

Teorie di Campo e Sistemi Integrabili

Andrea Cappelli
(INFN, Florence)

Argomenti

- Ricercatori
- Ambito scientifico
- Esempio I: il Modello di Ising
- Esempio II: gli Anioni (Anyons)
- Palmarès

Ricercatori

- A. C., Filippo Colomo (ric. INFN), due dottorandi,
(+ P.Politi, P. Verrucchi, CNR)
- 3 studenti laureati, 3 addottorati nel periodo 2000-2010
- Iniziativa Specifica INFN "FI11: teoria dei campi in bassa dimensionalità, sistemi integrabili ed applicazioni",
BO-FI-TS-GE, circa 30 ricercatori e studenti
- PRIN "Fisica statistica dei sistemi fortemente correlati all'equilibrio e fuori equilibrio: risultati esatti e metodi di teoria dei campi"
BO-FI-TS-TO-SA, resp. naz. G. Mussardo
- Network ESF "INSTANS: interdisciplinary statistical and field theory approaches to nanophysics and low-dimensional systems",
10 laboratori europei

Teoria dei Campi in bassa dimensionalità, Sistemi Integrabili e applicazioni

- Applicazioni della teoria dei campi diverse dalle particelle elementari
 - Modelli statistici esattamente risolubili
- ➔ Sistemi di materia condensata in $D=0,1,2$
(spin chains, quantum wires, quantum Hall effect, Kondo effect)
- ➔ Modelli statistici in $d = 2,3 (= D+1)$
(spin models, dimer models, frustrated magnets,
Josephson-junctions arrays)

Fisica in basse dimensioni

- Interazioni forti, effetti quantistici nonperturbativi
 - ➔ trasmutazione dei gradi di liberta'
 - ➔ carica e spin frazionari; separazione delle eccitazioni di carica e di spin
 - ➔ effetti nonlineari, leggi di scala non banali
- Sistemi a molti corpi esattamente risolubili
 - ➔ simmetria conforme (infinito dimensionale)
 - ➔ Bethe Ansatz

Integrabile: N gradi di liberta' ➔ N quantita' conservate

Il Modello di Ising

$$\sigma_i = \pm 1$$

$$H[\sigma] = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i$$

$$Z[\beta, h] = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{-\beta H[\sigma]}$$

- perfetto "toy model":
- integrabile & non banale
- paradigma dei fenomeni critici

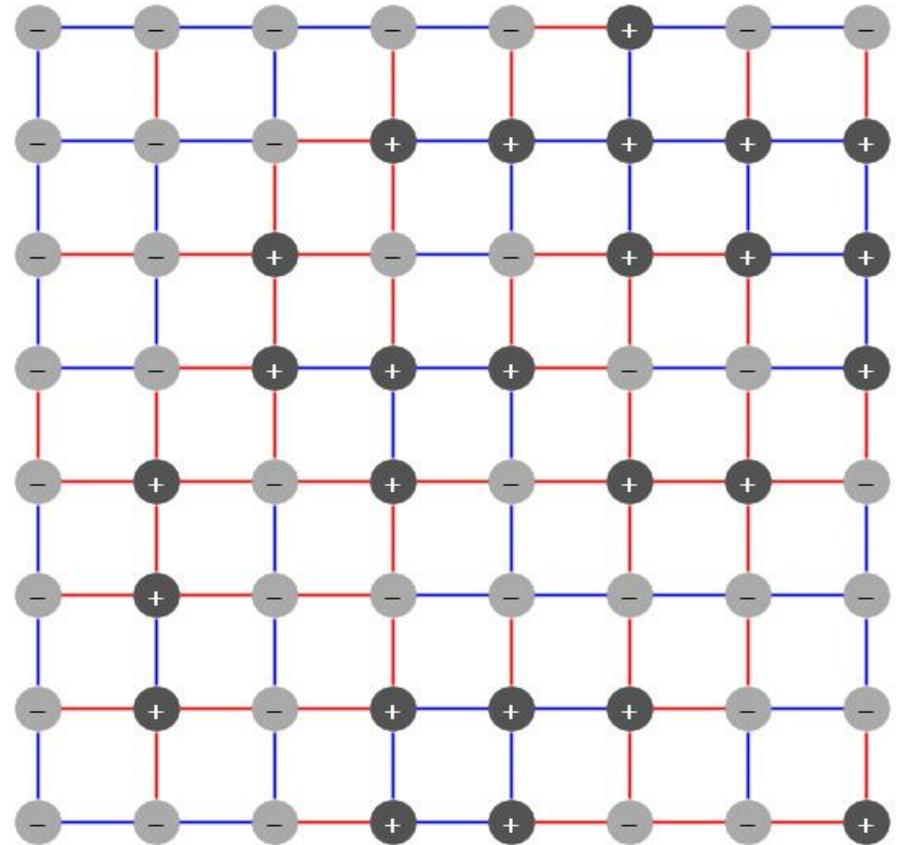


Diagramma delle fasi

asse $h = 0$:
fermione libero

$$\psi(x) = \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_{x+a} \hat{\sigma}_{x+2a} \cdots \hat{\sigma}_\infty$$

$$m \sim |\beta - \beta_c|$$

asse $\beta = \beta_c$: teoria integrabile
8 particelle massive interagenti

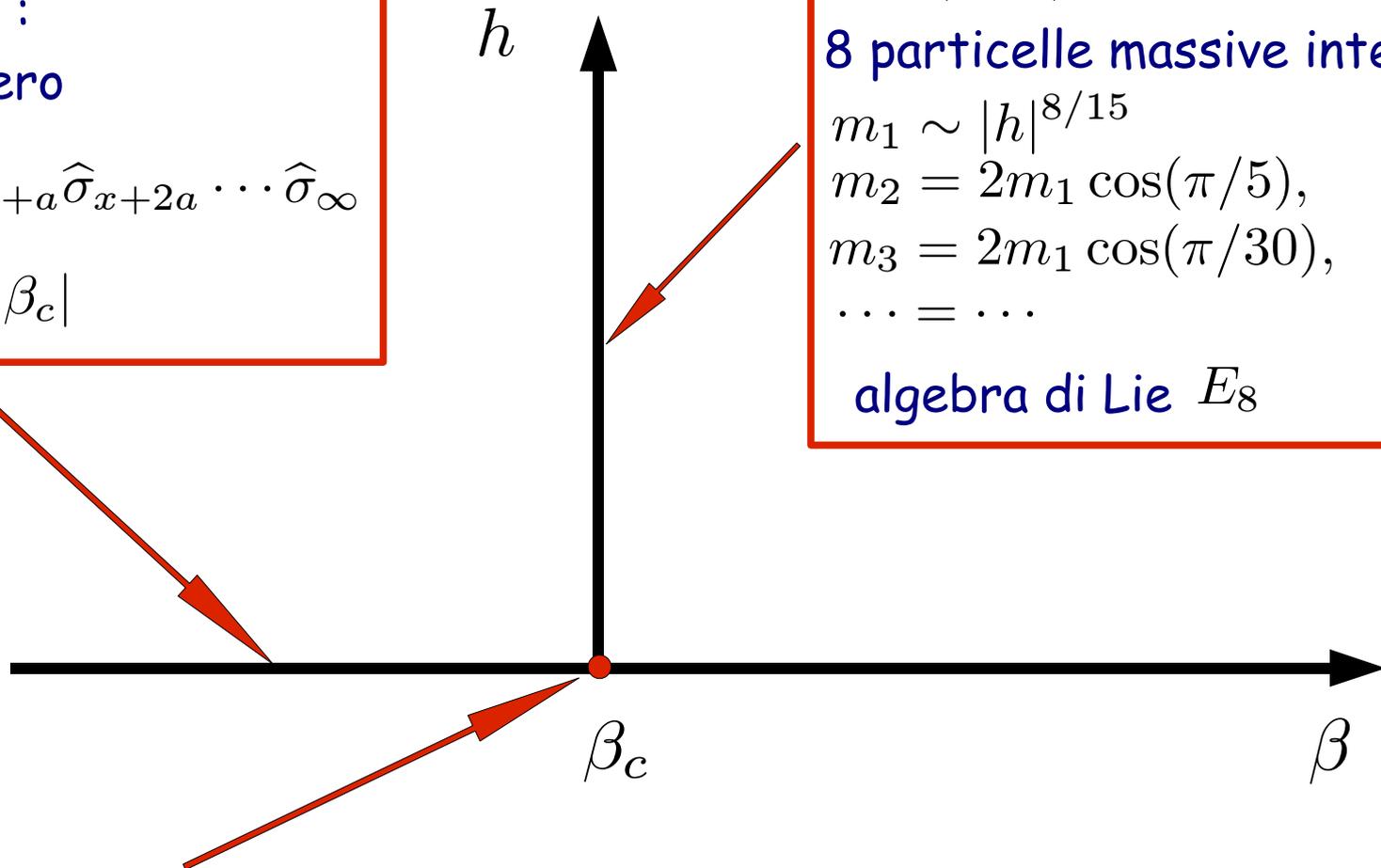
$$m_1 \sim |h|^{8/15}$$

$$m_2 = 2m_1 \cos(\pi/5),$$

$$m_3 = 2m_1 \cos(\pi/30),$$

$$\cdots = \cdots$$

algebra di Lie E_8

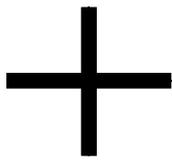


punto critico:

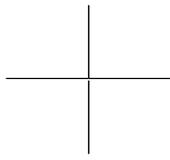
- invarianza di scala e conforme
- soluzione esatta

$$\langle \sigma(x) \sigma(0) \rangle = \frac{1}{|x|^{1/4}}$$

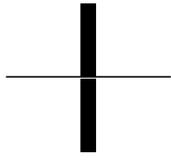
Modello a sei vertici



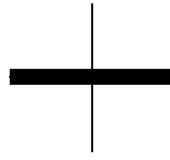
a



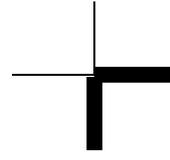
a



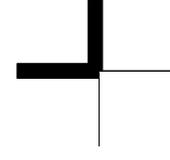
b



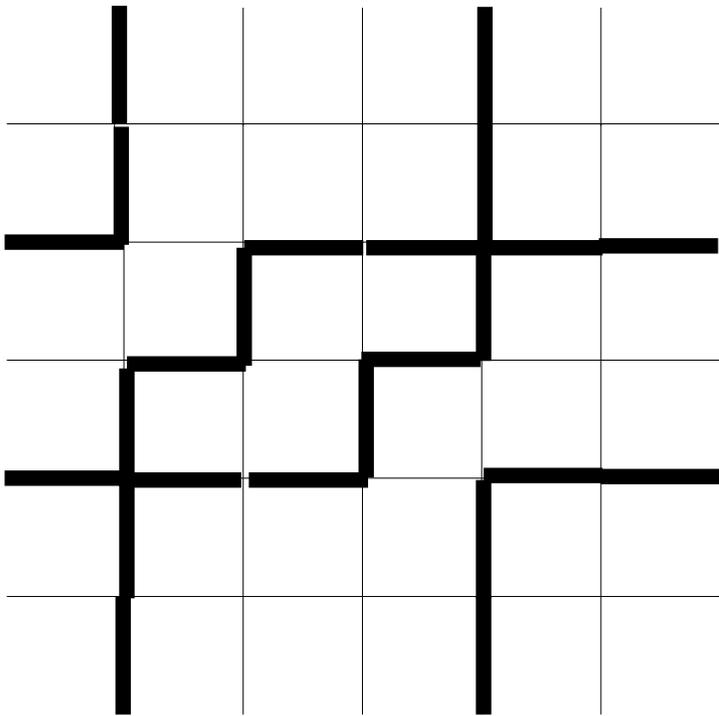
b



c



c

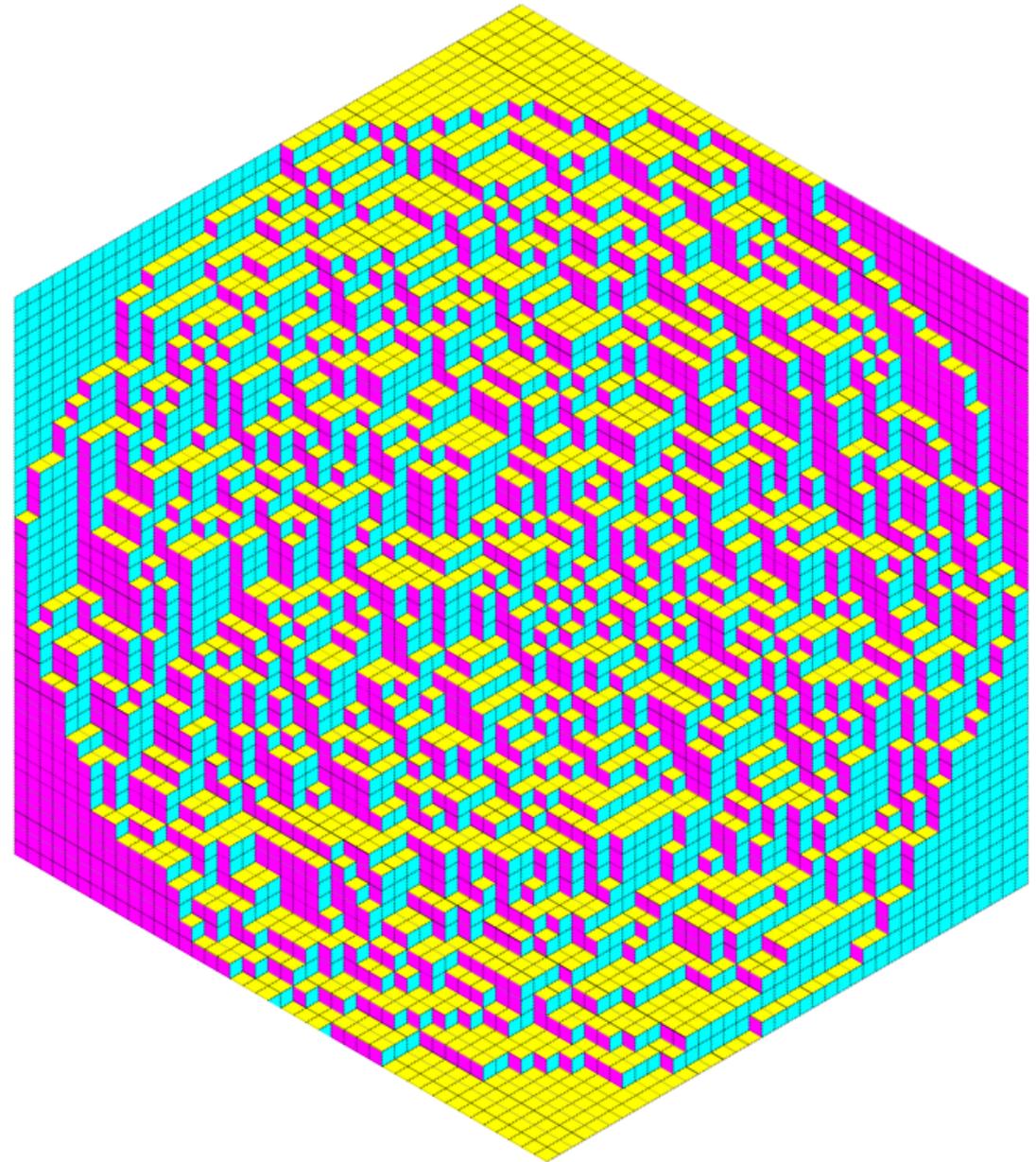
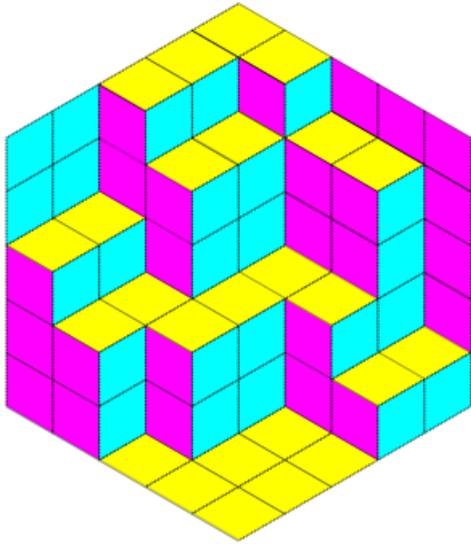


- generalizzazione di Ising
- fermioni interagenti per $\Delta \neq 0$

$$\Delta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

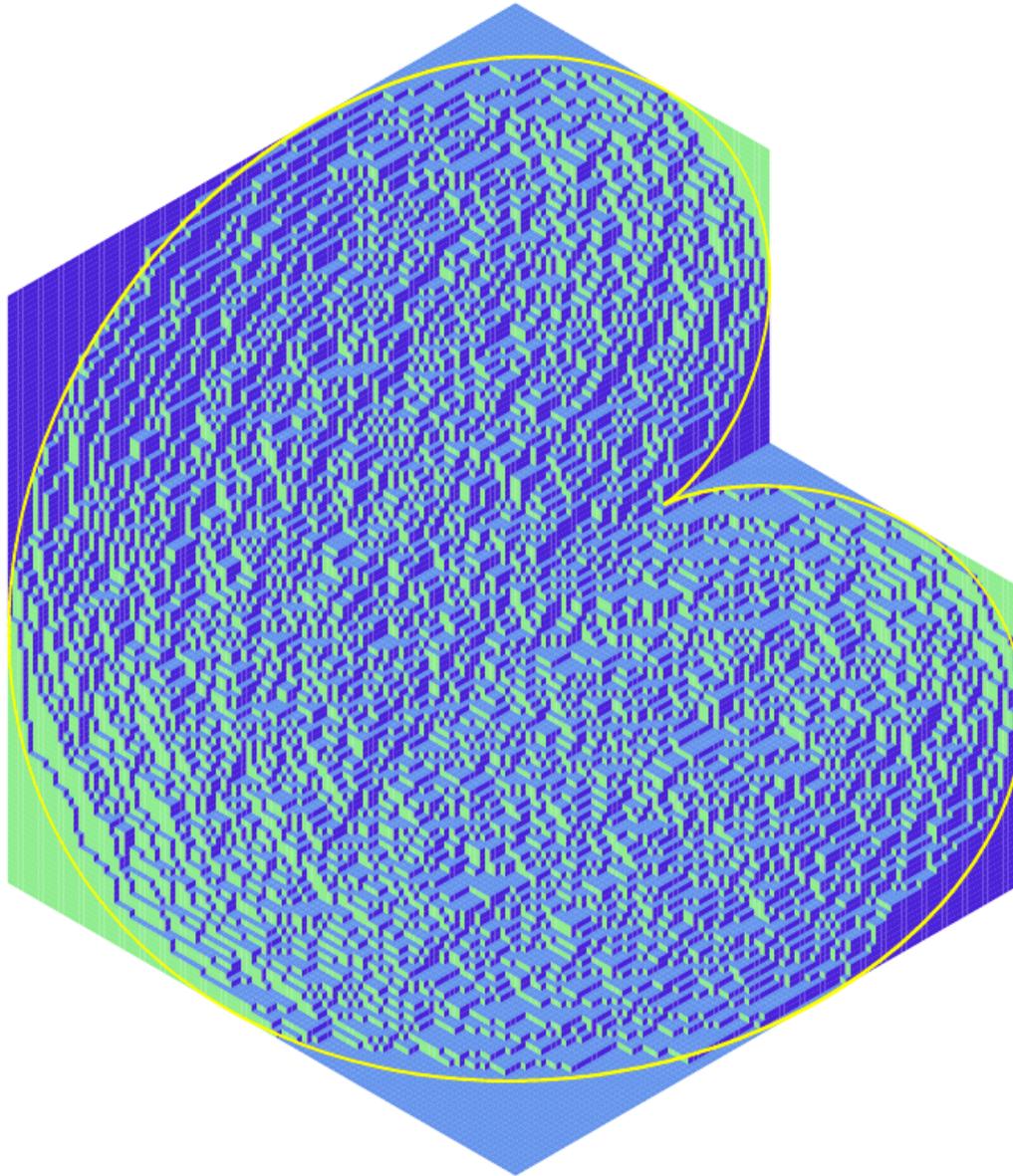
- soluzione esatta con specifiche condizioni al bordo
(F. Colomo, A. Pronko)
- ha importanti conseguenze in:
 - matematica combinatoria
 - geometria algebrica

Partizioni piane



Curve algebriche

(Kenyon, Sheffield, Okounkov)



Il modello di Ising.....

- compendio delle tecniche bidimensionali
- estensioni forniscono un vasto Zoo di modelli esattamente risolubili (& teorie di campo)

.....e la realta`

- fisica mesoscopica e nanostrutture ($D=0,1,2$)

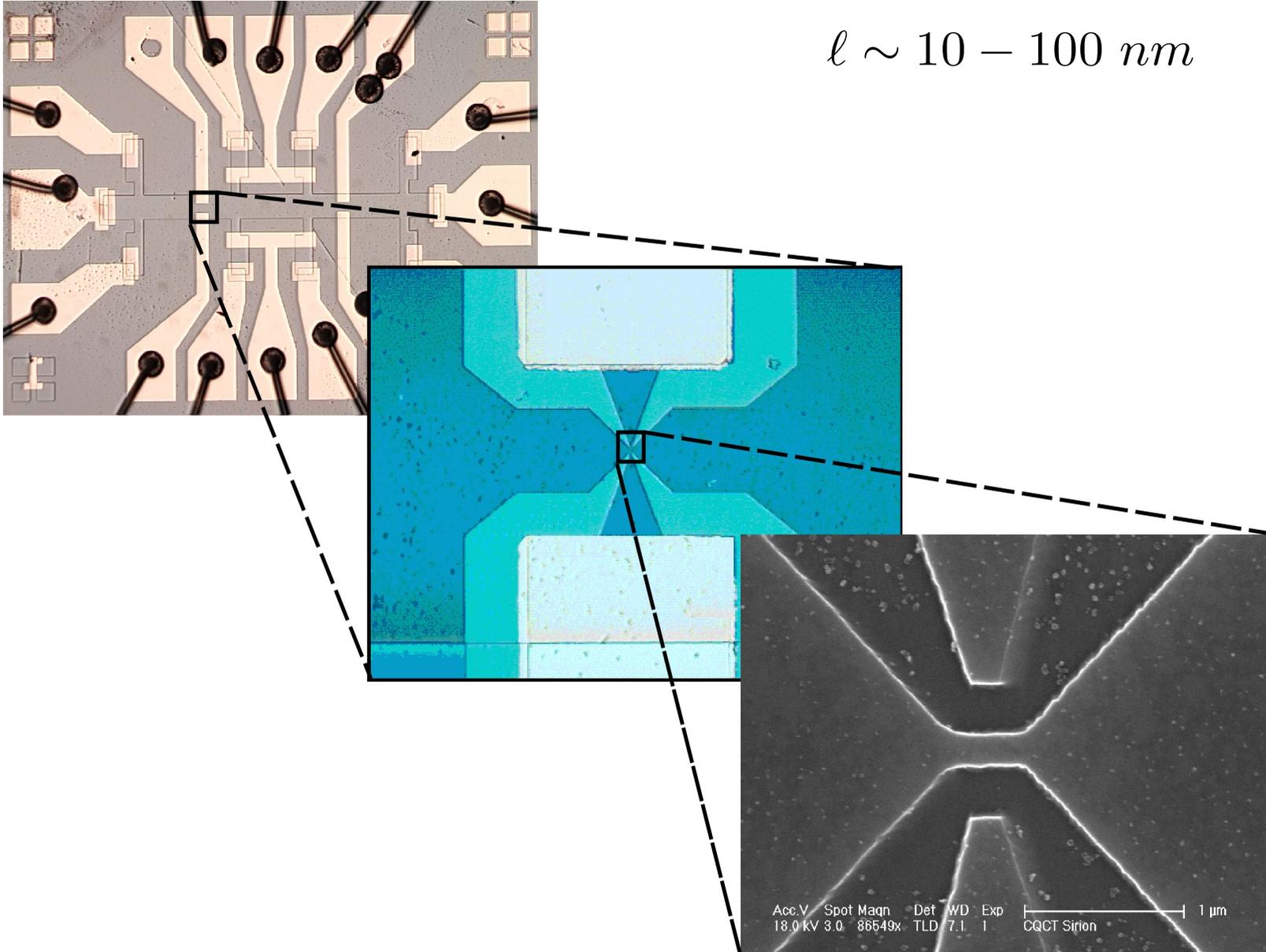
 gran numero d'applicazioni 

"There's plenty of room at the bottom"

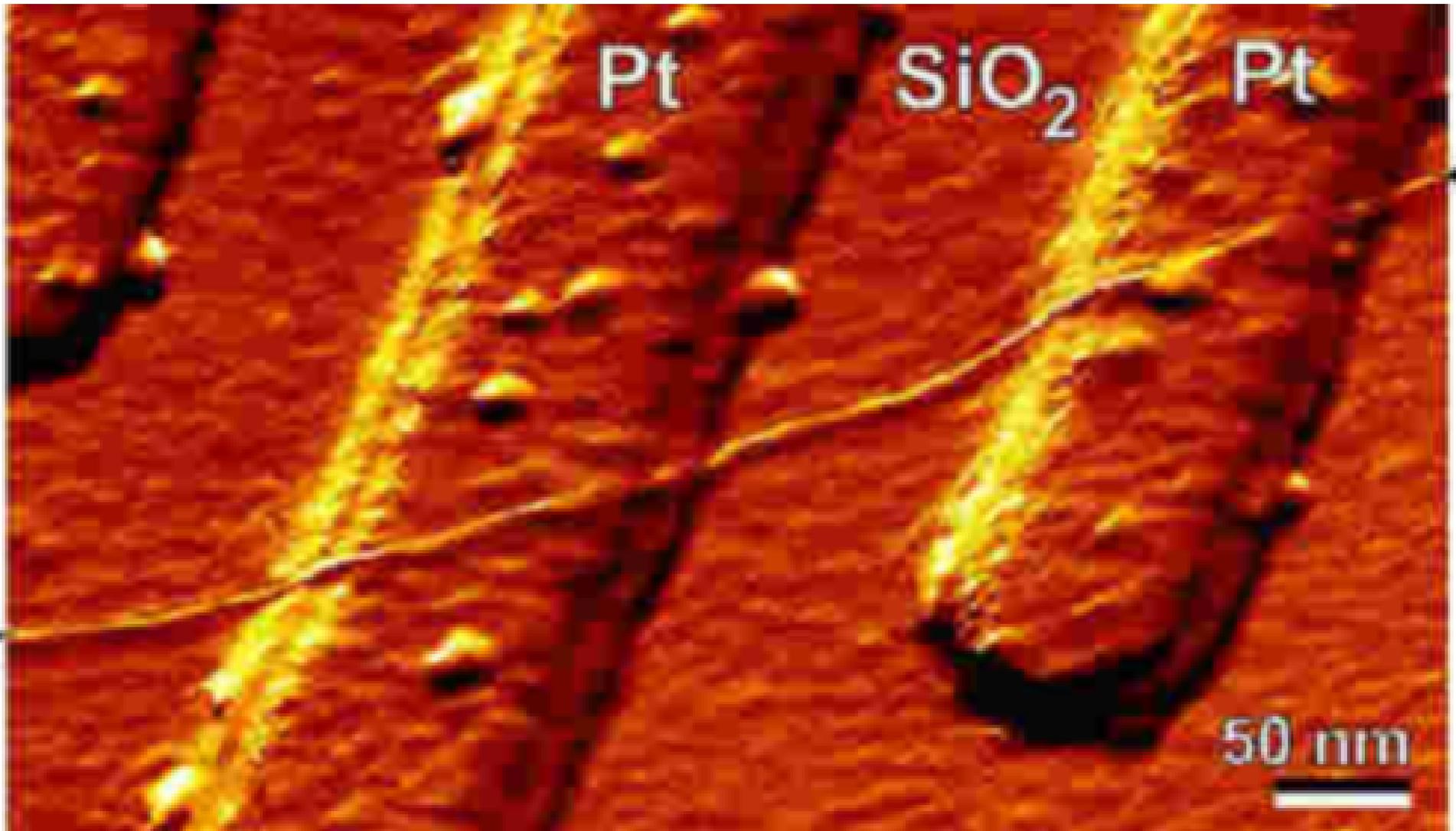
Filo quantistico

grande lunghezza di coerenza \longrightarrow effetti quantistici & interazioni forti

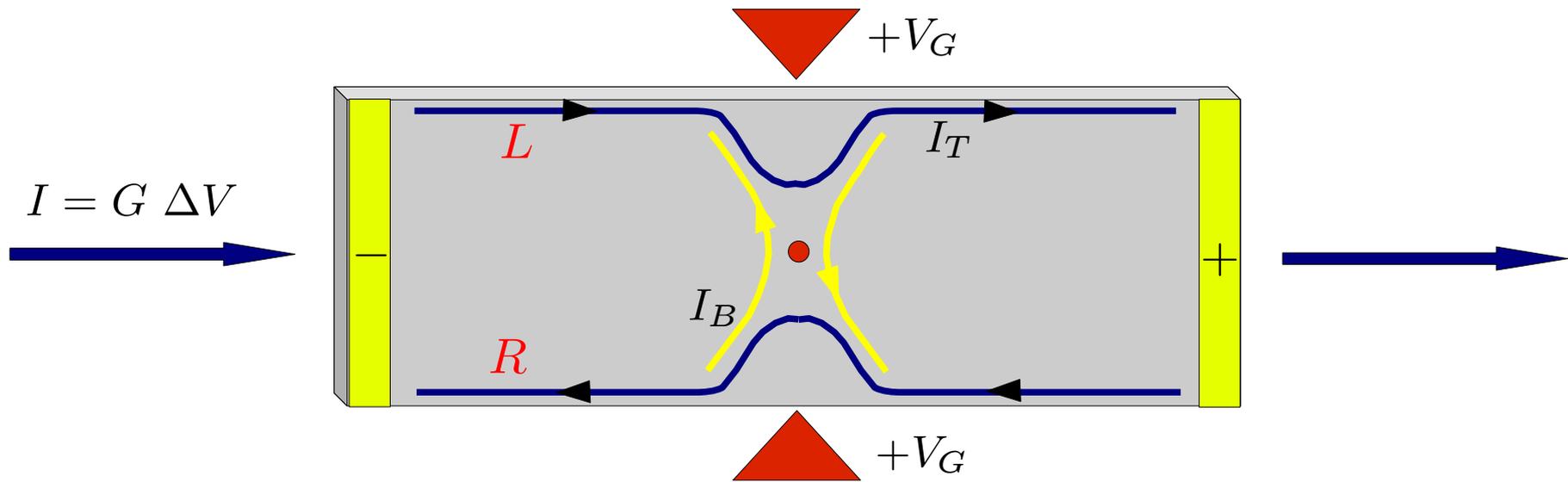
$$l \sim 10 - 100 \text{ nm}$$



Nanotubo di carbonio



Carica frazionaria nell'effetto Hall quantistico



- QHE: elettroni in uno strato bidimensionale, $B = 10$ Tesla, $T = 10-100$ mK
- eccitazioni di bordo con $Q = \frac{e}{3}$ descritte dalla teoria dei campi conforme
- fluttuazioni della corrente di scattering: Shot Noise ($T=0$)

bassa corrente $I_B \ll I \rightarrow$ tunnelling indipendente

$$S_I = \langle |\delta I(\omega)|^2 \rangle_{\omega \rightarrow 0} = \frac{e}{3} I_B \quad \text{statistica di Poisson}$$

- descrizione completa di $G(V_G, T)$ con teoria di campo massiva integrabile

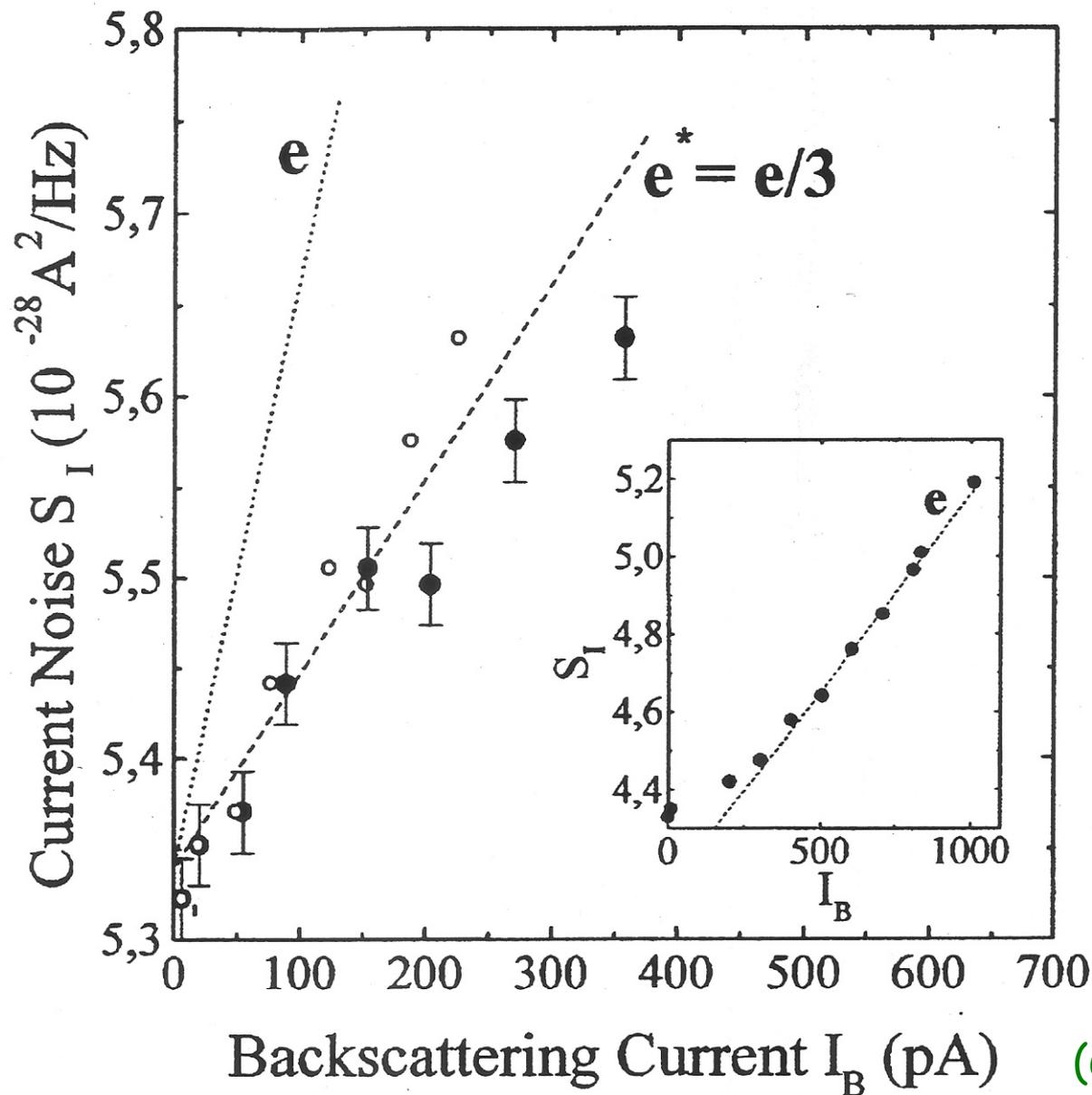
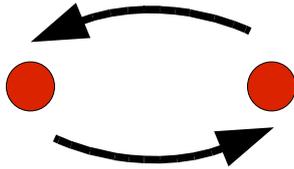


FIG. 2. Tunneling noise at $\nu = 1/3$ ($\nu_L = 2/3$) when following path A and plotted versus $I_B = (e^2/3h)V_{ds} - I$ (filled circles) and $I_B(1 - R)$ (open circles). The slopes for $e/3$ quasiparticles (dashed line) and electrons (dotted line) are shown. $\Theta = 25$ mK. Inset: data in same units showing electron tunneling for similar $G = 0.32e^2/h$ but in the IQHE

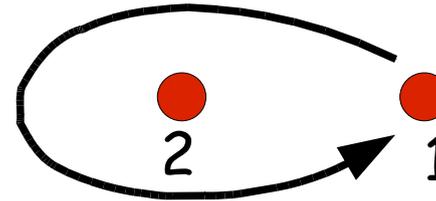
Statistica quantistica frazionaria in $d=2+1$

Scambio



$$z = x + iy \quad e^{i\theta}$$

Monodromia



$$\Psi [(z_1 - z_2)e^{i2\pi}, z_2] = e^{i2\theta} \Psi [z_1, z_2]$$

- $\theta = \pi\nu$, ad es. $\nu = 1/3$ fase frazionaria $\neq \pm 1$

Bosoni \longleftrightarrow Anioni \longleftrightarrow Fermioni

- fasi statistiche descritte dalle teorie di campo conformi
- estensione multidimensionale: $\Psi_a [z_1, z_2] \longrightarrow U_{ab} \Psi_b [z_1, z_2]$
 - trasformazioni unitarie utili per la computazione quantistica
 - eccitazioni topologiche protette dalla decoerenza

Alcuni risultati recenti

(A.C., Georgiev, Huerta, Riccardi, Rodriguez, Todorov, Viola, Zemba)

- La funzione di partizione degli stati Hall dalla teoria conforme
- Descrizione degli stati con statistica multidimensionale (non-Abeliana)
- Studio della corrente termica
- Studio del tunneling di elettroni (Coulomb blockade)

Palmarès



(figurine Panini)

- Boltzmann medal (Stat-phys) 2010: J. Cardy e B. Derrida
- Onsager Prize (APS): 2010 D. Friedan; 2006 J. Cardy; 2004 R. Baxter
- Nobel Prize 1998: R. B. Laughlin, H. L. Störmer, D. C. Tsui (QHE)
- Field Medal (Int. Math. Un.) 2006: A. Okunkov, W. Werner,
per ricerche collegate a teorie conformi e sistemi integrabili

nel nostro piccolo.....

- network europei finanziati fin dal 1993
- Google: 460.000 (andrea cappelli), scholar: 16.000.....