Il Flusso del Gruppo di Rinormalizzazione & le Teorie di Campo Effettive

- trasformazioni di scala
- il flusso del gruppo di rinormalizzazione
  (punti fissi, bacini d'attrazione, universalità)
- l'azione effettiva
  (struttura & derivazione per media)
- esempi di azioni effettive (QCD, QHE)
- dedurre o indovinare l'azione effettiva
  (calcolatori & simmetrie)

Trasformazioni di Scala

1) Riscaliamo le coordinate (e il tempo)

$$\begin{cases} t \\ x \\ y \\ z \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda t \\ \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{cases} \qquad \text{Es:} \quad \lambda = \frac{1}{10}$$

→ le distanze sono ridotte: $\text{dist} \to \lambda\, \text{dist}$

2) Osserviamo il risultato con una risoluzione costante

→ media cancella i piccoli dettagli
"coarse graining"

3) Ripetiamo la trasformazione più volte

COSA OTTENIAMO ?

Esempio: siamo su un aereo che decolla e guardiamo dal finestrino.
- Cosa vediamo?
- L'immagine diventa stabile?

Invarianza di Scala

- Ogni sistema fisico ha una scala caratteristica

uomo	$\sim$ 1 metro	$= 10^{2}$ cm	
atomo	$\sim$ 1 Angstrom	$= 10^{-8}$ cm	
protone	$\sim$ 1 Fermi	$= 10^{-12}$ cm	
Modello Standard	$\sim$ 1 TeV^{-1}	$= 10^{-16}$ cm	$(\hbar = c = 1)$
gravitá quant	$\sim (10^{19}\ GeV)^{-1}$	$= 10^{-32}$ cm	

- Come relazionare scale diverse ?

- E' possibile un sistema (approssimativamente) indipendente dalla scala ?

No, cioé Sí.... insomma....

- Teoria dei campi classica é invariante di scala

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi\right)^2 + g\,\varphi^4 \right]$$ azione

$$x^\mu \to \lambda x^\mu \quad , \quad \varphi \to \varphi/\lambda \quad , \quad S \to S$$

$$\varphi(x^\mu) = \sum_{k_\mu} \left(a_k\, e^{i k_\mu x^\mu} + b_k^{+}\, e^{-i k_\mu x^\mu} \right)$$

il campo contiene modi di vibrazione con lunghezza d'onda arbitrariamente piccola;

$$1/|k| \to 0 \quad , \quad k^\mu \to \infty$$

Rinormalizzazione

- Le fluttuazioni quantistiche di arbitraria scala si sommano dando infinito

Es: $\langle\Omega| \sum_k a_k a_k^+ |\Omega\rangle = \infty$

- La teoria quantistica non è definita, perché non può essere giusta ad ogni scala.

- Introduciamo un limite superiore alle fluttuazioni: "cut-off" ≈ lunghezza minima

$$E \sim |k| < \Lambda_0 \qquad \approx \qquad \ell > \ell_{min} = 1/\Lambda_0$$

$$\rightarrow \langle\Omega| \sum_{k=-\Lambda_0}^{\Lambda_0} a_k a_k^+ |\Omega\rangle \sim \Lambda_0^4 < \infty$$

regolarizzazione

- Rinormalizzazione: ridefinizione dei parametri della teoria $g \rightarrow g(\Lambda_0, \Lambda)$ in modo da:
  i) eliminare la dipendenza da Λ_0 in favore di una "scala fisica" Λ;
  ii) ottenere fluttuazioni correttamente normalizzate nel limite $\Lambda_0 \rightarrow \infty$.

- Invarianza di scala classica è (giustamente) persa: la teoria dipende dalla scala Λ, che deve essere determinata sperimentalmente insieme alla costante d'accoppiamento rinormaliz

$$g(\Lambda) \equiv g(\Lambda_0 = \infty, \Lambda)$$

Flusso del Gruppo di Rinormalizzazione

- la costante d'accoppiamento non è costante
  "running coupling constant" $g(\Lambda)$

- il simultaneo cambiamento di Λ e $g(\Lambda)$ in modo opportuno lascia la teoria invariante,
  (cut-off = rottura soffice dell'invarianza di scala classica)

→ "RG flow"

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} g(\Lambda) = \beta(g)$$ "beta-function"

- l'equazione d'invarianza della teoria, ad es. per l'azione effettiva $S(g,\Lambda)$, è:

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} S = \left(\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta \frac{\partial}{\partial g} \right) S(g,\Lambda) = 0$$

$$\rightarrow \quad S(g,\Lambda) = S\left(g + \beta \frac{d\Lambda}{\Lambda}, \Lambda + d\Lambda\right)$$

→ cambio scala ≈ variazione del parametro

→ invarianza per riparametrizzazione $2 \leftrightarrow 1$

La grande idea di K. Wilson (~1970

- Tutte le teorie di campo hanno questa invarianza (flusso ad un parametro):

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} g^i = \beta^i(g) \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots$$

- Questa invarianza è incredibilmente predittiva:

$\Lambda \to \Lambda + d\Lambda$ ≈ cambio di scala
≈ coarse graining,

$g^i \to g^i + \beta^i \frac{d\Lambda}{\Lambda}$ ≈ cambio degli accoppiamenti effettivi per la scala di energia $E = \Lambda + d\Lambda$,

→ Possiamo predire come la teoria cambia al variare della scala;

→ Possiamo collegare teorie differenti relative a scale diverse;

→ Senza conoscere esattamente i $\beta^i(g)$ possiamo trarre delle conseguenze qualitative generali molto importanti;

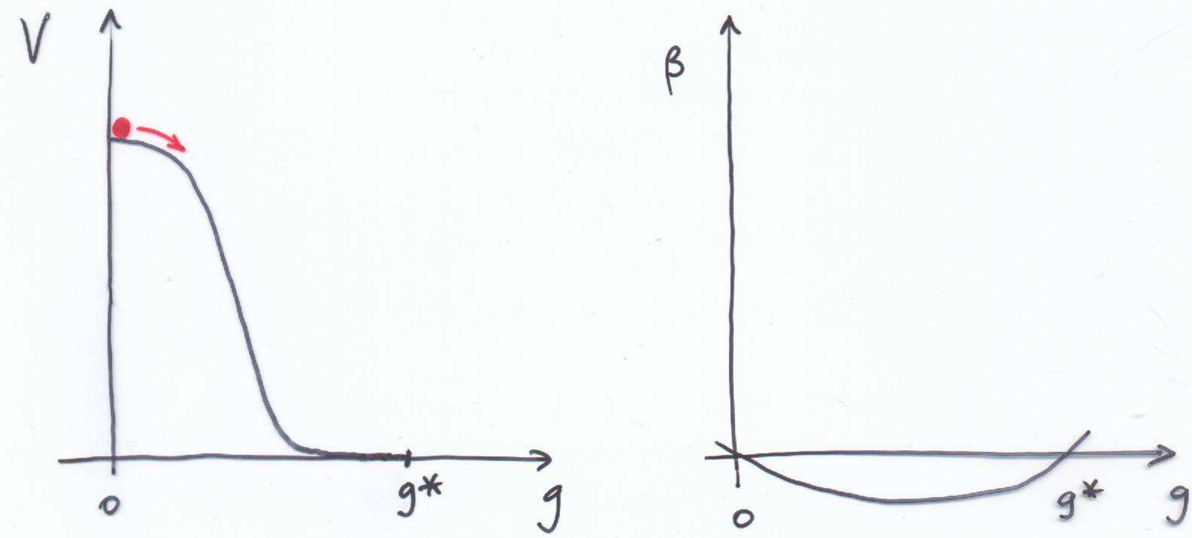
→ "RG flow" dà un quadro concettuale, è un "paradigma" della fisica teorica moderna.

Esempio : 1 accoppiamento

$$\frac{dg}{dt} = -\beta(g) \qquad t = -\log\Lambda$$ cresce alle grandi distanz

- Analogia meccanica (Wilson): velocità = Forza
  moto molto viscoso di una biglia che cade da un montagna di sabbia:

$$\beta(g) = \frac{\partial}{\partial g} V(g)$$ energia potenziale



$t=0$ $\quad$ $t=\infty$

UV $\bullet \longrightarrow \bullet$ IR

$g=0$ $\quad$ $g=g^*$

$\bullet$ = "punti fissi"

- $g=0 \rightarrow \beta=0$ invarianza di scala (quantistica)
- $g>0$ la teoria ha una scala caratteristic ma possiamo predire il comportamen asintotico a grandi scale:

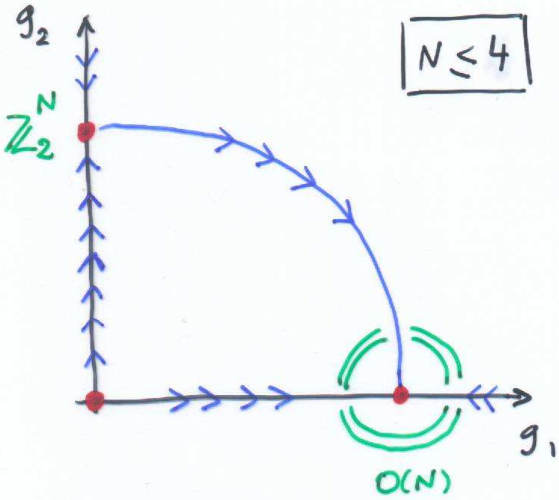
Es: $$\lim_{x\to\infty} \langle \varphi(x)\varphi(0)\rangle_g \simeq \langle \varphi(x)\varphi(0)\rangle_{g=g^*}$$

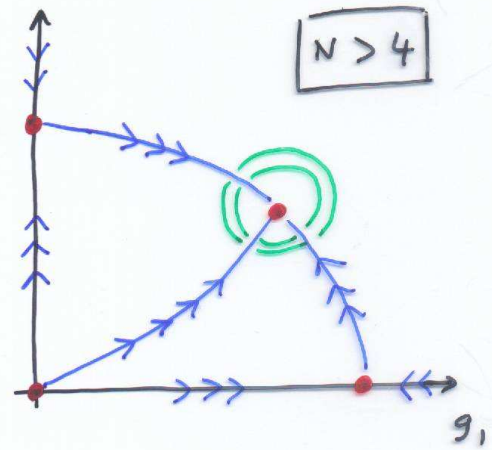
Esempio : 2 accoppiamenti

Teoria dei campi scalari con N componenti e simmetria di rotazione fra le componenti O(N)

- g_1 accoppiamento che rispetta la simmetria
- g_2 " che rompe la simmetria

$$S = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi_a \right)^2 + g_1 \Big(\underbrace{\sum_{a=1}^{N} \varphi_a^2}_{O(N)} \Big)^2 + g_2 \underbrace{\sum_{a=1}^{N} \varphi_a^4}_{(\mathbb{Z}_2)^N} \right]$$





⇨ Il comportamento a grandi distanze è:

- $N \leq 4$ O(N)-simmetrico ($g_2 \to 0$)
- $N > 4$ non simmetrico ($g_2 \to g_2^* \neq 0$)

⇨ Per qualsiasi scelta di (g_1, g_2) a piccole distanze, la teoria fluisce a grandi distanze verso il punto fisso ⊚ :

- bacino d'attrazione;
- universalità = sistemi diversi diventano uguali a grandi distanze ($g_2 \to 0$, $N \leq 4$)

UNIVERSALITÀ ≃ SEMPLICITÀ

- Risolve il paradosso:

  teoria dei campi ≡ infiniti gradi di libertà
  = infiniti parametri da fissare
  = nessuna predicibilità

- Anticipando il prossimo risultato:

  i) ad ogni scala esistono un numero finito di parametri importanti

  $g_i \neq 0$ "rilevanti" $i = 1, 2, .., K$

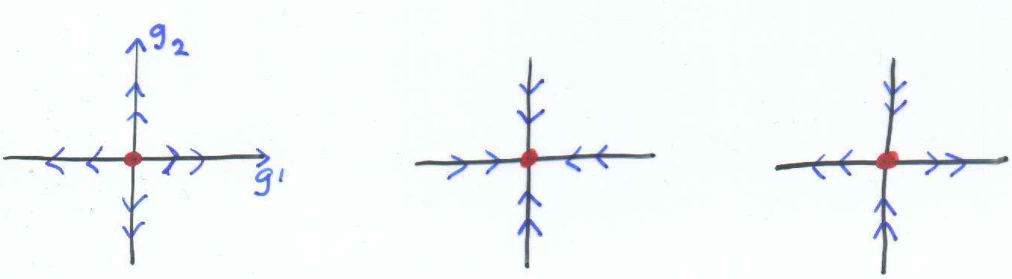
  ii) gli altri (infiniti) parametri non contano

  $g_i \to 0$ "irrilevanti" $i = K+1, K+2, \dots, \dots$

- Linearizzazione nell'intorno di un punto fisso

$$\frac{dg^i}{dt} \simeq y^i (g^i - g^{i*}) + O((g^i - g^{i*})^2)$$

$y^i > 0$	g^i	rilevante	$g^i \nearrow$	per $E \to 0$
$y^i < 0$	g^i	irrilevante	$g^i \searrow$	
$y^i = 0$	g^i	marginale	g^i = cost + correzioni	



$y^1, y^2 > 0$ cima

$y^1, y^2 < 0$ fondo valle

$y^1 > 0, y^2 < 0$ passo

Azione Effettiva

- Scriviamo l'azione che contiene tutti i termini possibili che:
  i) sono locali (polinomiali) nelle variabili di campo del problema;
  ii) sono compatibili con le simmetrie del problema;

$$S(g^i, \Lambda) = \int d^D x \sum_i \lambda_i \, \mathcal{O}_i$$

Es: $\mathcal{O}_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi\right)^2 , \quad \varphi^4$

- Analisi dimensionale:
$$d^D x \sim \Lambda^{-D}$$
$$\mathcal{O}_i \sim \Lambda^{\delta_i}$$
$$\lambda_i = \Lambda^{y_i} g_i$$
adimensionale

$$S \sim \Lambda^0 \rightarrow \boxed{y_i = D - \delta_i}$$

$0 \leq \delta_i < D$, $y > 0$ rilevante

$\delta_i = D$ $y = 0$ marginale

(ex "rinormalizzabili")

$\delta_i > D$, $y < 0$ irrilevante (ex "non-rinormalizzabile")

- Stima di grandezza: stesso risultato

$$\lambda_i \mathcal{O}_i \simeq g_i \Lambda^{y_i} E^{-y_i} \nearrow \quad y_i > 0 \text{ per } E \to 0$$

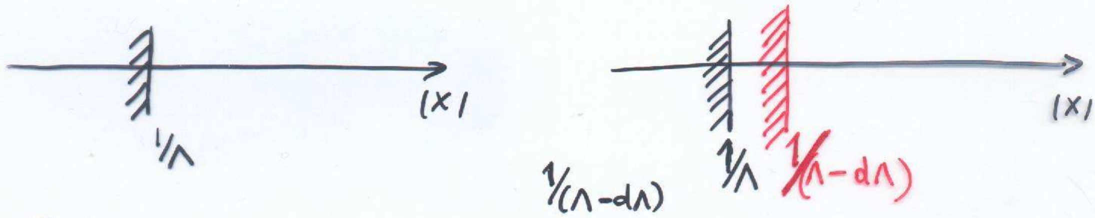
Conclusione: il numero di termini rilevanti è finito

Derivazione dell'Azione Effettiva

$$S(g^i,\Lambda) = \int_{|x|>1/\Lambda} d^D x \; \sum_i \left(g^i \Lambda^{y_i}\right) \mathcal{O}_i$$

E' una espressione approssimata, specifica della scala Λ e valida per $E \lesssim \Lambda$ ("low-energy effective action")

La trasformazione del gruppo di rinormalizzazione si può effettuare sull'azione effettiva <u>integrando via le fluttuazioni di alta energia</u> ("integrating-out" $\approx$ "coarse-graining")



$$S(g-dg,\Lambda-d\Lambda) = \int_{1/\Lambda}^{1/(\Lambda-d\Lambda)} d^D x \; S(g,\Lambda) \;\; + S(g,\Lambda)$$

- le correlazioni con $\frac{1}{\Lambda} < |x| < \frac{1}{\Lambda-d\Lambda}$ sono perse;
- <u>la trasformazione non può essere esatta</u>, neanche idealmente;
- lungo il flusso RG, gli stati massivi del sistema (=fluttuazioni $|x| \ll 1/\text{massa}$) sono integrati via e spariscono; restano gli stati di massa piccola o nulla: <u>irreversibilità del flusso RG</u> (teorema-c)

Ideologia dell'Azione Effettiva

(Weinberg, Polchinski, '92)

- tutte le teorie di campo note sono teorie effettive, valide per $E \lesssim \Lambda_i$, con Λ_i opportuni;

- le teorie a scale di energia più basse, seguendo il flusso, sono idealmente derivabili dalla teoria alla scala alta;

- in pratica questo non è quasi mai fattibile: spesso i gradi di libertà caratteristici sono diversi alle varie scale:

				Q
• Es:	QCD	$E \gg 1\,\mathrm{GeV}$	quarks & gluons	$1/3$
		$E < 1\,\mathrm{GeV}$	pions	0,1
• Es:	QHE	$E \gg 1\,\mathrm{K}$	elettroni	1
		$E \lesssim 1\,\mathrm{K}$	anyons	$1/3$, $1/5$

- in ambedue i casi, la teoria di bassa energia è stata dedotta usando le simmetrie, i fatti sperimentali, l'universalità;

- le teorie a scale più alte non sono né idealmente né praticamente derivabili dalla scala bassa, in senso inverso al flusso: devono essere immaginate.

Conclusioni

- il flusso del gruppo di rinormalizzazione permette di capire le teorie dei campi a scale diverse;

- l'analisi dell'azione effettiva dà un criterio per selezionare i termini rilevanti ($\Leftrightarrow$ universalità);

➡ quadro interpretativo ricco di sottili sfumature: consente un'analisi qualitativa più che quantitativa;

- l'uso dell'azione effettiva permette la descrizione di dinamiche fortemente interagenti ("non-perturbative") basandosi sugli aspetti qualitativi, le simmetrie, la bassa dimensionalità, lo sviluppo di bassa energia.

➡ sorprendenti risultati ottenuti negli ultimi dieci anni.