Esercizi Teoria dei Campi

Legenda: (L) esercizio svolto a lezione; **(A)** possibile approfondimento.

1. Ordini di grandezza. Stimare il numero medio giornaliero di turisti a Firenze. Confrontare con la letteratura (cf. Wikipedia). Inventare un proprio calcolo di ordine di grandezza di qualsiasi tipo e verificarne la validità.

Esempio 1: confrontare la massa di Planck con quella di un moscerino; discutere lo scattering elastico fra i due.

Esempio 2: calcolare la quantità di moto di un fascio di protoni a LHC ($E = 1$ TeV) e confrontarla con quella di un Eurostar; calcolare la potenza persa per radiazione di ciclotrone e confrontarla col consumo degli abitanti di un paesino. Calcolare la potenza che sarebbe persa da un fascio di elettroni della stessa energia.

Esempio 3: riderivare l'energia di un chilotone (liberata da $10^3 t$ di tritolo) e stimare i chilotoni di una bomba atomica e H.

2. L Calcolare il propagatore scalare massless e massivo nelle coordinate $\Delta(x)$ in n dimensioni spazio-temporali. Utilizzare la forma nello spazio-tempo Euclideo e discutere la continuazione analitica a Minkowski. Analizzare il limite a massa nulla, $m \to 0$ e in due dimensioni $d = 2 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$.

3. A Studiare la continuazione analitica della funzione ipergeometrica, dallo sviluppo in serie in $z = 0$ a quello in $z = 1$ (cf. Erdelyi et al, "Bateman project")

4. L Calcolare il path-integral della particella libera. Verificare l'eq. di Schrödinger. Verificare la legge di composizione dell'operatore d'evoluzione. Calcolare l'operatore d'evoluzione come funzione di Green dell'eq. di Schrödinger. Riderivare l'eq. di Schrödinger dal path-integral Lagrangiano.

5. Calcolare il path-integral per l'oscillatore armonico (cf. Feynman Hibbs).

6. L Calcolare la funzione a 4 punti della teoria di campo scalare dal funzionale generatore. Dimostrare il teorema di Wick per la funzione a $2n$ punti dal funzionale generatore (cf. Itzykson Zuber).

7. Dimostrare la formula di Backer-Campbell-Hausdorff,

$$e^{A+B} = e^A \ e^B \ e^{-[A,B]/2} \ , \tag{1}$$

dove A, B sono operatori e $[A, B] = C$, con C operatore proporzionale all'identità. Successivamente, calcolare il termine correttivo se C non è proporzionale all'identità ma $[A, C]$ e $[B, C]$ lo sono.

8. L Analisi dell'integrale

$$Z(g) = \int dt \ \exp\left(-t^2 - g^4\right) \ . \tag{2}$$

Calcolare la serie perturbativa, stimarne l'andamento asintotico, studiare $Z(g)$ nel piano complesso di g (cf. Zinn-Justin).

9. L Verificare l'esponenziazione dei diagrammi connessi nello sviluppo perturbativo nella teoria $\lambda\phi^4$ ad un ordine significativo, per le funzioni a 2 e 4 punti.

10. Considera la teoria $\lambda\phi^3$ descritta dalla Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda_0}{3!}\phi^3 \tag{3}$$

Disegna i grafici divergenti a 1-loop, e rinormalizza la teoria nello schema di sottrazione minimale (MS).

11. Studiare le matrici di gamma Euclidee e confrontarle con quelle Minkowskiane.

12. A Calcolare il path-integral di un fermione di Majorana, ovvero neutro, in 2 dimensioni Euclidee e a massa nulla (cf. Zinn-Justin). Discutere le proprieta' del Pfaffiano. Confrontare col fermione di Dirac in due dimensioni.

13. A Discutere lo stato fondamentale di un sistema di meccanica quantistica con potenziale a doppia buca; stimare il gap in approssimazione semiclassica (cf. Landau, Meccanica Quantistica).

14. L Studiare le conseguenze dell'invarianza di gauge nello sviluppo perturbativo del correlatore $\langle J_\mu \ J_\nu \rangle$ in QED, ovvero esplicitare le identità di Ward sui diagrammi.

15. A Calcolo della funzione beta per $\lambda\phi^4$ a N componenti con potenziale che rompe la simmetria $O(N)$ (cf. Brezin, Les Houches 1975).

16. L Calcolo del diagramma di polarizzazione del vuoto in QED: utilizzare la regolarizzazione dimensionale, derivare la parte immaginaria e scrivere l'espressione come integrale dispersivo.

17. L Soluzione dell'equazione di Callan-Symanzik per il correlatore $\langle\phi(q)\phi(-q)\rangle$ nella teoria $\lambda\phi^4$ in $d = 4 - \epsilon$. Utilizzare le espressioni del primo ordine perturbativo:

$$\beta(g) = -\epsilon g - bg^2 \ , \qquad \gamma(g) = -\epsilon - ag^2 \ , \tag{4}$$

dove a, b sono constanti.

18. A Calcolo della funzione beta di QCD col metodo del background field (cf. Peskin).

19. A Regolarizzazione dimensionale di espressioni con matrici gamma e anomalia chirale (cf. 't Hooft Veltmann, Phys Lett B (1975))

20. L Calcolo della sezione d'urto non polarizzata del processo $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ in QED (considera per semplicità $m_e = m_\mu = 0$)

21. L Il funzionale generatore per un campo di gauge libero in R_ξ - gauge è:

$$Z_0[J] = \int [dA_\mu] \exp\{i \int d^4x [\frac{1}{2} A^a_\mu K^{\mu\nu}_{ab}(x) A^b_\nu + J^a_\mu A^{\mu a}]\} \tag{5}$$

con

$$K^{\mu\nu}_{ab}(x) = \delta_{ab}[g^{\mu\nu}\partial^2 - (1 - \frac{1}{\xi})\partial^\mu\partial^\nu]. \tag{6}$$

Definendo la funzione di Green $G^{\mu\nu}_{ab}(x-y)$ come:

$$\int d^4y K^{\mu\nu}_{ab}(x-y) G^{bc}_{\nu\lambda}(y-z) = g^\mu_\lambda \delta^c_a \delta^4(x-z) \tag{7}$$

con

$$K^{\mu\nu}_{ab}(x-y) = \delta^4(x-y) K^{\mu\nu}_{ab}(x), \tag{8}$$

ricavare il propagatore per il campo di gauge nello spazio degli impulsi.

22. L La Lagrangiana per un campo di gauge libero massivo è data da:

$$L_0 = -\frac{1}{4}V_{\mu\nu}V^{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2 V_\mu V^\mu \qquad \text{con} \qquad V_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu \tag{9}$$

seguendo le linee dell'esercizio precedente derivare l'espressione per il propagatore nello spazio degli impulsi. Studiare la convergenza dei diagrammi di Feynman della QED massiva. Studiare il limite di massa nulla.

23. Il gauge assiale corrisponde a $n^\mu A_\mu = 0$ con n^μ quadrivettore space-like. Il corrispondente termine di gauge-fixing è

$$\frac{1}{2\xi}(n_\mu A^\mu)^2 \tag{10}$$

Derivare l'espressione per il propagatore nello spazio degli impulsi.

Il gauge di Coulomb corrisponde a $\vec{\partial} \cdot \vec{A} = 0$. Derivare l'espressione per il propagatore nello spazio degli impulsi. (*Suggerimento*: riscrivere la condizione di gauge come: $\partial^\mu A_\mu - c_\mu \partial^\mu (c_\nu A^\nu) = 0$ con $c_\mu = (1, 0, 0, 0)$)

24. L In una teoria di gauge non-abeliana con fermioni, descritta dalla Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu a}F^a_{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma_\mu D^\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \tag{11}$$

con $D^\mu\psi = (\partial^\mu - igT^a A^{a\mu})\psi$, mostrare che, all'ordine più basso nella costante di accoppiamento g, l'ampiezza di scattering fermionica

$$\psi^a + \psi^b \to \psi^c + \psi^d \tag{12}$$

è la stessa nelle gauge covarianti, in gauge assiale e in gauge di Coulomb.

25. L Mostrare l'invarianza di gauge dell'ampiezza di scattering Compton $e^-\gamma \to e^-\gamma$ (trascurando la massa dell'elettrone). (*Suggerimento*: è sufficiente mostrare che per $\varepsilon^\mu \propto k^\mu$ il contributo alla somma delle 2 ampiezze è nullo)

26. Fai un esempio di una Lagrangiana invariante sotto una trasformazione di simmetria discreta e mostra come non vi siano bosoni di Goldstone nello spettro (cf. Cheng e Li)

27. Considera una teoria di gauge abeliana, con campo di gauge A_μ, spontaneamente rotta. Siano Φ_1 e Φ_2 le componenti reali di un campo Φ con $<\Phi_1>= v$, $<\Phi_2>= 0$.

Mostra che l'ampiezza:

$$\Phi_1'(k_1) + \Phi_1'(k_2) \to A(k_3) + A(k_4) \tag{13}$$

è indipendente da ξ (ξ= parametro di gauge delle R_ξ gauges e $\Phi_1' = \Phi_1 - v$). Fare il conto a livello albero.

28. Il potenziale scalare usuale del Modello Standard è:

$$V(\phi) = -\mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 \tag{14}$$

Scrivere altri 2 invarianti di $SU(2) \times U(1)$ quartici in ϕ che si riconducono alla forma in $V(\phi)$. (*Soluzione:* $\lambda_1(\phi^\dagger\vec{\tau}\phi)\cdot(\phi^\dagger\vec{\tau}\phi)$; $\lambda_2\sum_{a,b}(\phi^\dagger\tau^a\tau^b\phi)(\phi^\dagger\tau^a\tau^b\phi)$)

29. Considera un set di scalari che si trasformano come un doppietto di $SU(2)_W$ ed un tripletto di $SU(3)_c$: h^i_α $(i = 1,2; \alpha = 1,2,3)$. Mostra che sia il numero leptonico L che il numero barionico B sono non conservati, ma la combinazione $B - L$ lo è. (*Soluzione:* Gli accoppiamenti di Yukawa che si possono scrivere sono: $\mathcal{L}_Y = f_1\bar{l}_{iL}h^i_\alpha q^\alpha_R + f_2\bar{q}_{i\alpha L}h^i_\beta q^c_{\gamma R}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ ....)

30. Calcolare la larghezza di decadimento di un bosone vettore V con massa M ed accoppiamento ai fermioni dato da: $\mathcal{L}_{int} = -ig_V\gamma_\mu\frac{1}{2}(c^f_V - c^f_A\gamma_5)$.

31. Mostrare che nel Modello Standard la larghezza di decadimento del bosone di Higgs in due bosoni W è:

$$\Gamma_{WW} = \frac{\sqrt{2}G_F M_W^2 M_H}{8\pi}\frac{\sqrt{1-x_W}}{2x_W}(3x_W^2 - 4x_W + 4) \tag{15}$$

con $x_W = (4M_W^2)/(M_H^2)$. (*Suggerimento:* usa il sitema di riferimento in cui il bosone di Higgs è a riposo)

32. Calcola la larghezza di decadimento del bosone di Higgs in due bosoni Z (supponendo $M_H > 2M_Z$).

33. Calcola la larghezza di decadimento del bosone di Higgs in $t\bar{t}$ (supponendo $M_H > 2m_t$).

34. Mostra che nel limite $M_H >> M_W$ il decadimento $H \to W^+W^-$ e' dominato da $H \to W_L^+W_L^-$, dove W_L sono le componenti longitudinali di W.