Una teoria il cui spazio di Hilbert è formato da un numero *finito* di rappresentazioni (i.e. moduli di Verma) dell'algebra di Virasoro è detta *modello minimale*.

Ci aspettiamo che gli autostati dell'hamiltoniana siano suddivisi tra le rappresentazioni dell'algebra di Virasoro come gli autostati dell'hamiltoniana di un sistema invariante per traslazioni sono suddivisi fra le rappresentazioni dell'algebra $su(2)$. Usando il modulo di Verma per costruire al nostra rappresentazione abbiamo che l'operatore \hat{L}_0 è diagonale. Lo stato

$|h\rangle$ è detto *highest weight state* e ricordiamo che

$$\begin{aligned}\hat{L}_0|h\rangle &= h|h\rangle \\ \hat{L}_n|h\rangle &= 0 \quad n > 0 \\ \hat{L}_n^\dagger &= \hat{L}_{-n} \\ \langle h|\hat{L}_n &= 0 \quad n < 0\end{aligned}$$

In particolare, da queste relazioni segue che \hat{L}_0 è hermitiano e che quindi h è reale. Il prodotto scalare tra gli stati di base

$$\hat{L}_{-n_k}\hat{L}_{-n_{k-1}}\cdots\hat{L}_{-n_1}|h\rangle$$

e

$$\hat{L}_{-m_l}\hat{L}_{-m_{l-1}}\cdots\hat{L}_{-m_1}|h\rangle$$

sarà

$$\langle h|\hat{L}_{n_1}\hat{L}_{n_2}\cdots\hat{L}_{n_k}\hat{L}_{-m_l}\hat{L}_{-m_{l-1}}\cdots\hat{L}_{-m_1}|h\rangle \quad (153)$$

Tale prodotto scalare può essere calcolato usando le regole di commutazione fino a portare tutti gli operatori \hat{L}_{n_i} a destra degli operatori \hat{L}_{-m_j} . Il prodotto scalare tra stati appartenenti a due livelli differenti è nullo, in accordo con il fatto che gli autospazi di un operatore hermitiano associati ad autovalori distinti sono fra loro ortogonali. Adesso sorgono però alcuni problemi.

19.1 *Null state* e rappresentazioni riducibili

Chiameremo *null state* uno stato $|\chi\rangle$ diverso da $|h\rangle$ per cui

$$\hat{L}_n|\chi\rangle = 0 \quad n > 0$$

Tale stato è ortogonale a tutti gli altri stati del modulo di Verma, perché

$$\langle \chi|\hat{L}_{-n_k}\hat{L}_{-n_{k-1}}\cdots\hat{L}_{-n_1}|h\rangle = \langle h|\hat{L}_{n_1}\hat{L}_{n_2}\cdots\hat{L}_{n_k}|\chi\rangle^* = 0$$

Quindi $\langle \chi | \chi \rangle = 0$. Queste osservazioni sono valide anche per i discendenti di $|\chi\rangle$. Per dimostrarlo consideriamo un discendente

$$|\psi\rangle = \hat{L}_{-m_l} \hat{L}_{-m_{l-1}} \cdots \hat{L}_{-m_1} |\chi\rangle$$

di $|\chi\rangle$ che sia al livello N rispetto allo stato $|h\rangle$. Sappiamo già che lo stato $|\psi\rangle$ è ortogonale a tutti gli stati degli altri livelli, quindi resta da analizzare solo il caso del prodotto scalare tra $|\psi\rangle$ e uno stato dello stesso livello:

$$\langle h | \hat{L}_{n_1} \hat{L}_{n_2} \cdots \hat{L}_{n_k} \hat{L}_{-m_l} \hat{L}_{-m_{l-1}} \cdots \hat{L}_{-m_1} |\chi\rangle$$

dove, essendo M il livello dello stato $|\chi\rangle$,

$$\sum_{i=1}^k n_i = N = M + \sum_{j=1}^l m_j$$

Dato che $\sum_i n_i > \sum_j m_j$, commutando gli operatori fino a portare tutti gli \hat{L}_{n_i} a destra degli \hat{L}_{-m_j} , troveremo una somma di termini in cui gli \hat{L}_{n_i} agiscono su $|\chi\rangle$ e quindi il prodotto scalare è nullo. Ne segue anche che $\langle \psi | \psi \rangle = 0$. Il sottospazio generato a partire da $|\chi\rangle$ e dai suoi discendenti è invariante sotto trasformazioni conformi e quindi la rappresentazione dell'algebra di Virasoro è *riducibile*. Si può però ottenere una rappresentazione *irriducibile* quozientando il modulo di Verma rispetto alla relazione di equivalenza che identifica due stati che differiscono per uno stato a norma nulla.

19.2 Unitarietà

Un problema di più difficile soluzione è quello della possibile presenza, a seconda dei valori di c e h , di stati a norma negativa, che portano ad una *rappresentazione non unitaria*. La richiesta che tali stati non esistano porta ad un vincolo tutt'altro che banale sui possibili valori della costante c , come vedremo fra poco. Supponiamo adesso che

$$\langle h | h \rangle = 1$$

e cominciamo a porre dei vincoli su h e c . Dall'algebra di Virasoro segue che

$$\langle h | \hat{L}_n \hat{L}_{-n} | h \rangle = \langle h | \left[\hat{L}_{-n} \hat{L}_n + \frac{c}{12} n(n^2 - 1) + 2n \hat{L}_0 \right] | h \rangle =$$

$$= \frac{c}{12}n(n^2 - 1) + 2nh \quad (154)$$

Se $c < 0$ al crescere di n prima o poi la norma di $\hat{L}_{-n}|h\rangle$ diventerà negativa, quindi per avere l'unitarietà della rappresentazione serve $c \geq 0$. In particolare, se $n = 1$, otteniamo

$$\langle h|\hat{L}_1\hat{L}_{-1}|h\rangle = 2h$$

Quindi un altro vincolo è $h > 0$ (escludiamo anche $h = 0$ per non avere uno stato a norma nulla). In generale le condizioni necessarie e sufficienti affinché la rappresentazione sia unitaria si ottengono dallo studio della *matrice di Gram*, i cui elementi sono i prodotti scalari tra i vettori di base.

$$M_{nm} = \langle i|j\rangle \text{ con } |\psi_n\rangle, |\psi_m\rangle \text{ vettori di base} \quad (155)$$

Ricordiamo che i nostri vettori di base sono gli stati

$$\hat{L}_{-n_k}\hat{L}_{-n_{k-1}}\cdots\hat{L}_{-n_1}|h\rangle$$

Dato che il prodotto scalare tra stati appartenenti a livelli diversi è nullo, la matrice di Gram sarà diagonale a blocchi, con i blocchi $M^{(N)}$ corrispondenti ai diversi livelli. I primi blocchi sono proprio

$$M^{(0)} = \langle h|h\rangle = 1$$

$$M^{(1)} = \langle h|\hat{L}_1\hat{L}_{-1}|h\rangle = 2h$$

Il blocco successivo è

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} \langle h|\hat{L}_1\hat{L}_1\hat{L}_{-1}\hat{L}_{-1}|h\rangle & \langle h|\hat{L}_1\hat{L}_1\hat{L}_{-2}|h\rangle \\ \langle h|\hat{L}_2\hat{L}_{-1}\hat{L}_{-1}|h\rangle & \langle h|\hat{L}_2\hat{L}_{-2}|h\rangle \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8h^2 + 4h & 6h \\ 6h & \frac{c}{2} + 4h \end{pmatrix} \quad (156)$$

Se $M^{(2)}$ dovesse avere un autovalore nullo o negativo vorrebbe dire rispettivamente che al livello 2 abbiamo un *null state* o uno stato a norma negativa. La somma degli autovalori di $M^{(2)}$ è

$$Tr M^{(2)} = 8h^2 + 8h + \frac{c}{2}$$

che è sempre positiva se $h > 0$ e $c \geq 0$. Di conseguenza o entrambi gli autovalori sono positivi, o lo è almeno uno dei due. Il prodotto dei due autovalori è

$$\begin{aligned} \det M^{(2)} &= 32h^3 - 20h^2 + 4ch^2 + 2hc = \\ &= 32h(h - h_+)(h - h_-) \end{aligned} \quad (157)$$

Dove

$$h_+ = \frac{5 - c + \sqrt{(1 - c)(25 - c)}}{16} \quad (158)$$

$$h_- = \frac{5 - c - \sqrt{(1 - c)(25 - c)}}{16} \quad (159)$$

Lungo le due curve $h_+(c)$ e $h_-(c)$ il determinante si annulla e quindi abbiamo dei *null state*. Inoltre esse delimitano una regione del primo quadrante del piano (c, h) all'interno della quale il determinante è negativo e quindi si hanno stati a norma negativa. Quindi, per avere una rappresentazione irriducibile unitaria, vanno esclusi tutti i punti (c, h) che stanno sulle curve o nelle regione fra esse compresa.

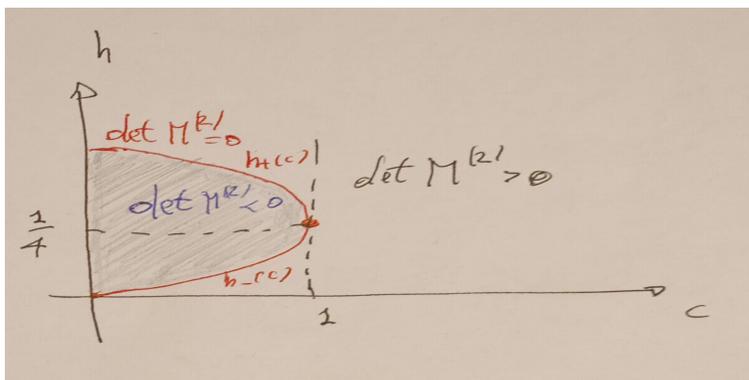


Figura 22: Andamento di $\det M^{(2)}$ nel primo quadrante del piano (c, h) . I punti appartenenti alla regione in cui $\det M^{(2)} \leq 0$ vanno esclusi se si vuole avere una rappresentazione irriducibile unitaria.

Questo ragionamento va poi fatto livello per livello e Kac è riuscito a trovare una formula generale per $\det M^{(N)}$:

$$\det M^{(N)} = \alpha_N \prod_{\substack{r,s \geq 1 \\ rs \leq N}} (h - h_{rs}(c))^{p(N-rs)} \quad (160)$$

dove α_N è una costante indipendente da c ed h e $p(N - rs)$ è il numero di partizioni di $N - rs$ (con $p(0) = 1$). Dalla formula di Kac si ricava che se $c > 1$ e $h > 0$ tutte le rappresentazioni sono irriducibili e unitarie. Se invece $0 < c < 1$ le cose sono molto diverse. In particolare, i modelli minimali (i.e. il cui spettro è formato da un numero finito di rappresentazioni irriducibili dell'algebra di Virasoro) corrispondono ai seguenti possibili valori di c :

$$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)} \quad m = 3, 4, 5, \dots \quad (161)$$

Fissata c , h può assumere solo i seguenti valori:

$$h = h_{rs}(m) = \frac{[(m+1)r - ms]^2 - 1}{4m(m+1)} \quad (162)$$

Con

$$1 \leq r \leq m - 1$$

$$1 \leq s \leq m$$

L'insieme dei valori $h_{rs}(m)$ forma la *Kac table*. Nella Tabella 2 riportiamo la Kac table per $m = 3$, cui corrisponde $c = \frac{1}{2}$.

$r \setminus s$	1	2	3
1	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	0

Tabella 2: Kac table per $m = 3$, $c = \frac{1}{2}$

Il caso $c = \frac{1}{2}$ è molto interessante e corrisponde ad un campo fermionico libero a massa nulla di Majorana descritto dall'azione

$$S = \int \frac{d^2z}{2\pi} \psi \partial_{\bar{z}} \psi + \bar{\psi} \partial_z \bar{\psi} \quad (163)$$

Le equazioni del moto sono

$$\partial_{\bar{z}}\psi = 0 \Rightarrow \psi = \psi(z)$$

$$\partial_z\bar{\psi} = 0 \Rightarrow \bar{\psi} = \bar{\psi}(\bar{z})$$

La componente olomorfa del tensore energia-impulso è

$$T(z) = -\frac{1}{2} : \psi(z)\partial_z\psi(z) :$$

Abbiamo poi le seguenti funzioni di correlazione:

$$\langle \psi(z)\psi(z') \rangle = \frac{1}{z - z'}$$

$$\langle \bar{\psi}(\bar{z})\bar{\psi}(\bar{z}') \rangle = \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}'}$$

$$\langle T(z)T(z') \rangle = \frac{1}{4(z - z')^{\frac{1}{4}}}$$

Quindi i campi ψ e $\bar{\psi}$ hanno dimensioni conformi rispettivamente $(h, \bar{h}) = (\frac{1}{2}, 0)$ e $(h, \bar{h}) = (0, \frac{1}{2})$. Si può far vedere che il fermione descritto da ψ e $\bar{\psi}$ è legato da una *trasformazione di Jordan-Wigner* (una trasformazione non locale) al campo σ che descrive il modello d Ising nel limite del continuo (σ è la versione continua di σ_i). Il campo σ ha dimensioni conformi $(h, \bar{h}) = (\frac{1}{16}, \frac{1}{16})$ e quindi il suo correlatore è

$$\langle \sigma(z, \bar{z})\sigma(z', \bar{z}') \rangle = \frac{1}{|z - z'|^{\frac{1}{4}}} \quad (164)$$

Da quest'ultima relazione ricaviamo che $\eta = \frac{1}{4}$ per il modello di Ising in 2d, in accordo con il risultato trovato da Onsager. La teoria fermionica a massa nulla è equivalente al modello di Ising alla transizione. In generale, vicino la transizione il modello di Ising è equivalente alla teoria fermionica descritta dall'azione

$$S = \int \frac{d^2z}{2\pi} \psi\partial_{\bar{z}}\psi + \bar{\psi}\partial_z\bar{\psi} + m\bar{\psi}\psi \quad (165)$$

con $m \rightarrow 0$ quando $T \rightarrow T_c$. Il termine $\bar{\psi}\psi$, con dimensioni conformi $(h, \bar{h}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ può essere identificato con la densità di energia ϵ del modello di Ising (la versione continua $\sigma_i\sigma_{i+1}$). Quindi

$$\langle \epsilon(z, \bar{z})\epsilon(z', \bar{z}') \rangle \propto \frac{1}{|z - z'|^2} \quad (166)$$

Da quest'ultimo risultato si può ricavare che per il modello di Ising in 2d $\nu = 1$, anche stavolta in accordo con la soluzione esatta. Noti due esponenti critici è possibile ricavare tutti gli altri e la classe di universalità del modello di Ising 2d è quindi determinata.

20 Determinazione delle funzioni di correlazione

Dalla teoria delle rappresentazioni siamo arrivati alla conclusione che una teoria unitaria, cioè con $0 < c \leq 1$ esiste solamente se i valori del prodotto scalari tra gli stati è definito positivo, ovvero se $\langle \Psi \Psi \rangle > 0$. Questo è possibile solo per un set discreto di valori di c

$$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)} \quad m = 3, 4, \dots \quad (167)$$

e per ognuno di questi valori, solo per un set di dimensione h_{rs}

$$h_{rs}(m) = \frac{[(m+1)r - ms]^2 - 1}{4m(m+1)} \quad \begin{cases} 1 \leq r \leq m-1 \\ 1 \leq s \leq m \end{cases} \quad (168)$$

In particolare il valore minimo $c = \frac{1}{2}$ si ottiene per $m = 3$ (modello di Ising) e avevamo trovato la tabella di Kac in figura 23

Il campo $\sigma = \Phi_{h\bar{h}}$ viene identificato con

$$\langle \sigma \sigma \rangle = \frac{1}{|z - z'|^{\frac{1}{4}}} \quad (h, \bar{h}) = \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{16} \right) \quad (169)$$

mentre il campo ε viene identificato con

$$\langle \varepsilon \varepsilon \rangle = \frac{1}{|z - z'|^2} \quad (h, \bar{h}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad (170)$$

Gli stati composti sono espressi in termini di I, σ, ε , dove I è l'identità, mentre le regole di associatività delle eccitazioni che diventano regole di selezione delle OPE chiamate Fusion rules (OPE selection rules = Fusion rules) sono:

$$\begin{cases} \varphi I = I \\ \psi \psi = I \\ \varepsilon \varepsilon = I \\ \sigma \sigma = I + \varepsilon \\ \sigma \varepsilon = \sigma \end{cases} \quad (\varepsilon = \bar{\psi} \psi) \quad (171)$$

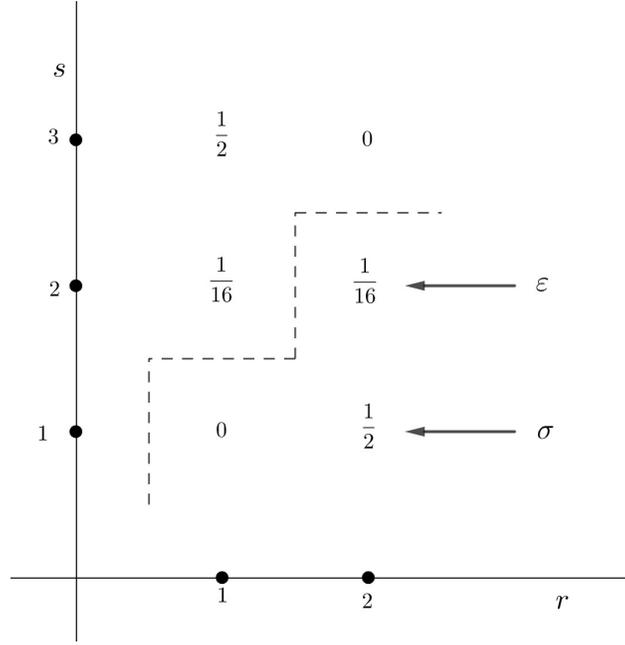


Figura 23: Tabella di kac con $m = 3$

Adesso vogliamo determinare le funzioni di correlazione. L'invarianza conforme regolare, ovvero quella che lascia invariato il vuoto, permette di determinare le funzioni ad un punto e le funzioni a due punti. Le funzioni da 4 punti in poi non sono completamente determinate dall'invarianza conforme. Questo perché

$$\langle \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4 \rangle = (\text{Known Factors}) F(\eta, \bar{\eta}) \quad \text{dove} \quad \eta = \frac{z_{12} z_{34}}{z_{13} z_{24}} \quad (172)$$

ed η è invariante sotto trasformazioni conformi regolari. Questo significa che

$$(\varepsilon_0 L_0 + \varepsilon_{-1} L_{-1} + \varepsilon_1 L_1) \eta = 0 \quad (173)$$

La trasformazione appena scritta è una trasformazione infinitesima. Si può verificare che η è anche invariante sotto trasformazione di Moebius, $z' = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad - bc = 1$, che sono la versione finita delle trasformazioni conformi regolari. Sostituendo è facile vedere che $\eta(z_i) = \eta(z'_i) \forall i$. Dunque $F(\eta, \bar{\eta})$ non è completamente determinata dalla sola invarianza conforme regolare. Si utilizza quindi una strategia che sfrutta il fatto che i campi hanno dei

valori per cui il determinante si annulla e hanno quindi degli stati nulli ad un certo livello (ad esempio il primo stato nullo è al livello $n = r s$). I vettori nulli sono ortogonali a tutti gli stati e in particolare ricordando che

$$h_{\pm} = \begin{cases} h_{12} \\ h_{21} \end{cases} \quad |\chi_{\pm}\rangle = \left(L_{-2} + \frac{3}{2(2h_{\pm} + 1)} L_{-1}^2 \right) |h_{\pm}\rangle \quad (174)$$

accade che il correlatore di χ_{\pm} con altri tre campi è identicamente nullo: $\langle \chi_{\pm} \Phi \Phi \Phi \rangle = 0$. D'altra parte $|\chi_{\pm}\rangle$ è un discendente che può essere ottenuto dalla identità di Ward. Si ha:

$$0 = \langle \chi_{\pm} \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \rangle \simeq \int \langle T \Phi_{\pm} \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \rangle + \int \int \langle T T \Phi_{\pm} \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \rangle \quad (175)$$

In generale questo si può scrivere come

$$\langle \chi_{\pm} \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \rangle = (Op. diff) \langle \Phi_{\pm} \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \rangle = 0 \quad (176)$$

dove l'operatore differenziale che agisce sul campo è di secondo ordine per via della presenza di L_1^2 in $|\chi_{\pm}\rangle$ ed è noto. Posso scegliere $\Phi_{\pm} = \Phi = \sigma$ e in questo modo si ottiene un'equazione differenziale per le funzioni a 4 punti di σ . Questa risulta essere un'equazione differenziale ipergeometrica che essendo di secondo ordine ha due soluzioni. Grazie alla simmetria di Moebius, 3 dei punti z_1, z_2, z_3, z_4 possono essere scelti a piacere mediante un'opportuna trasformazione di Moebius. Convenzionalmente dunque si scelgono

$$z_1 = 0 \quad z_3 = 1 \quad z_4 = \infty$$

da cui segue che

$$\eta = \frac{z_{12} z_{34}}{z_{13} z_{24}} = \frac{-z_2}{-1} = z_2 \quad (177)$$

dove z_2 è dunque l'unica variabile non banale. Quindi si ha

$$\langle \sigma(\infty) \sigma(1) \sigma(\eta) \sigma(0) \rangle = \frac{1}{|\eta(1-\eta)|^{\frac{1}{4}}} (a F_I(\eta) + b F_{\varepsilon}(\eta)) (a' \bar{F}_I(\eta') + b' \bar{F}_{\varepsilon}(\eta')) \quad (178)$$

dove F_1 e F_{ε} sono le due soluzioni dell'equazione ipergeometrica che vengono anche chiamati conformal blocks. Queste sono funzioni analitiche e in genere polidrome. Combinando la parte chirale con la parte antichirale si ottiene una funzione monodroma (tale dev'essere il

propagatore o il correlatore in meccanica statistica). In questo caso le soluzioni dell'equazione ipergeometrica sono molto semplici e hanno la seguente forma esplicita:

$$F_I(\eta) = \sqrt{1 + \sqrt{1 - \eta}} \simeq 1 \quad (179)$$

$$F_\varepsilon(\eta) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - \eta}} \simeq \eta^{\frac{1}{2}} \quad (180)$$

quando $\eta \rightarrow 0$. Queste sono le dimensioni dei campi corrispondenti. A questo punto si devono fissare i coefficienti a, b, a', b' in modo tale che non ci siano tagli o singolarità. Solitamente la funzione ipergeometrica ha singolarità in 0 e in 1 ed è tagliata da $-\infty$ a 0 e da 1 a $+\infty$ (come in figura 24).

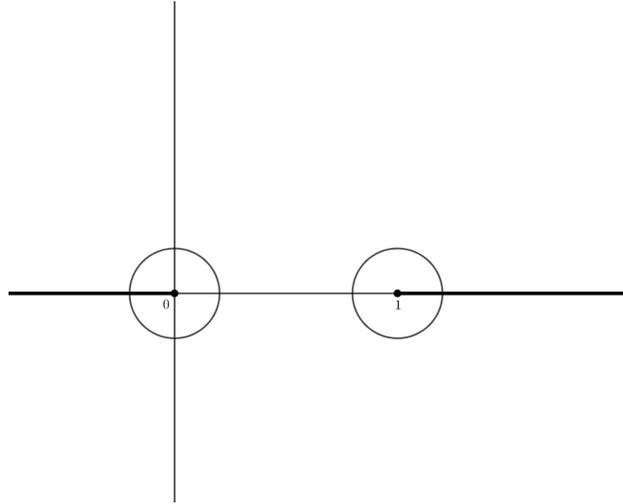


Figura 24: Funzione ipergeometrica

Dobbiamo fare una combinazione lineare delle funzioni F e dei moduli quadri in modo da far scomparire i tagli. Ad esempio per eliminare il taglio di $\sqrt{\eta}$, basta moltiplicare per $\sqrt{\eta}$:

$$\sqrt{\eta}\sqrt{\eta} = |\eta|$$

Così non si hanno tagli. Alla fine la soluzione che si ottiene è

$$\langle \sigma \sigma \sigma \sigma \rangle = \frac{1}{|\eta(1 - \eta)|^{\frac{1}{4}}} |F_I(\eta) + F_\varepsilon(\eta)|^2$$

che non ha tagli. Ha però dei poli quando $\eta \rightarrow 0, 1, \infty$. Sviluppando nel limite di $\eta \rightarrow 0$ risulta

$$\sigma(\eta)\sigma(0) \simeq \frac{1}{|\eta|^{\frac{1}{4}}}(1 + \dots) + (C_{\sigma\sigma}^\varepsilon)^2 |\eta|^{\frac{3}{4}}(\varepsilon(0) + \dots) \quad (\eta \rightarrow 0) \quad (181)$$

dove

$$\frac{1}{|\eta|^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{|\eta|^{4h_\sigma}} \iff h_\sigma = \bar{h}_\sigma = \frac{1}{16} \quad (182)$$

$$\frac{1}{|\eta|^{4h_\sigma - 2h_\varepsilon}} = |\eta|^{\frac{3}{4}} \iff 4h_\sigma - 2h_\varepsilon = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} \quad (183)$$

Dalla normalizzazione si ricava che il coefficiente

$$(C_{\sigma\sigma}^\varepsilon)^2 = \frac{1}{2} \quad (184)$$

che è la costante di struttura. Le due soluzioni indipendenti corrispondono ai due canali che vengono fuori dal prodotto degli operatori $\sigma\sigma = I + \varepsilon$. E' interessante notare che la funzione ipergeometrica ha delle proprietà di monodromia non banali: la monodromia è bidimensionale. Abbiamo trovato due punti singolari 0, 1 per $\eta \rightarrow 0$. Allora

$$\begin{pmatrix} F_I \\ F_\varepsilon \end{pmatrix} (\eta e^{2\pi i}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_I \\ F_\varepsilon \end{pmatrix} \quad (185)$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_\varepsilon \end{pmatrix} (1 - \eta) e^{2\pi i} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_\varepsilon \end{pmatrix} \quad (186)$$

dove la matrice che viene fuori nel secondo caso è anch'essa una matrice 2×2 e in particolare è una matrice unitaria $U \in U(2)$. In altre parole, la continuazione analitica di $F(\eta)$ in $F(1 - \eta)$ è una combinazione lineare delle due soluzioni dell'equazione differenziale. Per questo la monodromia è bidimensionale. Dunque OPE, che determina il numero di canali negli stati intermedi ovvero il numero di soluzioni, è anche uguale alla dimensione della matrice di monodromia U e all'ordine dell'equazione differenziale. Per quanto riguarda la soluzione, si deve imporre la non monodromia che corrisponde alla condizione di realtà. Alla fine bisogna considerare che \bar{z} non è una variabile indipendente, ma è il coniugato di z . In meccanica statistica il correlatore $\langle \sigma\sigma\sigma\sigma \rangle$ è una funzione reale che può avere delle singolarità

ma non tagli. Esistono anche delle applicazioni fisiche come ad esempio la **CFT chirale** che è caratterizzata dai seguenti valori di c e \bar{c} :

$$(c, \bar{c}) = \left(\frac{1}{2}, 0 \right) \quad (187)$$

Queste fasi hanno significato fisico, sono delle correlazioni che non dipendono dalla distanza. Nel caso in cui $\Psi\Psi = I$ c'è un solo canale, il correlatore è

$$\langle \Psi_1 \Psi_2 \rangle = \frac{1}{z_1 - z_2} \quad (188)$$

e quando si fa la trasformazione

$$(z_1 - z_2) \rightarrow e^{i\pi}(z_1 - z_2) \quad (189)$$

che corrisponde a scambiare due fermioni, si ottiene $-\langle \Psi_1 \Psi_2 \rangle$. Il segno meno è proprio il segno della statistica fermionica, ovvero come negli operatori fermionici lo scambio fornisce un segno meno. Nel caso delle CFT chirali i campi hanno dimensioni h e \bar{h} che possono essere diversi da $1/2$. Si potrebbe avere

$$(h, \bar{h}) = \left(\frac{1}{2}, 0 \right) \quad (190)$$

oppure il caso in cui h è un numero razionale diverso da $1/2$ come ad esempio

$$(h, \bar{h}) = \left(\frac{1}{3}, 0 \right) \quad (191)$$

In questo caso si ottiene

$$\langle \Phi \Phi \rangle = \frac{1}{(z_1 - z_2)^{\frac{2}{3}}} \quad (192)$$

e la trasformazione di scambio produce una fase pari a $e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Questa fase porta alla **statistica anyonica**. Questa è una statistica quantistica diversa sia da quella dei bosoni sia da quella dei fermioni (da qui il nome any-onica). Anche in questo caso però si ha che $\Phi\Phi$ produce un solo canale, ad esempio $\Phi\Phi = \Phi'$. Se invece $\sigma\sigma = I + \varepsilon$, anziché avere una fase, si ottiene

una matrice unitaria 2×2 e la funzione di correlazione ha due componenti, una sorta di sdoppiamento dell'eccitazione. In particolare:

$$\langle \sigma \sigma \sigma \sigma \rangle = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow U \begin{pmatrix} F_1 \\ F_\varepsilon \end{pmatrix} \quad U \in U(2) \quad (193)$$

Questa si chiama **statistica non abeliana**. Dunque i campi conformi quando si ha solo z e non \bar{z} producono una generalizzazione della statistica fermionica, ovvero una statistica anyonica abeliana (le fasi commutano) e una statistica non abeliana (le matrici di $U(2)$ non commutano).

Soffermiamoci su altri casi. Per $m = 4$ risulta $c = \frac{7}{10}$ e la rispettiva tabella di kac è riportata in figura 25.

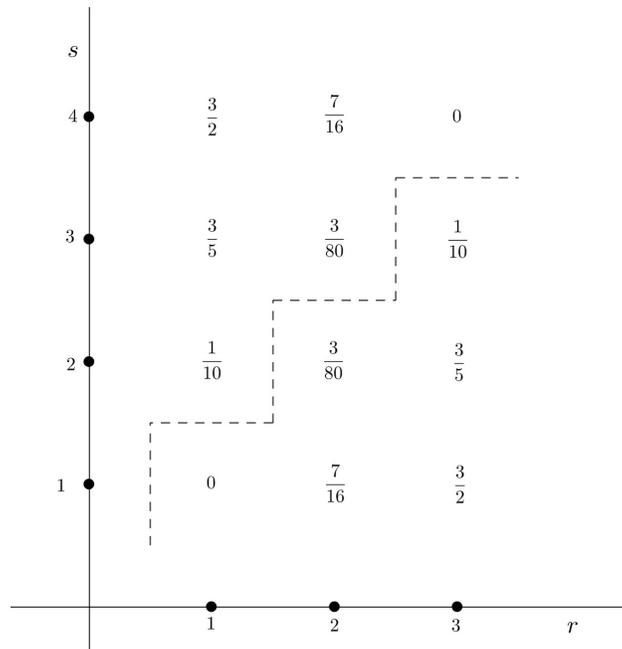


Figura 25: Tabella di Kac con $m=4$

Questo viene identificato come **modello di Ising Tricritico** che è una teoria sempre con simmetria \mathbf{Z}_2 con un punto tricritico. Nella teoria di Landau-Ginzburg il potenziale assume la seguente forma:

$$\Gamma = a(t)M^2 + b(t)M^4 + M^6 \quad (194)$$

A seconda dei parametri cambia il potenziale ma rispetto al caso critico $a(t)$ e $b(t)$ possono annullarsi. Il punto in cui $a(t) = b(t) = 0$ è il punto tricritico.

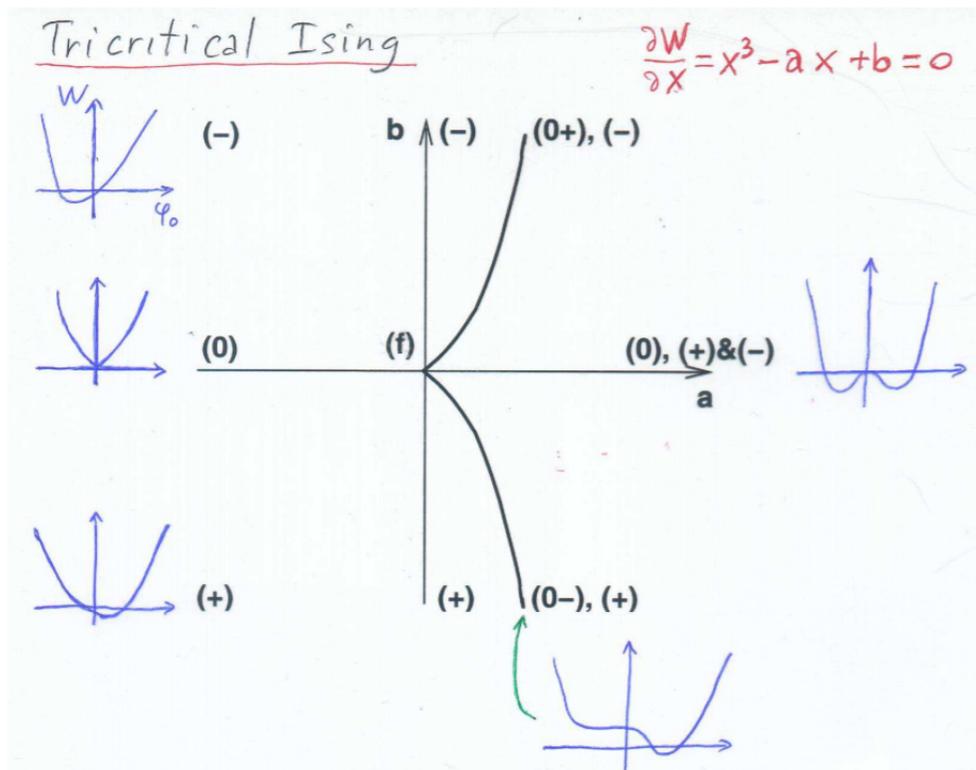


Figura 26: Tricritical Ising model

In termini di spin l'Hamiltoniana è

$$H = -\beta \sum_{\langle ij \rangle} t_i t_j \sigma_i \sigma_j + \mu \sum t_i \quad \begin{cases} \sigma_i = \pm 1 & \text{spin} \\ t_i = 0, 1 & \text{lacune} \end{cases} \quad (195)$$

μ è il potenziale chimico dovuto alla presenza delle vacanze e più μ cresce, più il valor medio di t tende a 0 e più ci si allontana dal modello di Ising. Questo modello descrive come il gas viene assorbito da una superficie e questo sistema si realizza con gli stati di Krypton. La cosa davvero sorprendente, è che questa è una teoria supersimmetrica. È l'esempio più semplice di una SUSY CFT con $n = 1$. Tutto quello detto riguardo alle teorie conformi

si può estendere al caso delle teorie supersimmetriche. Una teoria non supersimmetrica potrebbe avere ad esempio un valore massimo di c pari a $c = 1$ (un bosone libero). La teoria supersimmetrica deve considerare un bosone più un fermione di Majorana e per questo risulta un valore massimo di c uguale a $c = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. I modelli minimali esistono anche nel caso supersimmetrico e per questi si ha

$$c = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{8}{m(m+2)} \right) \quad (196)$$

Al massimo si arriva come già detto a $c = \frac{3}{2}$ ovvero un bosone libero più un fermione di Majorana libero. Il primo valore $m = 3$ corrisponde a

$$c = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{8}{15} \right) = \frac{7}{10} \quad (197)$$

Dunque questo modello è un esempio di supersimmetria tra bosoni e fermioni, ma semplificata rispetto a quella in 4 dimensioni. Si chiama supersimmetria perché esiste un partner supersimmetrico del tensore energia-impulso che possiamo scrivere come somma tra il tensore fermionico e il tensore bosonico moltiplicato per

$$T(z) = T_F + \theta T_B(z) \quad (198)$$

dove T_F = tensore fermionico, T_B = tensore bosonico, e θ = parametro anticommutante. z ha dimensione 2 mentre θ ha dimensione $-\frac{1}{2}$ per cui il tensore energia-impulso avrà dimensione $h = \frac{3}{2}$.

Esiste un modo di associare i campi di Landau-Ginzburg ai campi della tabella. Quando si ha un punto critico, come nel diagramma di fase del modello di Ising, ci sono due flussi rilevanti che portano fuori dal punto critico. Infatti la variazione dell'azione si scrive come:

$$\delta S = h \int \sigma + (T - T_C) \int \varepsilon \quad (199)$$

Perturbo in due direzioni, ci sono dunque solo due campi indipendenti, mentre tutti gli altri sono determinati. In termini di Landau-Ginzburg invece

$$\delta S_{LG} = h \int \Phi + m \int \Phi^2 \quad (200)$$

Anche in questo caso ci sono solo due direzioni per uscire dal punto critico. La teoria di Landau-Ginzburg è quindi valida sia per capire quanti parametri si devono fissare per trovare il punto critico. In questo caso i parametri sono proprio h ed m .

I modelli minimali per $m > 4$ sono **multicritical extention** del modello di Ising. Sono i modelli che realizzano la simmetria \mathbf{Z}_2 , e realizzano dunque la teoria di Landau-Ginzburg con $\Phi^2 + \Phi^4 + \Phi^6 + \Phi^8 + \dots + \Phi^{2m-2}$, ovvero con tutti i termini invarianti per $\Phi \rightarrow -\Phi$.

20.1 Another solution of clousure of OPE

Un caso particolarmente interessante è $m = 5$. In questo caso si ha un'altra soluzione di chiusura delle OPE. Si prende un sottoinsieme dei campi possibili. In particolare si prendono i 4 campi della prima riga, nessun campo della seconda e i soli 2 campi della terza come in figura 27.

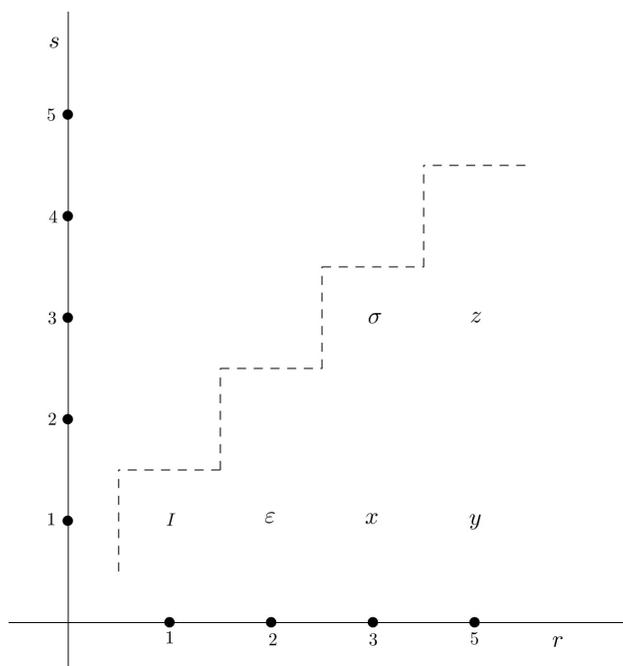


Figura 27: Tabella di kac con $m=5$

Questi 6 campi originano un'algebra chiusa e portano una simmetria complessa in \mathbf{Z}_3 . Questa simmetria viene dunque descritta da un campo complesso $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$ che viene mandato in $\omega\Phi$ dove

$$\omega^3 = 1 \implies \omega = 1, e^{\pm \frac{2\pi}{3}} \quad (201)$$

La lagrangiana di Landau-Ginzburg corrispondente è

$$S_{LG} = \int (\partial_\mu \Phi)^2 + \lambda(\Phi^3 + \Phi^{*3}) \quad (202)$$

Se prendo tutti i campi allora c'è solo una simmetria \mathbf{Z}_2 , invece prendendo questo sottinsieme c'è una simmetria \mathbf{Z}_3 (adesso c'è una fase e non solo un segno meno). Questo modello è noto e si chiama **modello Polts a 3 stati**. Anziché avere $\sigma_i = \pm 1$, adesso si ha $\sigma_i = 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. I modelli di questo tipo sono anche detti Clock models, e si parla di spin planari. L'Hamiltoniana del modello di Polts è:

$$H = -\beta \sum_{\langle ij \rangle} \delta_{\sigma_i \sigma_j} - h \sum \sigma_i \quad (203)$$

dove la δ è 1 quando gli spin sono allineati e 0 quando non lo sono. La CFT dà gli esponenti critici che sono in accordo con quelli ottenuti dalla soluzione esatta di Baxter.

Esistono anche delle estensioni del modello di Polts con più stati dei quali la CFT permette di ottenere le funzioni di correlazione. Tante situazioni fisiche diverse dal ferromagnetismo come i polimeri 2D, la percolazione o il self avoiding walk possono essere mappati sul modello di Polts.

A $m = 5$ corrispondono due classi di universalità, cioè due tipi di teorie critiche diverse con lo stesso valore di $c = \frac{4}{5}$. La classe di universalità viene caratterizzata quindi non solo dal valore di c e dalla dimensionalità dei campi ma anche dalle simmetrie come nel caso trattato. Come si fa allora a trovare tutte le classi di universalità associate a $c < 1$? Al variare di m si è trovato per $m = 3$ il modello di Ising, per $m = 4$ il modello di Ising tricritico e per $m > 4$ tutte le rispettive generalizzazioni. Si è infine visto che per $m = 5$ parte la nuova classe di universalità legata ai modelli di Polts (per $m > 5$ come per il modello di Ising ci sono le sue generalizzazioni). Il prof. Cappelli ha contribuito a trovare una classificazione completa di tutte le classi di universalità. In breve, alle due serie già citate che prendono il nome di serie

A e serie D, si aggiungono i 3 casi speciali chiamati E_6, E_7, E_8 . Si parla dunque di **A-D-E classification**.

Dalla teoria delle rappresentazioni sappiamo che

$$\Phi_{rs}\Phi_{r's'} = \sum \Phi_{r''s''} \quad (204)$$

dove tutti i valori di (r, s) sono nella tabella di Kac. Ciò non toglie che si debbano prendere tutti, si può prendere un sottogruppo. Si considerano delle condizioni a contorno periodiche (si costruisce quello che geometricamente è un toro) e in questo caso la funzione di partizione può essere calcolata esattamente. Risulta:

$$Z = \sum_{\text{rappresentazioni}(h, \bar{h})} N_{h\bar{h}} \chi_h(q) \bar{\chi}_{\bar{h}}(q) \quad h, \bar{h} \in h_{rs} \quad (205)$$

dove $N_{h\bar{h}}$ sono numeri interi positivi (in particolare sono delle molteplicità) mentre $\chi_h(q)$ e $\bar{\chi}_{\bar{h}}(q)$ sono i caratteri delle rappresentazioni ovvero i counting function. Quest'ultimi contano il numero di stati di una rappresentazione e sono pari alla funzione delle partizioni. La funzione generatrice delle partizione è

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)} \quad (206)$$

Nel semplice caso di una rappresentazione in cui tutti gli stati sono indipendenti risulta

$$\chi(q) = \frac{q^h}{\prod_k (1 - q^k)} \quad \text{dove } q = e^{-\beta\varepsilon} \quad \varepsilon = \text{energia minima} \quad (207)$$

Queste espressioni sono completamente note dalla teoria delle rappresentazioni anche nel caso più complicato in cui le rappresentazioni sono degeneri, si usano per calcolare Z e si legano alla OPE tramite la Verlinde Algebra o Verlinde fusion rule. Da questo segue che se si costruiscono tutte queste funzioni allora si costruiscono tutte le classi di universalità. Per ulteriori dettagli si veda Cappelli, itzykson, Zuber (1987). Il problema si riduce ad un semplice problema di aritmetica e si trovano le due serie di classi di universalità A e D e i tre casi eccezionali E . Questa caratterizzazione compare misteriosamente in tanti altri problemi di matematica e geometria:

- Classificazione delle Algebre di Lie e dei diagrammi di Dynkin
- Solidi platonici: questi sono dei solidi regolari che rimangono invarianti sotto alcune trasformazioni $U \in SO(3)$ discrete. Ad esempio la rotazione rispetto all'asse dei poligoni regolari di k lati dà luogo ad una simmetria Z_k . Questa è la serie A. I diedri che hanno una simmetria Z_k rispetto all'asse e una simmetria Z_2 (come la simmetria di riflessione che c'è in una moneta) costituiscono la serie D. Infine ci sono i solidi platonici non banali che sono: tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro e icosaedro. Sono 5 casi particolari che corrispondono a tre gruppi di simmetria, ovvero i tre casi E_6, E_7, E_8 . Per ulteriori dettagli si veda H.Weyl Symmetry.
- Singolarità di Arnold. Il problema di Arnold, legato alla teoria di Landau-Ginzburg, è il seguente: sia $y = f(x)$ una funzione non invertibile in un punto. Per esempio $f(x) = x^n$ non è invertibile in $x = 0$. Ci si chiede in quanti modi è possibile inserire termini del tipo x, x^2, \dots in modo da risolvere la singolarità modulo riparametrizzazioni. Il problema che ad una variabile si riconduce a quello di Landau-Ginzburg. Lo stesso per un numero arbitrario di variabili non è banale ed è stato risolto esattamente da Arnold imponendo delle condizioni in più. Tali soluzioni vengono dette simple singularities e sono in corrispondenza 1 a 1 con la classificazione A-D-E.

Il legame tra tutte questi problemi è sconosciuto, ma potrebbe derivare dal fatto che tutti questi si riconducono a problemi in cui sono coinvolti numeri interi piccoli. Ad esempio la soluzione dei solidi platonici si ottiene risolvendo la seguente disuguaglianza

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \geq 1 \quad n_1, n_2, n_3 > 0 \text{ interi} \quad (208)$$

Questa fornisce le due serie A_k e D_k di soluzioni e 3 casi particolari. La teoria conforme ha quindi tante applicazioni.

Abbiamo detto che per $c = 1$ la teoria conforme fornisce la teoria scalare (il campo è dunque bosonico). Ciò che invece l'analisi conforme non dà, sono alcune proprietà globali del campo. Ad esempio se il campo è compattificato allora deve rispettare la seguente relazione (come se fosse un angolo):

$$\Phi \sim \Phi + 2\pi R \quad (209)$$

Questo determina uno spettro discreto. Se si impone la simmetria \mathbf{Z}_2 , ovvero simmetria per riflessione si deve imporre $\Phi \sim -\Phi$ (si parla di punto orbifold).

Alla fine abbiamo due linee critiche di teorie, al variare di un parametro la teoria resta critica. c rimane sempre uguale a 1, ma lo spettro cambia.

Per $c > 1$ tutti i valori di h e \bar{h} vanno bene, CFT representations are irreducible and unitary. Per questo motivo non esistono modelli minimali e dal momento che non si possono scrivere equazioni differenziali per le funzioni di correlazione, la teoria conforme in questi casi è quasi inutile. Quello che si fa è aggiungere una simmetria di un gruppo e il campo Φ_h^i diventa una sorta di campo di gauge. Era già noto di poter definire modelli che hanno sia l'invarianza conforme, sia una simmetria (come ad esempio la simmetria di sapore per i quark). Questo argomento va sotto il nome di **current algebra**. Unendo quindi la CFT ad una G-symmetry si ottengono dei nuovi modelli minimali. Nella supersimmetria, aggiungendo la cosiddetta supersimmetria, si ottengono modelli minimali con soluzione esatta e con $c < \frac{3}{2}$ e quindi oltre $c = 1$. Con questo è stato possibile fare tanta fisica. Per esempio nel sistema quantistico di elettroni 1 + 1 dimensionali a massa nulla con spin, l'elettrone diventa un campo conforme e il suo spin diventa un indice di $SU(2)$.

21 Campo scalare - Formulazione Hamiltoniana

Si tratterà nel dettaglio il campo scalare, ovvero il caso $c = 1$. Avevamo già visto l'azione S e il tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$:

$$S = \frac{1}{8\pi} \int \sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi = \frac{1}{2\pi} \int \partial_z \varphi \partial_{\bar{z}} \varphi \quad (210)$$

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \frac{\delta_{\mu\nu}}{4} (\partial_\alpha \varphi \partial^\alpha \varphi) \implies T_{zz} = -\frac{1}{2} (\partial_z \varphi)^2 \quad (211)$$

Avevamo anche trovato che la funzione due punti di φ era

$$\langle \varphi \varphi \rangle = -\log |z - w|^2 \implies \langle TT \rangle = \frac{1}{2(z - w)^4} \implies c = 1 \quad (212)$$

Poi si erano introdotti gli operatori di vertice $V_\alpha = e^{i\alpha\varphi}$ per cui vale

$$\langle V_\alpha V_{-\alpha} \rangle = \frac{1}{|z - w|^{\alpha^2}} \implies (h_\alpha, \bar{h}_\alpha) = \left(\frac{\alpha^2}{2}, \frac{\alpha^2}{2} \right) \quad (213)$$

Per quanto riguarda le correnti $U(1)$ si era trovato

$$U(1) = \begin{cases} J_z = i\partial_z\phi & \text{di dimensione } (h, \bar{h}) = (1, 0) \\ J_{\bar{z}} = -i\partial_{\bar{z}}\phi & \text{di dimensione } (h, \bar{h}) = (0, 1) \end{cases} \quad (214)$$

Avevamo dunque scritto le seguenti equazioni del moto

$$\partial\bar{\partial}\varphi = 0 \implies \begin{cases} \partial_{\bar{z}}J_z = 0 \\ \partial_zJ_{\bar{z}} = 0 \end{cases} \quad (215)$$

e tramite il teorema di Wick si era ricavato che

$$\langle JJ \rangle = \partial_z\partial_w \log(z-w) = \frac{1}{(z-w)^2} \quad (216)$$

e le seguenti OPE:

$$T(z)J_z(z') = \left[\frac{1}{(z-z')^2} + \frac{1}{z-z'}\partial_{z'} \right] J_z(z') \quad \text{consistente con } h = 1 \quad (217)$$

$$J_z(z)V_\alpha(z') = i\partial_z\varphi : e^{i\alpha\varphi(z')} := -\alpha\partial_z\varphi\varphi + \dots = \frac{\alpha}{z-z'} + \dots = \frac{\alpha}{z-z'}V_\alpha \quad (218)$$

Vogliamo ottenere queste e altre cose attraverso la **quantizzazione canonica**. Avevamo fatto la quantizzazione radiale, dobbiamo invece farla nel cilindro, ovvero si deve mappare il piano nel cilindro e lo facciamo attraverso le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} z = e^{\frac{\omega}{R}} \\ \omega = \tau + ix \end{cases} \implies z = e^{\frac{\tau+ix}{R}} \implies x \sim x + 2\pi R \quad \text{sono equivalenti} \quad (219)$$

Abbiamo trovato la periodicit  in x . Dobbiamo per  ricordare che la quantizzazione canonica si fa sul Minkowskiano. Bisogna dunque passare al tempo Minkowskiano:

$$\begin{cases} \tau = it \\ z = e^{\frac{i(t+x)}{R}} \\ \bar{z} = e^{\frac{i(t-x)}{R}} \end{cases} \quad (220)$$

Dopo aver quantizzato si ritorner  all'euclideo. La teoria   invariante conforme, quindi   anche invariante di scala ed   possibile riscalarlo t e x attraverso la seguente invarianza di scala:

$$t, x \rightarrow Rt, Rx \implies z = e^{i(t+x)}$$

In questo modo non compare più R in z . Adesso che siamo nello spazio-tempo di Minkowski, l'azione e le equazioni del moto si riscrivono come:

$$S = \frac{1}{8\pi} \int (\partial_t \varphi)^2 - (\partial_x \varphi)^2 \quad (\partial_t^2 - \partial_x^2) \varphi = 0 \quad (221)$$

La generica soluzione dell'equazione del moto appena scritta è

$$\varphi = f(x - t) + g(x + t) \quad (222)$$

la cui soluzione più generale è:

$$\varphi = \varphi_0 + \alpha_0(x + t) + \bar{\alpha}_0(t - x) + i \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n} e^{-in(x+t)} + \frac{\bar{\alpha}_n}{n} e^{-in(t-x)} \quad (223)$$

In questa espressione ci sono diverse scelte di segni e coefficienti e il fattore $\frac{1}{n}$ è del tutto convenzionale. La parte della sommatoria è la parte oscillante della soluzione, mentre la restante prima parte è quella lineare. Per quanto riguarda gli impulsi, dato che x è equivalente a $x + 2\pi$ deve accadere che

$$e^{ipx} = e^{ipx} e^{ip2\pi} \implies p = n \quad (224)$$

cioè l'impulso è quantizzato per $R = 1$. Le onde sono dunque periodiche su un cilindro di raggio unitario. Le condizioni di realtà sono:

$$\varphi^* = \varphi \quad \varphi_0^* = \varphi_0 \quad \alpha_n^* = \alpha_{-n} \quad \bar{\alpha}_n^* = \bar{\alpha}_{-n} \quad (225)$$

Calcoliamo adesso il momento canonico π :

$$\pi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\varphi}} = \frac{1}{4\pi} \dot{\varphi} = \frac{1}{4\pi} \left(\alpha_0 + \bar{\alpha}_0 + \sum \alpha_n e^{-in(t+x)} + \bar{\alpha}_n e^{-in(t-x)} \right) \quad (226)$$

Adesso si impongono le regole di quantizzazione canonica che sono:

$$[\varphi(x, t), \pi(y, t')] = i\delta(x - y) = \frac{i}{2\pi} \sum_n e^{in(x-y)} \quad \text{per } t = t' \quad (227)$$

Sostituendo le espressioni di φ e π si trovano le seguenti regole di quantizzazione:

$$[\varphi_0, \alpha_0 + \bar{\alpha}_0] = i \quad [\alpha_n, \alpha_0] = 0 \quad \begin{cases} [\alpha_n, \alpha_m] = n \delta_{n+m,0} \\ [\bar{\alpha}_n, \bar{\alpha}_m] = n \delta_{n+m,0} \end{cases} \quad (228)$$

Questa si chiama $U(1)$ **current algebra**. Per quanto riguarda il vuoto si ha

$$\alpha_n|0\rangle = 0 \quad \text{per } n > 0 \quad \alpha_n^\dagger = \alpha_{-n} \implies \langle 0|\alpha_n = 0 \quad \text{per } n < 0 \quad (229)$$

Possiamo vedere $\alpha_n = a_n$ operatore di distruzione e $\alpha_{-n} = a_n^\dagger$ operatore di creazione a meno di un fattore n . Troviamo lo standard spazio si Fock bosonico. Adesso che abbiamo quantizzato torniamo nell'eucledio usando le espressioni di z e di \bar{z} . La corrente risulta

$$J_z = i\partial_z\varphi = i\partial_z \left[i \sum_{n \neq 0} \left(\frac{\alpha_n z^{-n}}{n} + \frac{\bar{\alpha}_n \bar{z}^{-n}}{n} \right) - i\alpha_0 \log z - i\bar{\alpha}_0 \log \bar{z} \right] = \sum_n \frac{\alpha_n}{z^{n+1}} \quad (230)$$

Calcoliamo la funzione a 2 punti di J_z :

$$\begin{aligned} \langle 0|\hat{J}_z(z)\hat{J}_z(w)|0\rangle &= \sum_{n,m} \frac{\langle 0|\alpha_n\alpha_m|0\rangle}{z^{n+\alpha}w^{m+\alpha}} = \sum_{n>0} \frac{n}{2w} \left(\frac{w}{z}\right)^n \quad x = \frac{w}{z} \implies \\ \sum_{n>0} \frac{n}{2w} \left(\frac{w}{z}\right)^n &= \frac{1}{zw} x \frac{\partial}{\partial x} \sum x^n = \frac{1}{zw} \frac{w}{z} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{zw} \frac{w}{z} \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(z-w)^2} \end{aligned} \quad (231)$$

Ritrovo la stessa cosa ottenuta dal formalismo funzionale. Calcoliamo adesso il tensore energia-impulso e la confrontiamo con la definizione di Virasoro:

$$T = -\frac{1}{2}(\partial_z\varphi)^2 = \frac{1}{2}(J_z)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_k \frac{\alpha_k}{z^{k+1}} \right)^2 \equiv \sum_n \frac{L_n}{z^{n+z}} \quad (232)$$

Si conclude che le relazione che legano gli operatori di Fock e quelli di Virasoro sono

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \alpha_k \alpha_{n-k} \quad \text{dove } \alpha_k \text{ e } \alpha_{n-k} \text{ commutano} \quad (233)$$

$$L_0 = \frac{1}{2} \sum : \alpha_k \alpha_{-k} : \quad \text{dove } \alpha_k \text{ e } \alpha_{-k} \text{ non commutano} \quad (234)$$

C'è dunque un problema di ordinamento. Ricordiamo che T era normal ordered e dobbiamo quindi calcolare $: \alpha_k \alpha_{-k} :$. Risulta:

$$L_0 = \frac{1}{2} \left(\alpha_0^2 + \sum_{k>0} \alpha_k \alpha_{-k} + \alpha_{-k} \alpha_k \right) \quad (235)$$

Vogliamo ottenere $L_0|0\rangle = 0$ e per questo sostituiamo opportunamente il secondo termine con il commutatore per distruggere il vuoto

$$L_0 = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} k + \frac{1}{2} \left(\alpha_0^2 + \sum_{k > 0} 2\alpha_{-k}\alpha_k \right) \quad (236)$$

Il secondo termine fa 0 sul vuoto per cui possiamo scrivere

$$:L_0: = \frac{1}{2} \left(\alpha_0^2 + \sum_{k > 0} 2\alpha_{-k}\alpha_k \right) \quad (237)$$

Il primo termine $\frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} k$ va invece rimosso. A volte tale termine si elimina tramite la regolarizzazione con la funzione Zeta di Riemann. Infatti:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} \implies \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} k = \frac{1}{2} \zeta(-1) \quad (238)$$

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12} \implies \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} k = -\frac{1}{24} \quad (239)$$

Bisognerebbe dire di più su questo risultato ma ci limitiamo a trascurare $-\frac{1}{24}$. Ora ricordiamo che gli stati $|h\rangle$ sono definiti come

$$|h\rangle = V_\alpha(0)|0\rangle \quad (240)$$

da cui segue che

$$L_0|h\rangle = h|h\rangle = \frac{\alpha^2}{2}|h\rangle \implies \frac{\alpha_0^2}{2}|h\rangle = \frac{\alpha^2}{2}|h\rangle \implies \alpha_0|h\rangle = \alpha|h\rangle \quad (241)$$

Dunque l'operatore di vertice ha carica $\alpha_0 = \alpha$ e dimensione $h = \frac{\alpha^2}{2}$. L'algebra degli operatori di Fock $[\alpha_n, \alpha_m] = n\delta_{n,m}, 0$ è più fondamentale dell'algebra degli operatori di Virasoro ottenuti in termini quadratici di α :

$$L_n = \sum_k \alpha_k \alpha_{n-k} \quad L_0 = \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k > 0} \alpha_{-k} \alpha_k \quad (242)$$

Dunque per studiare questo spazio delle rappresentazioni si possono utilizzare direttamente gli operatori α e non gli L . Osserviamo che

$$[L_0, \alpha_{-n}] = \left[\sum_{k>0} \alpha_{-k} \alpha_k, \alpha_{-n} \right] = n \alpha_{-n} \quad n > 0 \quad (243)$$

Uno stato

$$|\psi, \{n_k\}\rangle = \alpha_{-n_k} \alpha_{-n_{k-1}} \dots \alpha_{-n_1} |0\rangle \quad \text{con} \quad n_k \geq n_{k-1} \geq \dots \geq n_1 > 0$$

è un'eccitazione ottenuta a partire dallo spazio di Fock. Queste sono le stesse eccitazioni della teoria dei campi. Non ci sono stati nulli. Inoltre si ha che

$$\alpha_0 |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad \alpha_0 |0\rangle = 0 |0\rangle \quad (244)$$

Questa è la rappresentazione più generale con carica α . Queste rappresentazioni sono rappresentazioni irriducibili dell'algebra delle correnti $U(1)$, detta $U(\hat{1})$ (in questo caso si parla di algebra affine per la presenza del parametro α). In generale l'algebra delle correnti viene quindi definita dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} [\alpha_n, \alpha_m] &= n \delta_{n+m,0} \\ [L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m} + \frac{1}{12} n(n^2-1) \delta_{n+m,0} \\ [L_n, \alpha_m] &= -m \alpha_{n+m} \end{aligned} \quad (245)$$

Nota bene: l'algebra di Virasoro (l'algebra delle sole L) è una sotto-algebra di $U(\hat{1})$ e si scrive $Vir \subset U(\hat{1})$. In generale una rappresentazione irriducibile di un'algebra più grande potrebbe essere riducibile per un'algebra più piccola sotto-algebra di quella grande. A partire da questo si può dimostrare che

$$U(\hat{1}) \text{ ir.rep} = \sum Vir \text{ ir.rep} \quad (246)$$

Un altro esempio che abbiamo visto è che Virasoro conteneva la sotto-algebra di $SU(2)$, infatti:

$$L_0, L_1, L_{-1} \in SU(2) < Vir$$

Quello che succede è che una rappresentazione irriducibile di $U(\hat{1})$ è irriducibile rispetto a Virasoro tranne quando $h = \frac{n^2}{4}$ e $\alpha = \frac{n}{\sqrt{2}}$. In questo caso particolare allora

$$U(\hat{1}) \text{ ir.rep} = \sum \text{Vir ir.rep}$$

Non è facile da spiegare il motivo di tale eccezione ma è legato al fatto che per i modelli minimali sappiamo che

$$c = 1 - \frac{6}{n(n+1)} \rightarrow 1 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

$$h_{rs} = \frac{((m+1)r - ms)^2 - 1}{4(m+1)m} \rightarrow \frac{(r-s)^2}{4} \quad \text{quando } m \rightarrow \infty$$

e dunque risulta

$$h_{rs} = \frac{(r-s)^2}{4} = \frac{n^2}{4} \tag{247}$$

per infiniti m . La tabella di Kac esplode, ha un limite singolare.

Continuiamo con la quantizzazione canonica. L'autovalore $\alpha_0|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ con $\alpha \in \mathbf{R}$ senza nessun'altra condizione. Per quanto riguarda il caso $c < 1$, avevamo visto che $h \in \mathbf{Q}$ e poteva assumere valori discreti particolari. Invece per $c = 1$ le cose cambiano e si trova $\alpha \in \mathbf{R}$ e $h \in \mathbf{R}^+$. h può assumere un continuum di valori, in particolare una semiretta reale. $c = 1$ è differente dai modelli minimali. C'è un modo di rendere lo spettro discreto? Sì, attraverso la **compattificazione** (idea suggerita dalla teoria delle stringhe).

Sia $\varphi(x) : \text{spazio} \rightarrow \mathbf{R}$ field space (chiamato anche target space). Abbiamo detto che $x \sim x + 2\pi$ per cui $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbf{R}$. Nel caso della compactificazione φ è un angolo e si ha che $\varphi \sim \varphi + 2\pi r$ dove r è il raggio di compactazione. Dunque $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$, cioè φ manda un angolo in un angolo. Un esempio di mappa di questo tipo è l'ingranaggio di un orologio. Una caratteristica di φ è quella che può non essere continua. Per esempio una mappa non banale di φ potrebbe essere quella in figura 28.

Questa funzione non è continua in \mathbf{R} ma lo è in S^1 e per questo si parla di "winding mode". Il nuovo campo sarà quindi del tipo $g \sim e^{i\varphi}$. La lagrangiana diventa:

$$\int \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi = \int (g^{-1} \partial_\mu g)^2 \tag{248}$$

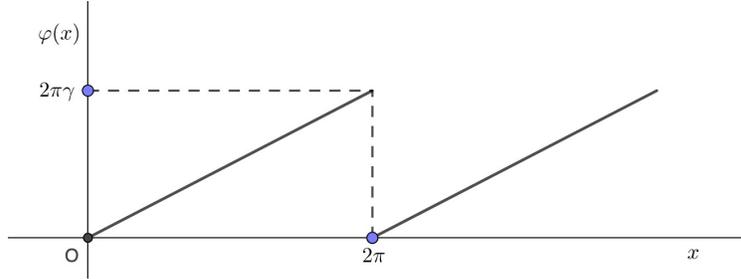


Figura 28:

Quando il campo ha delle limitazioni come questa si parla di σ - *model*. Avevamo trovato che

$$\varphi(x, t) = \varphi_0 + \alpha_0(t + x) + \bar{\alpha}_0(t - x) + \text{parte oscillante} \quad (249)$$

La parte oscillante è già periodica, dunque ci concentriamo solo sulla prima parte. Si ha:

$$\varphi \sim \varphi + 2\pi r \implies \varphi_0 \sim \varphi_0 + 2\pi r \quad (250)$$

Dato che la variabile coniugata di una variabile periodica è discreta e visto che vale la regola di commutazione $[\phi_0, p] = i$ dove $p = \alpha_0 + \bar{\alpha}_0$, p dev'essere discreta. Infatti si ha:

$$e^{ipx} = e^{ip(x+2\pi r)} \implies p = \frac{n}{r} = \alpha_0 + \bar{\alpha}_0 \quad (251)$$

Inoltre possiamo scrivere per qualunque m intero $\varphi(x + 2\pi) = \varphi(x) + 2\pi r m$ da cui segue

$$(\alpha_0 - \bar{\alpha}_0)2\pi = 2\pi r m \implies \alpha_0 - \bar{\alpha}_0 = r m \quad (252)$$

A questo punto è possibile ricavare lo spettro di α_0 dato r . Infatti:

$$\begin{cases} \alpha_0 - \bar{\alpha}_0 = r m \\ \alpha_0 + \bar{\alpha}_0 = \frac{n}{r} \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{r} + r m \right) \\ \bar{\alpha}_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{r} - r m \right) \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} L_0 = h = \frac{\alpha_0^2}{2} = \frac{1}{8} \left(\frac{n}{r} + r m \right)^2 \\ \bar{L}_0 = \bar{h} = \frac{\bar{\alpha}_0^2}{2} = \frac{1}{8} \left(\frac{n}{r} - r m \right)^2 \end{cases} \quad n, m \in \mathbb{Z} \quad (253)$$

Si dice che n =waves ed m =windings. Lo spin S risulta

$$S = h - \bar{h} = \frac{1}{8}(4nm) = \frac{nm}{2} \quad (254)$$

Questo non va bene perchè lo spin bosonico non può essere frazionario, non ci possono essere spin fermionici in spettri bosonici. Quindi si deve imporre m pari o semplicemente sostituire $m \rightarrow 2m$. n invece non deve avere limitazioni. Risulta:

$$\begin{cases} L_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2r} + mr \right)^2 \\ \bar{L}_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2r} - mr \right)^2 \end{cases} \quad n, m \in \mathbb{Z} \quad (255)$$

Abbiamo trovato due serie infinite di rappresentazioni $U(\hat{1})$ di Virasoro. Non è un modello minimale ma c'è una discretizzazione. Inoltre questo spettro mostra ciò che viene chiamato **T-duality**. Ovvero lo spettro è invariante per scambio di $r \iff \frac{1}{2r}$ e $n \iff m$. In altre parole si scambiano Solitoni \iff Particelle. Più precisamente nella teoria possono esistere sia eccitazioni di onde ovvero quanti perturbativi (particelle), sia soluzioni non banali e non perturbative (solitoni) che nel nostro caso abbiamo ottenuto quando abbiamo imposto le condizioni a contorno più generali legati al fatto che φ è un angolo. Allora possiamo scrivere lo stesso path integral in due modi in termini di due campi diversi:

$$Z = \int D\varphi e^{-S[\varphi]} = \int D\tilde{\varphi} e^{-\tilde{S}(\tilde{\varphi})} \quad (256)$$

Si scambiano particelle e solitoni e in questo caso la teoria e l'azione sono le stesse (non è vero in generale). In questa dualità abbiamo detto che $r \iff \frac{1}{2r}$. r è una sorta di costante di accoppiamento e per questo in genere c'è una sorta di dualità fra strong coupling e weak coupling. Da questa corrispondenza è facile vedere che c'è un punto fisso nella trasformazione ovvero

$$r = \frac{1}{2r} \implies r_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (257)$$

Tale punto è detto self duale e lo spettro è dunque una semiretta che parte da r_0 .

Analizziamo adesso il caso in cui r è razionale come nei modelli minimali.

$$h, \bar{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2r} \pm mr \right)^2 = \frac{r^2}{2} \left(m \pm \frac{n}{2r} \right)^2 \quad (258)$$

Sia $2r^2 = \frac{p}{q}$ dove p e q sono coprimi. Allora

$$r \rightarrow \frac{1}{2r} \implies r^2 \rightarrow \frac{1}{4r^2} \implies \frac{p}{q} \rightarrow \frac{q}{p} \quad (259)$$

Dunque lo spettro risulta:

$$h, \bar{h} = \frac{p}{4q} \left(m \pm \frac{nq}{p} \right)^2 = \frac{1}{4pq} (pm \pm qn)^2 \quad (260)$$

Teorema: p, q coprimi $\implies mp \pm nq$ può essere un qualsiasi numero intero $\in \mathbb{Z}$. Possiamo dunque scrivere

$$h, \bar{h} = \frac{k^2}{4pq} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (261)$$

In questo caso abbiamo delle dimensioni razionali in cui il minimo valore è $\frac{1}{4}$. Infatti:

$$p = q = 1 \implies h, \bar{h} = \frac{k^2}{4} \implies \text{minimo} = \frac{1}{4}$$

In questo caso si parla di **Raional compactifaction o Rational CFT**. Nonostante le similitudini, resta il fatto che il modello non è minimale perché h, \bar{h} possono assumere infiniti valori.

Parte III

Applicazioni delle CFTs

Le teorie di campo conformi hanno diverse applicazioni. Vediamone alcune.

22 Quarks & QCD String

In questa parte vedremo come mai la teoria delle stringhe è una teoria conforme. La teoria delle stringhe ha avuto origine da considerazioni sul fatto che i quark hanno carica frazionaria $Q = \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}$ e sono confinati dentro gli adroni. Si ritiene che il potenziale tra due quark a piccole distanze sia quello Coulombiano $V \sim \frac{1}{R}$, mentre per motivi non perturbativi non ancora del tutto compresi si ritiene che per grandi R il potenziale diventi lineare $V = \sigma R$. Dalla fisica 2 sappiamo che il potenziale di un campo magnetico tra due particelle cariche confinato dentro un tubo come in figura 29 è lineare:

$$E(R) = \text{const} \quad V(R) = \sigma R$$

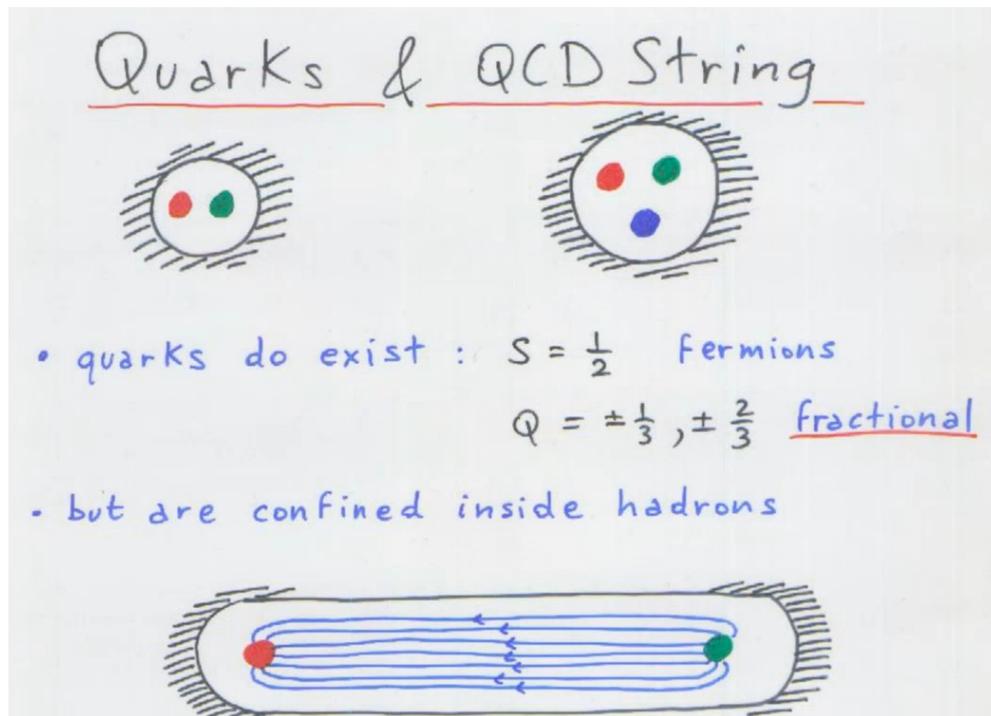


Figura 29:

La forza che attrae le due particelle è costante e le linee flusso sono intrappolate.

Da queste considerazioni e dal fatto che da un'effettiva descrizione quantistica relativistica di un sistema come quello in figura ci si rende conto che gli stati eccitati del sistema con un potenziale $V = \sigma R$ soddisfano la legge di proporzionalità tra massa e momento angolare $m_j^2 \simeq \sigma J$, nasce la teoria delle stringhe. Tale relazione di proporzionalità è infatti stata verificata sperimentalmente negli stati eccitati degli adroni. Risulta inoltre che il coefficiente σ è sempre lo stesso. Il problema della teoria delle stringhe è che non va bene nel regime di grandi energie in cui il potenziale dev'essere quello Coulombiano. Questo fu mostrato in esperimenti di deep inelastic scattering successivi.

22.1 The string action

L'azione di una particella relativistica è data dalla lunghezza del cammino S parametrizzato da $X^\mu(t) : \mathbb{R}$ ed è data dalla seguente espressione:

$$S = -m \int ds = -m \int \sqrt{(\dot{X}^\mu)^2} dt \quad m = \mathbb{R}^D \quad ds^2 = \frac{dX^\mu}{dt} \frac{dX^\mu}{dt} dt^2 \quad (262)$$

Nel caso della Stringa relativistica, un punto nella sua superficie dipende da due parametri:

$$X^\mu(\xi_1, \xi_2) : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow m$$

L'azione della stringa risulta dunque proporzionale all'area che scriviamo come ds^2 espresso in termini dei parametri della superficie:

$$ds^2 = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^b} d\xi^a d\xi^b \quad a, b = 1, 2$$

La superficie così emersa ha una metrica non banale e si parla di metrica indotta g_{ind} . L'azione della stringa dunque sarà:

$$S = -\sigma \int d^2\xi \sqrt{\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^1}\right)^2 \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^1} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^2}\right)^2} = -\sigma \int d^2\xi \sqrt{g_{ind}} \quad (263)$$

La stessa espressione si può riscrivere equivalentemente come segue:

$$S = -\frac{\sigma}{2} \int d^2\xi \sqrt{g} g^{ab} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^b} \quad (264)$$

In questa azione anche la metrica g è una variabile indipendente. Da questa si ricavano le stesse equazioni del moto che avrei ottenuto dalla prima azione. A questo punto, posso fare una scelta di gauge per la metrica bidimensionale. Infatti, una metrica bidimensionale è una matrice 2×2 simmetrica e dunque ha solo tre componenti e quando scelgo una gauge non si fa altro che fissare diffeomorfismi. Rimane quindi un solo grado di libertà. La metrica bidimensionale, senza perdere di generalità, può essere messa nella forma di una metrica piatta per un fattore conforme e per questo tale scelta di gauge viene chiamata conformal gauge choice. In particolare si ha:

$$g_{ab} = e^\phi \eta_{ab} \quad \sqrt{g} = e^\phi \implies S = -\frac{\sigma}{2} \int d^2\xi \eta^{ab} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^b} \quad (265)$$

Il fattore conforme si semplifica e per questo la teoria è invariante conforme. La teoria si riduce quindi ad una teoria bidimensionale. La teoria della stringa in questa gauge produce una teoria conforme bidimensionale. In conclusione, l'evoluzione della stringa nello spazio-tempo è equivalente ad un campo scalare a D componenti (μ va da 1 a D) e ha dunque le seguenti caratteristiche:

- massless
- scale invariant $\xi^a \rightarrow \lambda \xi^a$
- conformal invariant $\begin{cases} \xi^a \rightarrow \eta^a(\xi) \\ dS^2 = d\xi^a d\xi^a = e^\varphi d\eta^a d\eta^a \end{cases}$

Se lo spazio in cui si muove la stringa è compatto come ad esempio $m = S^3 \times \mathbb{R}$, allora si ha un modello σ :

$$S = \frac{\sigma}{2} \int d^2\xi (\partial_a X^\mu)^2 \quad \sum_{\mu=1}^3 (X^\mu)^2 = r^2$$

Belavin, Polyakov, Zamolodchikov nel 1983

- hanno studiato le teorie di campo conformi
- hanno valorizzato la simmetria conforme (Virasoro algebra)
- hanno usato i risultati matematici delle algebre di Lie affini per risolvere esattamente una grande classe di teorie di campo conformi.

22.2 Alcune rivoluzioni delle stringhe

Molti formalismi sono stati sviluppati per la stringhe, basato sulla matematica delle $\infty - dim$ Lie algebra. La teoria delle stringhe, dopo essere stata abbandonata come teoria delle interazioni forti, è stata ripresa come teoria unificatrice di tutte le interazioni fondamentali nel 1977 circa. Questo perché tale teoria ha due formulazioni:

- Teoria della stringa chiusa;
- Teoria della stringa aperta.

Si può correggere opportunamente la relazione tra massa e momento angolare per cui è possibile avere delle eccitazioni a massa nulla con spin diverso da zero. Si trova che la stringa chiusa ha spin 2 a massa nulla, mentre la stringa aperta ha invece spin 1 a massa nulla. Quindi la teoria delle stringhe contiene nel suo spettro a basse energie il gravitone, che si suppone abbia spin 2, e le interazioni di gauge. Da questo deriva l'idea che la stringa possa unificare la teoria della gravitazione con le altre interazioni di gauge. La teoria dei campi non va bene a tal scopo perché, mentre la rinormalizzazione delle interazioni di gauge è stata già compresa da t'Hooft, la rinormalizzazione dell'interazione gravitazionale è tuttora un problema aperto. All'interno di questo contesto sono stati studiati tanti modelli. Tra questi ci sono appunto le teorie conformi di cui abbiamo parlato basata sulle algebre di Lie affini, infiniti dimensionali che sono massless. In due dimensioni sono note anche delle teorie massive che si risolvono con la tecnica del Bethe ansatz o con l'approccio delle matrici S . Queste teorie si dice che sono integrabili, ovvero ci sono tante costanti del moto quanti gradi di libertà (tale proprietà permette di risolvere la teoria).

23 Luttinger theory - $c = 1$ scalar field CFT

Un'applicazione della CFT è la cosiddetta bosonizzazione o teoria di Luttinger che consiste nel descrivere un sistema fermionico con un sistema bosonico. Supponiamo di avere un sistema fermionico in $1 + 1$ dimensioni. Sappiamo che un fermione libero riempie lo spettro fino ad una certa energia corrispondente all'energia di Fermi come mostrato in figura 30.

Consideriamo adesso delle eccitazioni vicino alla superficie di Fermi. In particolare eccitiamo un elettrone vicino la superficie di Fermi in modo che la superi per energie piccole. La relazione di dispersione si può dunque linearizzare nell'intorno della superficie di fermi e ottengo quindi una teoria relativistica. Ciò che si fa è "bosonizzare" le correnti, ovvero scrivere la corrente come la derivata di un campo scalare in modo da avere una descrizione bosonica. Dunque la corrente fermionica è data da

$$J_\mu = (J_z, J_{\bar{z}}) \quad \text{con} \quad \frac{\partial}{\partial z} J_z = 0 \quad J_z = \psi_R^\dagger \psi_R \quad (266)$$

dove il bilineare fermionico $J_z = \psi_R^\dagger \psi_R$ realizza l'eccitazione buca-particella in quanto ψ_R annichila il fermione sotto la superficie di fermi, mentre ψ^\dagger lo crea ad un energia più alta.

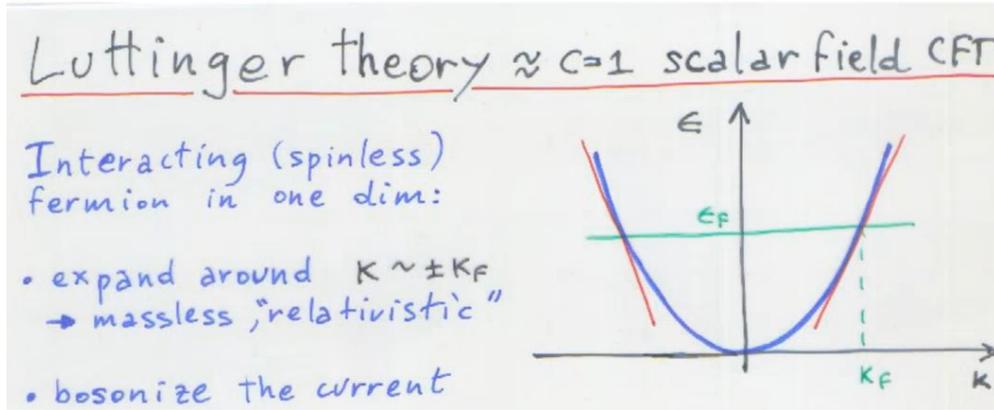


Figura 30:

Tale corrente si mappa con una corrente bosonica, scritta quindi in termini del campo scalare φ in questo modo:

$$J_z = i \frac{\partial}{\partial z} \varphi \quad (267)$$

Una volta fatto questo, l'hamiltoniana del sistema sarà un'hamiltoniana bosonica che scritta in termini dello stress tensor risulta:

$$T_{zz} = \frac{1}{2} : J_z J_z : \implies H = \int dx \mathcal{H} = \int dx (T_{zz} + T_{\bar{z}\bar{z}}) = \frac{1}{2} \int dx : (\partial_\tau \varphi)^2 + (\partial_x \varphi)^2 : \quad (268)$$

I correlatori avranno dunque il seguente andamento:

$$\langle : e^{i\beta\varphi(z)} :: e^{-i\beta\varphi(w)} : \rangle = |z - w|^{-2\beta^2} \quad \Delta = \beta^2 \quad (269)$$

In struttura della materia, la teoria ha il nome di **Teoria di Tomonaga-Luttinger**. In questa teoria, il raggio di compattificazione $\sqrt{2} \leq r < \infty$ è legato alla costante di accoppiamento g ed è dunque il parametro della teoria. Lo spettro di questa teoria, che abbiamo appena visto, è il seguente:

$$\{\Delta_{m,n} = h_{m,n} + \bar{h}_{m,n} \quad \text{con} \quad h = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2r} + nr \right)^2, \quad \bar{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2r} - nr \right)^2 \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad (270)$$

Il vantaggio di questa teoria è che il raggio di compattificazione è un parametro arbitrario e può succedere che per effetto dell'interazione, i fermioni diventano interagenti e l'interazione

consiste nella modifica del raggio di compattificazione. Facendo questo, si possono ottenere delle funzioni di correlazione che non hanno un andamento standard. In particolare, può accadere che la carica $\rho_0 = \beta$ possa assumere valori frazionari. Infatti, se il raggio di compattificazione cambia, lo spettro cambia, la dimensione potrebbe modificarsi e la carica diventerebbe frazionaria. Per un elettrone in $1 + 1$ dimensione è possibile quindi diventare un'eccitazione di carica frazionaria. Tutte queste eccitazioni sono descritte dalla teoria conforme.

23.1 Applicazioni della Luttinger theory e altre CFTs

Le principali caratteristiche sono:

- anomale (non classiche) leggi di scala se la funzione di correlazione ha il seguente andamento $\langle \phi(x)\phi(0) \rangle = |x|^{-2\Delta}$
- eccitazioni con carica frazionale
- separazione carica-spin. I due gradi di libertà si bosonizzano indipendentemente e si propagano in modo indipendente e con velocità diverse.

Le principali storie di successo della teoria sono:

- Catene quantistiche di spin
- Effetto di Kondo
- Effetto Hall quantistico

23.2 Effetto Hall Quantistico

Abbiamo degli elettroni liberi di muoversi in un piano realizzato solitamente come uno strato fra due semiconduttori. Si osserva che a bassissime temperature e con un campo magnetico B ortogonale al piano molto intenso, non appena si applica un campo elettrico con una differenza di potenziale in direzione x , gli elettroni vengono deflessi dalla forza di Lorentz

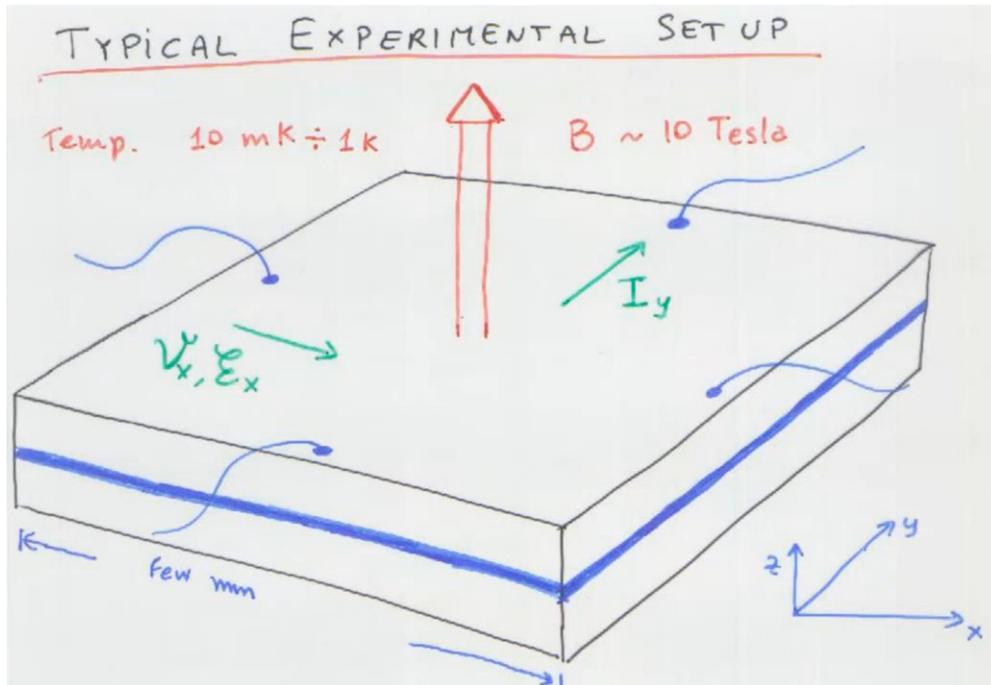


Figura 31: Effetto Hall

per effetto di B e si genera una corrente in direzione y chiamata corrente Hall come in figura 31.

Variando B , si misura la corrente attraverso la relazione

$$v_i = R_{ij} I_j \quad i, j = x, y$$

dove R_{ij} è una matrice che 0 nella diagonale principale (potenziale in una direzione, corrente generata nella direzione ortogonale). Questo sistema dipende fortemente dalla geometria. Ci sono delle geometrie equivalenti come ad esempio l'anello o un disco. Nel caso dell'anello ad esempio, applicando un campo elettrico tangenziale si genera una corrente radiale.

23.3 Fluido incompressibile di Laughlin

Che tipo di stato fondamentale hanno gli elettroni in questa situazione? Gli elettroni formano un fluido incompressibile, ovvero si comportano come goccioline di liquido senza formare delle

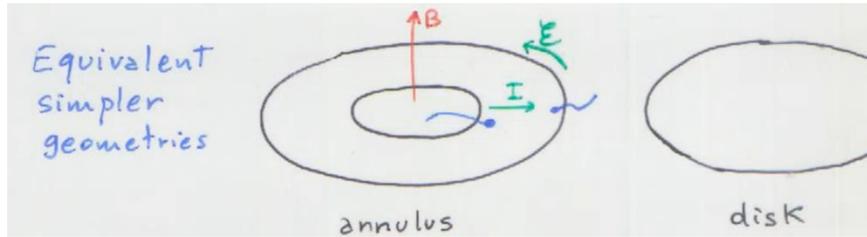


Figura 32:

onde. Per quanto riguarda ad esempio il disco, la densità degli elettroni all'interno è costante, mentre al bordo è zero. Si osserva dunque un gap nella densità e per questo si parla di liquido incompressibile. Le eccitazioni del fluido sono elevate, non si possono trascurare e al bordo si crea una sorta di superficie di Fermi analoga a quella del liquido di Luttinger.

Laughlin's quantum incompressible fluid

Electrons form a droplet of fluid:

- incompressible = gap
- fluid = $\rho(x, y) = \rho_o = \text{const.}$

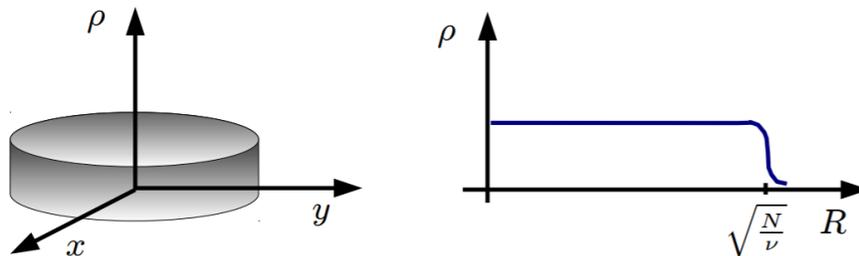


Figura 33:

Chiamiamo A l'area della goccia e N il numero di elettroni. Il numero di orbitali di Landau degeneri in energia è pari a

$$\mathcal{D}_A = \frac{BA}{2\pi \frac{hc}{e}} \quad (271)$$

mentre la densità degli elettroni sarà data dal rapporto $\rho = \frac{N}{A}$. Si definisce

$$\text{Filling Fraction} \equiv \nu \equiv \frac{N}{\mathcal{D}_A} \propto \frac{N}{BA} = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5} \dots \quad (272)$$

Ad esempio se $\nu = 1$, metto un elettrone per ogni orbitale di Landau, mentre per $\nu = \frac{1}{3}$ metto un elettrone ogni 3 orbitali come mostrato in figura 34. Posso mettere al massimo un elettrone per orbitale.

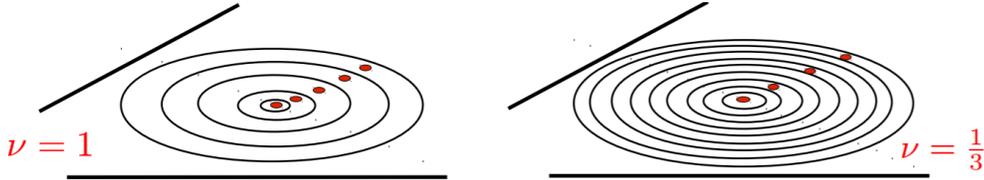


Figura 34:

Il campo magnetico è forte e lo spin è allineato. In prima approssimazione posso considerare quindi gli elettroni senza spin.

I livelli nella goccia si riempiono fino a quando non si arriva al bordo dov'è presente un potenziale confinante e per questo al bordo della goccia si realizza una superficie di Fermi. Linearizzando attorno alla superficie ottengo una situazione analoga a quella del Luttinger liquid. In particolare in quest'ultimo erano presenti due bordi (o due rami) rappresentati dai due valori $\pm k_F$ dell'impulso di Fermi. Nell'effetto Hall si ha invece un solo bordo, un solo ramo e per questo si parla di teoria chirale. Infatti nel bordo del disco ci sono dei fermioni che si possono muovere in una sola direzione. Esiste solo la soluzione $x - vt$ e la teoria conforme ha solo la parte c . Non c'è \bar{c} . L'interno è congelato e non si considera, mentre al bordo si hanno delle eccitazioni a basse energie che sono $1 + 1$ dimensionale. Questa teoria è dunque una teoria conforme chirale con $\bar{c} = 0$. Come abbiamo detto precedentemente, se l'elettrone interagisce si possono avere dei valori frazionari della carica. Si può dimostrare che se $m \equiv \frac{1}{\nu} > 1$ si ha una carica di eccitazione al bordo frazionaria pari a $Q = \frac{e}{m}$. Si può dimostrare che siccome la funzione di correlazione di questi stati conformi ha solo la parte analitica (ha solo z e non \bar{z}) acquista una fase non banale:

$$\Psi(\eta_1, \eta_2; z_1 \dots z_n) \simeq (\eta_1 - \eta_2)^{\frac{1}{m}} \quad \Psi(\eta_1 - \eta_2 \rightarrow e^{i\pi}(\eta_1 - \eta_2)) = e^{\frac{i\pi}{m}} \Psi \quad (273)$$

In questo caso le eccitazioni hanno dunque una carica frazionaria e una statistica quantistica frazionaria

$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{1}{m} = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots \quad (274)$$

e per questo vengono chiamate **anioni**. Da alcune descrizioni microscopiche si pensa che questa statistica frazionaria è una sorta di interazione a lungo-range fra vortici indipendente dalla distanza.

23.4 Resonant tunneling experiments

Adesso vediamo l'esperimento che portato a misurare la carica $\frac{1}{3}$ che è stato fatto alla fine degli anni '90. Consideriamo la geometria di una barretta come in figura 35.

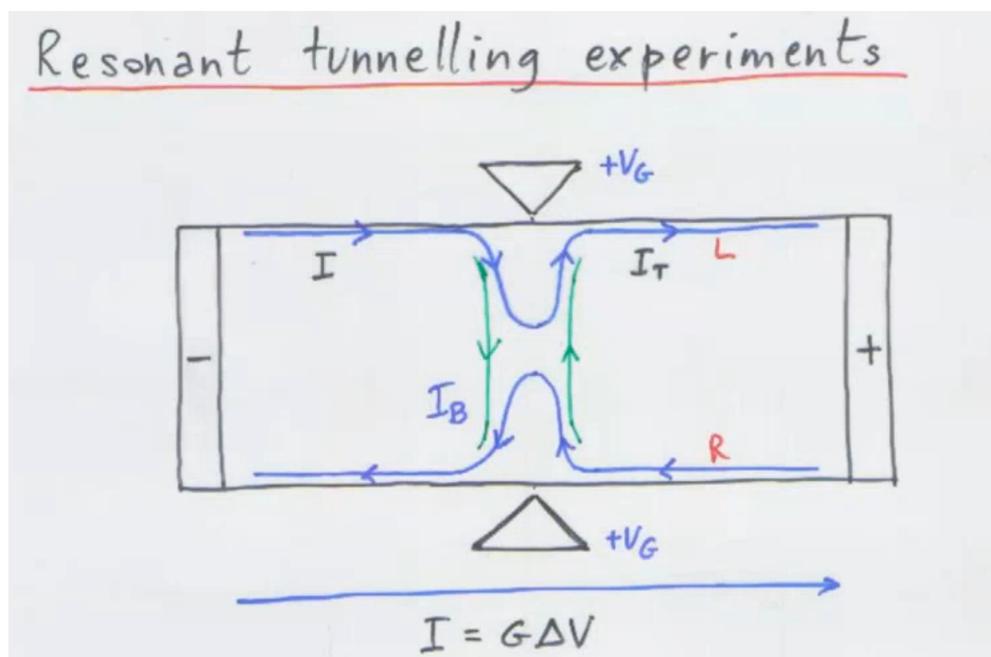


Figura 35:

Le eccitazioni chirali seguono il bordo superiore e quello inferiore e di per se non interagirebbero mai. Mettendo un'opportuna differenza di potenziale positiva $+V_G$ che respinge gli elettroni verso l'interno, il fluido di elettroni viene in qualche modo strizzato e le eccitazioni dei due bordi interagiscono. Nel punto centrale di interazione si ha una sorta di scattering, un anione del bordo inferiore e un anione del bordo superiore interagiscono e si ha dunque un'ampiezza di transizione di scattering. Questo fenomeno ha il nome di **resonant tunneling**. Questo sistema è molto instabile e quindi questa interazione è molto difficile da

rilevare. Ciò che si osserva è che la corrente fa dei picchi al variare del potenziale $+V_G$ (si veda figura 36).

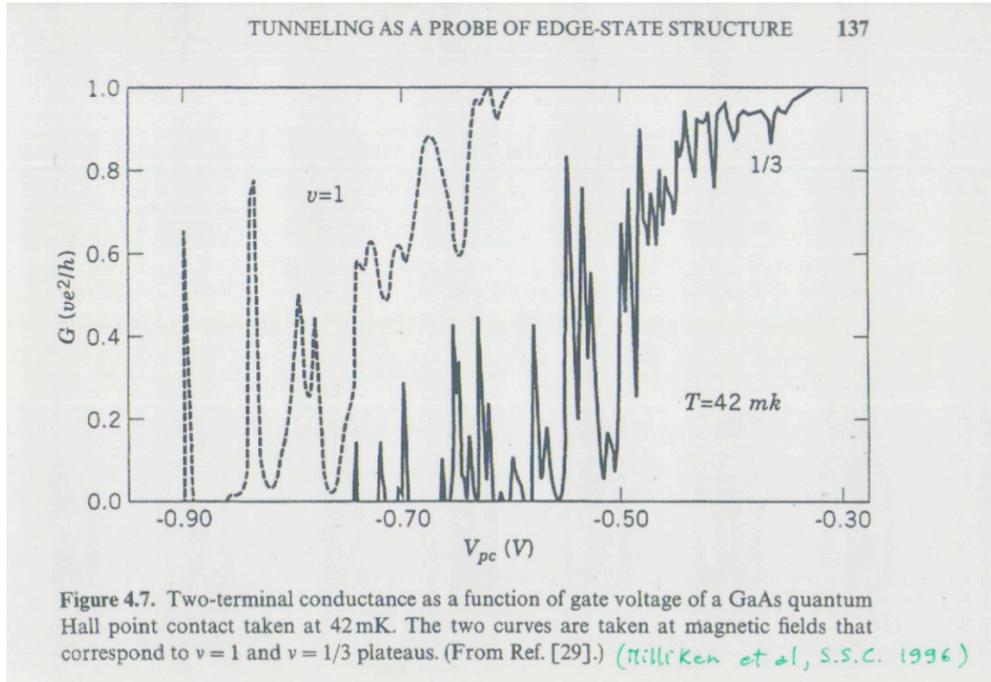


Figura 36:

Invece di misurare la sezione d'urto, si fa una misura di più semplice: si studia la **fluttuazione della carica**. La fluttuazione della carica soddisfa la seguente legge:

$$G = \frac{e^2}{h} \frac{1}{3} F \left(\frac{V_G}{T^{2/3}} \right) \quad (275)$$

A temperatura $T = 0$ questa fluttuazione è chiamata **Shot Noise**. La corrente non è continua ma è fatta da particelle che passano e l'anione ha una certa probabilità di passare o non passare con una certa probabilità. Se l'interazione è debole, questi fenomeni vengono interpretati come fenomeni indipendenti e scorrelati fra di loro e quindi seguiranno la statistica di Poisson. Questa ci dice che la fluttuazione quadratica media è proporzionale al numero medio di particelle spedite, cioè

$$\langle |\delta n|^2 \rangle \propto n \quad (276)$$

Posso studiare analogamente la fluttuazione della carica delle particelle che seguono questa statistica, in modo da vedere quale sia il fattore di proporzionalità tra il numero di particelle e carica. Posso dunque determinare quanta carica viene trasportata dalla singola particella. La fluttuazione della corrente segue la legge:

$$S_I = \langle |\delta I(\omega)|^2 \rangle = Q I_B \quad I_B = \text{Backscattering Current} \quad (277)$$

Sperimentalmente si vede che $Q = \frac{e}{3}$ (è anche possibile verificare che tale fattore non è un errore di normalizzazione) dando conferma al modello. Di fatto, la carica frazionaria non esiste veramente, esiste solo all'interno di questo fluido strano non ancora completamente compreso. L'eccitazione dell'elettrone si divide in tre eccitazioni di carica $q = \frac{1}{3}$ che vanno per conto proprio e scatterano producendo lo spettro che si osserva sperimentalmente.

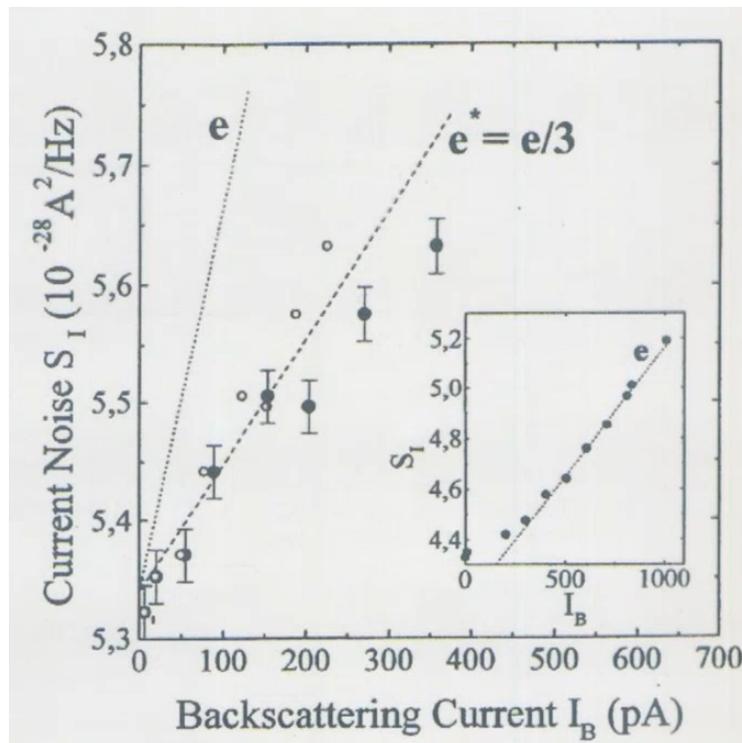


Figura 37:

Per uscire dal centro di scattering, si devono ricombinare per formare una carica intera. Allo stesso modo, tra una goccia e l'altra per effetto tunneling può passare un elettrone e non una carica frazionaria. Il passaggio di un elettrone si verifica quando la restrizione dovuta al potenziale è molto forte. Tutta la teoria su cui è basato questo esperimento si basa sulla teoria conforme che dato ottimi risultati.

24 Statistica frazionaria non abeliana

Può accadere che la teoria di queste eccitazioni al bordo non è semplicemente data da una teoria $c = 1$, ma anche dalla teoria $c = \frac{1}{2}$ (la stessa del modello di Ising). Le eccitazioni del cosiddetto stato Pfaffiano sono da una parte bosoniche (per quanto riguarda la carica), e dall'altra modellizzate con lo spin di Ising. La regola di fusione ci dice che, essendoci due canali nella funzione di correlazione, quando in una configurazione di 4 di queste eccitazioni, ne porto una intorno all'altra, devo far uso non di una fase ma di una matrice 2×2 unitaria. Questa idea permette di realizzare queste fasi non banali. Uno stato di questo tipo che appartiene ad uno spazio di Hilbert bidimensionale, può essere interpretato come un qubit (bit quantistico). Si pensa che su questo spazio di Hilbert si possa implementare una delle trasformazioni unitarie elementari del calcolo quantistico e per questo si è proposto che tale sistema potesse portare ad una computazione quantistica. Purtroppo questo sistema non è stabile abbastanza per poterlo fare.