

Capitolo 1

Teoria dei campi - Rush finale

1.1 Cappelli

Le costanti fondamentali che ci interessano sono:

$$\hbar \simeq 10^{-34} J \cdot s = 6.6 \cdot 10^{-22} MeV = 6.6 \cdot 10^{-16} eV$$

$$c = 3 \cdot 10^{10} cm/s = 3 \cdot 10^8 m/s = 3 \cdot 10^5 km/s$$

Come conseguenza del fatto che in unità naturali $\hbar = c = 1$, si misura tutto in unità di massa (o di energia): ad esempio le lunghezze hanno dimensione di massa -1 , così come il tempo. Sapendo che $1 = \hbar c = 197 MeV \cdot fm$ possiamo determinare il fattore di conversione:

$$1 MeV = \frac{1}{197} fm^{-1} \Rightarrow 1 GeV^{-1} \sim 0.2 fm$$

Ogni particella ha una sua lunghezza caratteristica associata, la lunghezza d'onda Compton, associata alla sua interpretazione come onda:

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} \equiv \frac{1}{m}$$

dove m è la massa della particella. Se consideriamo i pioni, che hanno massa intorno ai $140 MeV$, la lunghezza Compton ad essi associata è:

$$\lambda_\pi = \frac{1}{140 MeV} = 7 \cdot 10^{-3} MeV^{-1} = 7 GeV^{-1} \sim 1.4 fm$$

Tale distanza è più o meno il range delle interazioni forti, e procedendo a ritroso in questo ragionamento Yukawa diede la sua predizione della massa del mediatore dell'interazione tra nucleoni; infatti se scriviamo un generico potenziale di tipo Yukawiano:

$$V_Y = \frac{e^{-\frac{r}{m}}}{r} \equiv \frac{e^{-\lambda_c r}}{r}$$

osservando che le interazioni forti avevano un range dell'ordine dei $2 fm$, si poteva dedurre che il loro portatore dovesse avere una massa dell'ordine del centinaio di MeV .

Viceversa, la massa del protone è circa un GeV , che corrisponde ad una lunghezza Compton di $0.2 fm$: ci si potrebbe chiedere perchè non sia tale distanza ad essere caratteristica per l'interazione forte, ma la risposta sta nel fatto che

- le distanze caratteristiche si riferiscono alla massa del portatore dell'interazione (ad esempio, elettromagnetismo, massa 0 \rightarrow range infinito), e il protone non è il portatore dell'interazione forte, quindi non c'entra un cazzo;
- il pione non è in senso stretto il portatore dell'interazione forte (secondo la QCD il gluone lo è), bensì è il portatore della forza forte residua, ovvero la forza che tiene insieme i nucleoni. Ma possiamo comunque vedere che è un protagonista attivo nel caso di scattering su adroni: ad esempio il protone risulta costituito da quark, ognuno dei quali è a sua volta circondato da una nuvola di pioni (in maniera simile alla nuvola elettronica attorno al fotone, responsabile del Lamb Shift), dunque i primi prodotti di reazione ad essere estratti dal nucleone saranno proprio pioni.

Carrellata sulle interazioni

Per quanto riguarda i vari tipi di interazioni e le loro rispettive costanti di accoppiamento, abbiamo:

- l'interazione forte, con costante di accoppiamento adimensionale α_s che assume valori tra 0.1 e 1, e ha range $\frac{1}{m_\pi} \sim 1 fm$;
- l'interazione elettromagnetica, con costante di accoppiamento adimensionale $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \sim \frac{1}{137}$, e range infinito;
- l'interazione debole, con costante di accoppiamento dimensionale $G_F = 10^{-5} GeV^2$; per avere un confronto di ordini di grandezza si usa moltiplicare le costanti dimensionali per una opportuna potenza della massa del protone:

$$G_F m_p^2 \sim 10^{-5}$$

Il range dell'interazione debole risulta essere legato alla lunghezza Compton dei suoi mediatori massivi, W^\pm, Z :

$$\frac{1}{m_W}, \frac{1}{m_Z} \sim 10^{-2} GeV^{-1} \sim 2 \cdot 10^{-3} fm$$

- infine abbiamo l'interazione gravitazionale, con costante $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N}{m^2 kg^2}$. Poichè anche in questo caso il mediatore, il gravitone, ha massa nulla, il range dell'interazione è infinito, e si ha

$$G m_p^2 \sim 10^{-39}$$

Per capire perchè alcune costanti hanno dimensione, dobbiamo considerare la lagrangiana dei processi corrispondenti, ad esempio la lagrangiana debole (in teoria di Fermi) ha la forma

$$\mathcal{L}_W = G_F J^\mu J_\mu$$

Poichè l'azione, avendo le dimensioni di $\hbar = 1$, deve essere adimensionale, è necessario che la densità lagrangiana (che è integrata in d^4x) abbia dimensione di massa 4. Quindi, essendo $J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, e avendo i campi spinoriali dimensione di massa $\frac{3}{2}$, il termine $J^\mu J_\mu$ ha dimensione 6 e abbiamo bisogno di una costante di accoppiamento di dimensione di massa -2. Analogamente la lagrangiana di Einstein:

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{G_N} \int d^4x \sqrt{g} \mathcal{R}$$

dove \mathcal{R} è il tensore di Ricci, che ha dimensione 2: l'integrale $\int d^4x \sqrt{g} \mathcal{R}$ ha dimensione -2 (essendo \sqrt{g} adimensionale) e così G_N .

Richiami di elettromagnetismo

Alle scale atomiche, il sistema fondamentale è l'atomo di idrogeno, i cui livelli energetici sono espressi dalla formula

$$E_n = \frac{1}{2} m \alpha^2 \frac{1}{n^2}$$

da cui l'energia dello stato fondamentale è $\frac{1}{2} m \alpha^2 = 13.6 eV$. Questo risultato si può ottenere mediante il teorema del viriale: per un sistema elettromagnetico o coulombiano, il cui moto avvenga in una regione limitata di spazio, vale

$$\langle V \rangle = -2 \langle T \rangle$$

da cui

$$\langle E \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle = -\langle T \rangle = \frac{1}{2} m v^2$$

Considerando che la velocità dell'elettrone nell'orbita più vicina al nucleo è circa α per la velocità della luce, si ottiene proprio

$$E_0 = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \alpha^2$$

Se consideriamo inoltre che le correzioni relativistiche all'energia dell'atomo di idrogeno sono di ordine $\frac{v^2}{c^2}$, ci accorgiamo facilmente che esse sono di ordine $\alpha^2 \sim 10^{-4}$ dunque è ragionevole studiare l'elettrone in una teoria non relativistica.

Se consideriamo anche le distanze tipiche dell'atomo di idrogeno, troviamo:

$$-\frac{1}{2} m \alpha^2 = -\frac{1}{2} |\langle V \rangle| \Rightarrow \frac{e^2}{4\pi r_0} = \frac{1}{2} m \alpha^2 \Rightarrow r_0 = \frac{1}{m \alpha}$$

Osserviamo che $\frac{1}{m}$, ovvero la lunghezza Compton dell'elettrone, non è la scala di lunghezze tipica del mondo atomico, bensì lo è la sua combinazione con la costante di struttura fine; r_0 è il raggio di Bohr ($\sim 0.5 \text{ \AA}$), e si dice che α introduce una scala nella fisica atomica.

La lunghezza Compton dell'elettrone risulta importante nel caso dello scattering Compton, infatti nello scattering di un elettrone con un fotone di lunghezza d'onda λ , esso subisce una variazione di lunghezza d'onda proporzionale a

$$\Delta \lambda = \lambda_0 (1 - \cos \phi)$$

dove ϕ è l'angolo di scattering del fotone. Pensando l'elettrone come oscillazione di lunghezza d'onda $\lambda_c \sim 2\pi m$, in esperimenti di scattering di elettroni su reticolo (passo $d \sim 1 \text{ \AA}$) possiamo ottenere una risoluzione di $\frac{\lambda_c}{d} \sim 10^{-2}$.

Tuttavia la lunghezza Compton non è l'unica scala di lunghezze associabile all'elettrone; vi è infatti anche il raggio classico dell'elettrone, definito come

$$r_c = \frac{e^2}{4\pi m c^2} \equiv \frac{\alpha}{m} \sim 2.9 fm$$

Esso rappresenta la distanza che si deve avere tra due elettroni affinché l'energia elettrostatica del sistema eguagli la massa di riposo dell'elettrone. Inoltre, tale lunghezza è legata al limite di bassa energia della sezione d'urto Thomson:

$$\sigma_{th} \sim r_c^2 \sim \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 \sim 8.41 \cdot 10^{-30} m^2 = 80 mb$$

$$1b = 10^{-24} cm^2 = 10^{-28} m^2$$

Nella pittura classica, la sezione d'urto è sostanzialmente un'area, che rappresenta la superficie circolare attorno ad un bersaglio su una targhetta, entro cui si può considerare racchiusa l'interazione con le particelle proiettile; tuttavia questa interpretazione nel caso di interazioni a lungo range come quella coulombiana va presa con le dovute precauzioni, mentre è una buona approssimazione nel caso della tipica sezione d'urto adronica a un GeV (?):

$$\sigma_{pp} \sim r_p^2 \sim 1,6 \mu b$$

Se consideriamo lo scattering e^+e^- ad energie dell'ordine del GeV, la massa dell'elettrone è trascurabile e la sezione d'urto sarà determinata sostanzialmente dalle dimensioni:

$$\sigma_{e^+e^-} \sim \frac{\alpha^2}{s} = 1 GeV^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-5} = 0.2 \cdot 10^{-5} fm^2 = 20 nb$$

Vediamo dunque che tale sezione d'urto è più piccola di tre ordini di grandezza di quella adronica. Se consideriamo adesso la sezione d'urto per una interazione neutrino-nucleone:

$$\sigma_{\nu n} \sim G_F^2 s = G_F^2 m_p^4 \frac{s}{m_p^4} \sim 10^{-10} \frac{s}{m_p^4}$$

Per quanto riguarda s :

$$s = (p_n + p_\nu)^2 = m_n^2 + m_\nu^2 + 2m_n E_\nu \sim m_n^2 \sim m_p^2$$

$$\Rightarrow \sigma_{\nu n} \sim 10^{-10} \cdot 0.04 fm^2 = 40 fb$$

cioè la sezione d'urto debole è sei ordini di grandezza più piccola di quella leptonica.

Consideriamo adesso il decadimento del muone:

$$\Gamma_\mu \sim \frac{G_F^2 m_\mu^3}{192\pi^3} \sim G_F^2 m_p^4 \frac{m_\mu^4}{m_p^4} m_\mu = 10^{-14} \cdot 200 MeV$$

ma poichè $\hbar = 1$ abbiamo che

$$1 MeV = \frac{1}{6.6} 10^{22} s^{-1}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{1}{\Gamma_\mu} \sim 0.033 \cdot 10^{-8} s = 3.3 \mu s$$

in buon accordo con i $2.2 \mu s$ sperimentali. Se consideriamo vite medie adroniche i tempi diventano molto più piccoli:

$$\tau \sim \frac{\hbar}{m_\pi} \sim 10^{-23} s$$

mentre per calcolare la lunghezza d'onda della luce visibile possiamo considerare una tipica transizione atomica, dell'ordine dell'elettronvolt:

$$h\nu = 1 eV \Rightarrow \nu \sim \frac{1 eV}{6.6 \cdot 10^{-16} eV \cdot s} \sim 10^{15} Hz$$

Infine, possiamo ottenere il fattore di conversione tra elettronvolt e kelvin considerando la probabilità di una transizione atomica a temperatura ambiente:

$$e^{-\beta E} = e^{\frac{1}{k_B 300K} 1eV} \sim e^{-40} \Rightarrow 1eV = 1.16 \cdot 10^{-4} K$$

Integrali gaussiani

Nel seguito faremo abbondante uso di alcuni risultati sugli integrali gaussiani, ovvero integrali della forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2}$$

con $a > 0$ La soluzione dell'integrale è la seguente

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Nel caso in cui si abbia un termine lineare all'esponente il risultato è il seguente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2+bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}$$

Possiamo generalizzare questi integrali al caso di più dimensioni, e dove al posto del numero positivo a abbiamo una forma quadratica simmetrica non degenera A :

$$\int dx_1 \dots dx_n e^{-\frac{1}{2} x^T A x + B^T x} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}} e^{\frac{1}{2} B^T A^{-1} B}$$

Per risolvere tale integrale osserviamo che A è diagonalizzabile mediante una trasformazione ortogonale:

$$A = O^T \Lambda O$$

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

dove i λ_i sono gli autovalori di A . Definiamo poi i vettori

$$y = O x$$

$$\tilde{B} = O B$$

da cui

$$\int dy_1 \dots dy_n \left| \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right| e^{-\frac{1}{2} \sum_i y_i \lambda_i y_i + \tilde{B}^T y}$$

Poichè la trasformazione è ortogonale il determinante jacobiano $\left| \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right|$ è 1. Nel caso in cui $B = 0$, abbiamo semplicemente n integrali gaussiani ordinari, da cui il risultato

$$\sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\lambda_1 \dots \lambda_n}} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}}$$

Se invece $B \neq 0$, definiamo la seguente traslazione:

$$x \rightarrow x + A^{-1}B$$

Questa trasformazione lascia invariata la misura, e ricordando che $A^T = A$ l'esponentiale diventa

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(x + A^{-1}B)^T A (x + A^{-1}B) + B^T x + B^T A^{-1}B &= -\frac{1}{2}x^T A x - \frac{B^T x}{2} - \frac{x^T B}{2} - \frac{B^T A^{-1}B}{2} + B^T x + B^T A^{-1}B = \\ &= \frac{1}{2}B^T A^{-1}B \end{aligned}$$

A volte questo integrale si incontra nella forma

$$\int dx_1 \dots dx_n e^{-x^T A x + B^T x} = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}} e^{\frac{1}{4}B^T A^{-1}B}$$

Nel caso le variabili di integrazione siano complesse si ha

$$\int d\bar{z} dz e^{-\bar{z}Az + \bar{B}z + \bar{z}B} = 2\pi i e^{\frac{\bar{B}B}{A}}$$

dove si suppone che A abbia almeno una piccola parte reale positiva. Si ha infatti

$$d\bar{z}dz = 2i$$

$$\begin{aligned} -\bar{z}Az + \bar{B}z + \bar{z}B &= -Ax^2 + (\bar{b} + b)x - Ay^2 + i(b - \bar{b})y = -Ax^2 + 2\text{Re}[B]x - Ay^2 + 2\text{Im}[B]y \\ 2i \int dx dy e^{-Ax^2 + 2\text{Re}[B]x - Ay^2 + 2\text{Im}[B]y} &= 2\pi i e^{\frac{\text{Re}[B]^2 + \text{Im}[B]^2}{A}} = 2\pi i e^{\frac{\bar{B}B}{A}} \end{aligned}$$

Generalizzando a più dimensioni anche l'integrale gaussiano complesso:

$$\int \prod_i \frac{d\bar{z}_i dz_i}{2\pi i} e^{-\bar{z}_i A_{ij} z_j + \bar{B}_i z_i + \bar{z}_i B_i} = \frac{1}{\det A} e^{\bar{B}_i A_{ij}^{-1} B_j}$$

dove A è una forma quadratica che ha almeno una piccola parte hermitiana.

1.1.1 La continuazione analitica e il propagatore di Feynman

La continuazione analitica è una procedura mediante la quale si estende il dominio di una funzione da un certo intervallo di valori ad un altro[...]

Se consideriamo il propagatore di Feynman nello spazio-tempo minkowskiano:

$$\Delta_F(x) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

dove $i\epsilon$ a denominatore è la prescrizione di Feynman per il cammino di integrazione. In questo modo infatti i poli del propagatore sono situati in (FIGURA)

e corrispondono alla propagazione in avanti nel tempo per particelle, e indietro per le antiparticelle. Possiamo pensare di effettuare una continuazione analitica da valori reali a complessi per la variabile temporale p_0 del quadrimpulso mediante una rotazione, detta *rotazione di Wick*, sul piano complesso di p_0 :

$$p_0 \rightarrow p_E = -ip_0$$

e corrispondentemente dovremo ruotare anche la componente temporale della posizione, x_0 :

$$x_0 \rightarrow x_E = ix_0$$

In questa rotazione l'asse degli impulsi non incontra i poli del propagatore, che in termini delle nuove variabili si riscrive

$$\Delta_F(x_E) \equiv \Delta_E(x) = - \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip_E x_E}}{-(p_E^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon} = \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip_E x_E}}{p_E^2 + m^2}$$

$$p_E = (p_E, \vec{p})$$

Osserviamo che è sparito il fattore $i\epsilon$ perchè il denominatore non ha più poli.

Le funzioni speciali

Per studiare la forma del propagatore euclideo nel caso massivo e in quello massless abbiamo bisogno di introdurre alcune funzioni particolari. La prima è la funzione Gamma di Eulero, che nella sua forma integrale è definita da:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-t}$$

Tale funzione risulta utile per calcolare il volume della sfera in $n - 1$ dimensioni, infatti se consideriamo l'integrale gaussiano

$$I_n = \int d^n p e^{-p^2} = (\sqrt{\pi})^n$$

esso può essere calcolato anche in altro modo:

$$I_n = V_n \int_0^\infty p^{n-1} e^{-p^2} dp$$

dove V_n è proprio il volume della sfera unitaria in $n - 1$ dimensioni. Col cambio di variabile $t = p^2$, da cui $dt = 2p dp$, si ottiene

$$I_n = \frac{V_n}{2} \int t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} dt = \frac{V_n \Gamma(\frac{n}{2})}{2} \Rightarrow V_n = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

Alcuni valori particolari per la Γ sono:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

da cui ritroviamo ad esempio il volume della sfera in due (circonferenza) e tre (sfera) dimensioni:

$$V_1 = 2\pi$$

$$V_n = 4\pi$$

Consideriamo quindi il propagatore euclideo a massa nulla in n dimensioni

$$\Delta_E(x) = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{e^{ipx}}{p^2}$$

dove con p^2 intendiamo p_E^2 . E' possibile verificare che tale propagatore avrà un andamento del tipo $(x^2)^{-\frac{n-2}{2}}$, introducendo il cosiddetto *Schwinger proper time* s :

$$\frac{1}{p^2} = \int_0^\infty ds e^{-sp^2}$$

$$\Delta_E(x) = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{e^{ipx}}{p^2} = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} e^{ipx} \int_0^\infty ds e^{-sp^2} =$$

Possiamo risolvere l'integrale gaussiano in p :

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^\infty ds \left(\sqrt{\frac{\pi}{s}} \right)^n e^{-\frac{x^2}{4s}}$$

Con la sostituzione $t = \frac{x^2}{4s}$, e dunque $ds = -\frac{x^2}{4t^2} dt$, si ha:

$$\frac{(\sqrt{\pi})^n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty dt \left(\frac{x^2}{4t} \right)^{-\frac{n}{2}} \frac{x^2}{4t^2} e^{-t} = \frac{1}{2^n (\sqrt{\pi})^n} \left(\frac{x^2}{4} \right)^{1-\frac{n}{2}} \int_0^\infty dt t^{\frac{n}{2}-2} e^{-t} = \frac{1}{2^n (\sqrt{\pi})^n} \left(\frac{x^2}{4} \right)^{1-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) =$$

Utilizzando la relazione

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

possiamo riscrivere

$$= \frac{1}{2^n (\sqrt{\pi})^n} \left(\frac{x^2}{4} \right)^{1-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\frac{n}{2} - 1} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(\sqrt{\pi})^n} (x^2)^{-\frac{n-2}{2}} \frac{1}{n-2} = \frac{1}{V_n(n-2)} \frac{1}{(x^2)^{\frac{n-2}{2}}}$$

Vediamo che questa formula è singolare per $n = 2$; consideriamo allora il limite per $n \rightarrow 2$:

$$\epsilon = 2 - n$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{V_{2-\epsilon}} \frac{1}{(x^2)^{-\frac{\epsilon}{2}}} \sim \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{V_{2-\epsilon}}$$

$$\frac{1}{\epsilon} e^{-\frac{\epsilon}{2} \log x^2} \sim \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \log x^2 \right)$$

Abbiamo quindi una singolarità infrarossa rappresentata dal termine $\frac{1}{2\pi\epsilon}$

1.2 Il path integral

Il path integral, o integrale sui cammini, è uno strumento sviluppato da Feynman sulla base di alcune idee di Dirac, mediante il quale è possibile dare una formulazione alternativa della meccanica quantistica. Questa formulazione è indispensabile per alcune teorie come le teorie di gauge non abeliane, che non sono trattabili col formalismo canonico, inoltre costituisce uno strumento euristico di grande valore. Le due idee principali alla sua base sono:

- l'approssimazione semiclassica della funzione d'onda (Dirac, 1933);
- il principio di sovrapposizione.

Dalla teoria di Dirac sappiamo che la funzione d'onda di una particella ad un certo istante t è proporzionale all'esponenziale dell'azione valutata sulla traiettoria classica:

$$\psi(t) \sim e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}[x_{cl}(t), t]}$$

Introducendo la meccanica quantistica di solito si fa il parallelo con l'ottica geometrica, ma sappiamo che questa interpretazione fallisce nel caso della doppia fenditura, in cui per ottenere l'ampiezza totale è necessario sommare su due cammini, corrispondenti al passaggio di elettroni (o fotoni) in una o nell'altra fenditura. Veniamo quindi subito in contatto con l'idea di dover sommare su più di un cammino:

$$\psi \sim \sum_{paths} e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t), t]}$$

La traiettoria classica è favorita rispetto alle altre perchè rende minima (in generale stazionaria) l'azione, e corrispondentemente la fase dell'esponenziale varierà minimamente, nel limite classico. Infatti, se consideriamo una qualunque altra traiettoria $x(t)$ diversa dalla traiettoria classica, avremo

$$S[x(t)] > S[x_{cl}(t)]$$

$$e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} = e^{\frac{i}{\hbar} (S[x_{cl}(t)] + \delta S)} = e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}(t)]} e^{\frac{i}{\hbar} \delta S}$$

dunque sommando le ampiezze per tutte le possibili traiettorie otteniamo

$$\sum_{paths} e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t), t]} = e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}(t)]} \left(1 + \sum_{paths} e^{\frac{i}{\hbar} \delta S[x(t)]} \right)$$

I termini della sommatoria sono fortemente oscillanti e danno media nulla nel limite $\hbar \rightarrow 0$, per cui l'unico contributo che rimane è quello dovuto alla traiettoria classica. Nel caso della doppia fenditura il moto è di tipo quasi classico con due possibili traiettorie, che sono non classiche perchè in una traiettoria classica l'elettrone si muoverebbe in linea retta attraverso le fenditure. Essendo il moto non classico la formula di Dirac apparentemente è inservibile, ma possiamo aspettarci che resti valida se suddividiamo il moto in piccoli intervalli di tempo, entro i quali l'azione varia poco e possiamo approssimare la traiettoria con un segmento. Possiamo considerare l'azione come un funzionale¹ della traiettoria:

$$S[q(t)] = \int^t L(q, \dot{q}, t') dt' = \int^t (p\dot{q} - H(p, q)) dt'$$

¹Si definisce *funzionale* una corrispondenza tra funzioni e numeri.

Ricordiamo dalla meccanica analitica una utile relazione:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q} \frac{dq}{dt} = -H + p\dot{q}$$

L'operatore di evoluzione

La formulazione della meccanica quantistica in termini di path integral si incentra non più sulla promozione delle variabili p e q ad operatori su uno spazio di Hilbert, bensì si basa sul concetto di propagatore, o di operatore di evoluzione: data una funzione d'onda $\psi(q, t)$, la funzione d'onda ad un istante successivo t' , e in un punto q' , è definita come

$$\psi(q', t') = \int dq U(q', t'; q, t) \psi(q, t)$$

Poichè in meccanica quantistica l'interpretazione che si dà alla funzione d'onda è quella di ampiezza di probabilità di avere una particella in un dato punto ad un dato istante, il propagatore assume il significato di ampiezza di probabilità di transizione da un punto q, t a un punto q', t' :

$$P(q', t'; q, t) = |U(q', t'; q, t)|$$

Troveremo adesso una forma esplicita per l'operatore di evoluzione, tornando al formalismo operatoriale e all'equazione di Schroedinger:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

Se introduciamo un set di autostati della posizione

$$\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle$$

che soddisfano a relazioni di ortogonalità

$$\langle q'|q\rangle = \delta(q' - q)$$

e completezza

$$\int dq |q\rangle \langle q| = 1$$

allora la funzione d'onda $\psi(q, t)$ sarà la proiezione sulla base delle coordinate del vettore d'onda $|\psi(t)\rangle$:

$$\psi(q, t) = \langle q|\psi(t)\rangle$$

L'equazione di Schroedinger, se l'hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo, si può integrare e si ottiene

$$|\psi(t')\rangle = e^{-i(t'-t)H} |\psi(t)\rangle$$

Proiettiamo sul vettore $|q'\rangle$, e introduciamo un set completo di autostati della posizione:

$$\langle q|\psi(t')\rangle = \langle q'|e^{-i(t'-t)H} \int dq |q\rangle \langle q|\psi(t)\rangle$$

$$\Rightarrow \psi(q', t') = \int dq \langle q'|e^{-iH(t'-t)}|q\rangle \psi(q, t)$$

dunque abbiamo ottenuto la forma esplicita del propagatore:

$$U(q', t'; q, t) = \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle$$

come elemento di matrice tra gli stati iniziale e finale dell'operatore $e^{-iH(t'-t)}$. Osserviamo che i vettori della base delle coordinate non dipendono dal tempo, ma con un abuso di notazione possiamo identificare $|q\rangle$ con $|q(t)\rangle$ e $|q'\rangle$ con $|q'(t')\rangle$, e scrivere

$$U(q', t'; q, t) = \langle q' | q \rangle$$

Path integral hamiltoniano

Per introdurre il path integral, suddivideremo l'intervallo $\Delta T = t' - t$ in tanti intervalli più piccoli. Utilizzeremo inizialmente l'approccio hamiltoniano, per poi introdurre quello lagrangiano.

Il punto di partenza è uno stato iniziale $|q_i\rangle = |q_i, 0\rangle$, che evolve verso uno stato finale $|q_f\rangle = |q_f, t\rangle$ con una certa ampiezza di probabilità

$$U(q_f, t; q_i, 0) = \langle q_f | e^{-iHt} | q_i \rangle$$

Suddividiamo l'intervallo $(0, t)$ in N sottointervalli di ampiezza $\epsilon = \frac{t}{N}$, e introduciamo all'interno dell'elemento di matrice $N - 1$ set completi di autostati della posizione, e N set completi di autostati dell'impulso, così definiti:

$$\begin{aligned} \hat{p}|p\rangle &= p|p\rangle \\ \langle p'|p\rangle &= \delta(p - p') \\ \int dp |p\rangle \langle p| &= 1 \end{aligned}$$

Definiamo inoltre

$$\langle q|p\rangle = \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\pi}}$$

ovvero l'autofunzione dell'impulso proiettata sulla base delle coordinate. Scomponiamo adesso l'operatore e^{-iHt} :

$$\prod_{j=1}^N e^{-i\epsilon H}$$

Per ϵ sufficientemente piccolo possiamo sviluppare al prim'ordine l'esponenziale:

$$e^{-i\epsilon H} \sim (1 - i\epsilon H)$$

Inseriamo adesso le varie completezze nell'elemento di matrice, in modo che H abbia sempre un autostato della posizione a destra e un autostato dell'impulso a sinistra:

$$\begin{aligned} \int dq_1 \cdots dq_{N-1} \int dp_1 \cdots dp_N \langle q_f | p_N \rangle \langle p_N | (1 - i\epsilon H) | q_{N-1} \rangle \langle q_{N-1} | p_{N-1} \rangle \langle p_{N-1} | (1 - i\epsilon H) | q_{N-2} \rangle \langle q_{N-2} | p_{N-2} \rangle \langle p_{N-2} | \cdots \\ \cdots | q_1 \rangle \langle q_1 | p_1 \rangle \langle p_1 | (1 - i\epsilon H) | q_i \rangle \end{aligned}$$

Definiamo l'*hamiltoniana classica* come l'elemento di matrice:

$$\langle p|H|q\rangle \frac{e^{-ipq}}{\sqrt{2\pi}} H(p, q)$$

In questo modo, se $H = \frac{p^2}{2m} + V(\hat{q})$, $V(\hat{q})$ sarà valutato nel punto q e \hat{p}^2 nel punto p , concordemente con le regole canoniche di quantizzazione. Potremmo avere una ambiguità relativa all'ordinamento nel caso l'hamiltoniana contenga termini del tipo pq o qp , ma non è il nostro caso. Valutiamo adesso il generico fattore dell'integrando:

$$\langle q_i|p_i\rangle \langle p_i|(1 - i\epsilon H)|q_{i-1}\rangle = \frac{e^{ip_i q_i}}{\sqrt{2\pi}} (1 - i\epsilon H(p_i, q_{i-1})) \frac{e^{-ip_i q_{i-1}}}{\sqrt{2\pi}}$$

Sempre perchè ϵ è piccolo, possiamo considerare all'indietro l'espressione $(1 - i\epsilon H(p_i, q_{i-1}))$ come l'espansione al prim'ordine dell'esponenziale:

$$\frac{e^{ip_i(q_i - q_{i-1}) - i\epsilon H(p_i, q_{i-1})}}{2\pi}$$

Se mettiamo insieme tutti gli N fattori, dopo aver definito $q_i = q_0$ e $q_f = q_N$, otteniamo

$$\frac{e^{i \sum_{j=1}^N p_j(q_j - q_{j-1}) - i\epsilon \sum_j H(p_j, q_{j-1})}}{(2\pi)^N}$$

L'integrale funzionale a questo punto è definito come il limite per $N \rightarrow \infty$ della precedente espressione, integrata su tutte le traiettorie e su tutti gli impulsi:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \int dq_1 \cdots dq_{N-1} \int dp_1 \cdots dp_N & \left[\frac{e^{i \sum_{j=1}^N p_j(q_j - q_{j-1}) - i\epsilon \sum_j H(p_j, q_{j-1})}}{(2\pi)^N} \right] \equiv \\ & \equiv \int_{q_i=q_0}^{q_f=q_N} \mathcal{D}q \mathcal{D}p \frac{p}{2\pi} e^{i \int_0^t dt' (p\dot{q} - H(p, q))} \end{aligned}$$

Quando questo limite esiste, esso definisce il path integral hamiltoniano. I due estremi all'esterno dell'integrale non sono estremi di integrazione bensì condizioni al contorno; ad esempio se volessimo considerare una traiettoria circolare dovremmo porre $q_i = q_f$ e aggiungere un integrale.

Il path integral lagrangiano si può ottenere da quello hamiltoniano, quando l'hamiltoniana è della forma

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

In questo modo

$$H(p_j, q_{j-1}) = \frac{p_j^2}{2m} + V(q_{j-1})$$

e il fattore generico prende la forma

$$\frac{e^{ip_j(q_j - q_{j-1}) - i\epsilon \frac{p_j^2}{2m} - i\epsilon V(q_{j-1})}}{(2\pi)^N}$$

ovvero la forma di un integrando gaussiano nelle variabili p_j . Identificando

$$A = \frac{i\epsilon}{2m}$$

$$B = i(q_j - q_{j-1})$$

possiamo integrare sugli N impulsi ottenendo

$$\int dq_1 \cdots dq_{N-1} \frac{1}{(2\pi)^N} \left(\sqrt{\frac{2m\pi}{i\epsilon}} \right)^N e^{i \sum_{j=1}^N \left[\frac{m}{2\epsilon} (q_j - q_{j-1})^2 - \epsilon V(q_{j-1}) \right]}$$

L'espressione precedente, nel limite $N \rightarrow \infty$, definisce il path integral lagrangiano:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int dq_1 \cdots dq_{N-1} \frac{1}{(2\pi)^N} \left(\sqrt{\frac{2m\pi}{i\epsilon}} \right)^N e^{i \sum_{j=1}^N \left[\frac{m}{2\epsilon} (q_j - q_{j-1})^2 - \epsilon V(q_{j-1}) \right]} \equiv$$

$$C(m) \int \mathcal{D}q e^{i \int_0^t dt \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \right)}$$

dove $C(m)$ è un fattore costante indipendente dalle coordinate e dagli impulsi. Osserviamo che il primo membro dell'uguaglianza è mal definito per $\epsilon \rightarrow 0$, ma poichè l'espressione di partenza, $\langle q_f | e^{-iHt} | q_i \rangle$ è regolare, la divergenza apparente sarà riassorbita in qualche modo risolvendo il path integral.

Già da questa espressione vediamo una cosa importantissima, ovvero che all'esponenziale nel path integral, nel formalismo lagrangiano, compare l'azione:

$$\int_0^t dt \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \right) = S[q(t)]$$

Questo ci fa capire che possiamo considerare il path integral come definizione della meccanica quantistica, equivalente a quella di Schroedinger: per definire la teoria è sufficiente prendere la lagrangiana classica, inserirla nel path integral e cercare di calcolarlo. Naturalmente in generale sarà più difficile calcolare il path integral piuttosto che l'equazione di Schroedinger, essendo una la forma integrale, l'altra la forma infinitesima dello stesso problema, tuttavia il path integral è uno strumento euristico importantissimo, e indispensabile per le teorie di gauge.

Dal path integral all'equazione di Schroedinger

Se questa deve essere una nuova ed equivalente definizione della meccanica quantistica, possiamo cercare di derivare l'equazione di Schroedinger dalle nostre definizioni:

$$U(q_f, t; q_i, 0) = \int \mathcal{D}q \mathcal{D} \frac{p}{2\pi} e^{\frac{i}{\hbar} S}$$

$$\frac{\partial U(q_f, t; q_i, 0)}{\partial t} = \int \mathcal{D}q \mathcal{D} \frac{p}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} e^{\frac{i}{\hbar} S} =$$

$$= \int \mathcal{D}q \mathcal{D} \frac{p}{2\pi} \left[\frac{i}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial t} \right] e^{\frac{i}{\hbar} S}$$

ma

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{dS}{dt} - \frac{\partial S}{\partial q} \dot{q} = \mathcal{L} - p\dot{q} = -H(p, q) \\ \Rightarrow \frac{\partial U(q_f, t; q_i, 0)}{\partial t} &= -\frac{i}{\hbar} H(p, q) \int \mathcal{D}q \mathcal{D}\frac{p}{2\pi} e^{\frac{i}{\hbar} S} = -\frac{i}{\hbar} H(p, q) U(q_f, t; q_i, 0)\end{aligned}$$

che è proprio l'equazione di Schroedinger.

1.2.1 Path integral per una particella libera

Esistono sistemi per cui si può risolvere esattamente il path integral, uno di questi è la particella libera, con hamiltoniana

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m}$$

Nel formalismo lagrangiano scriveremo

$$\int dq_1 \dots dq_{N-1} \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i \epsilon}} \right)^N e^{i \sum_{j=1}^N \frac{m}{2\epsilon} (q_j - q_{j-1})^2}$$

Vediamo però che questi integrali sono accoppiati. Svolgiamo i quadrati e cerchiamo di riorganizzare i termini:

$$\begin{aligned}\frac{im}{2\epsilon} \sum_{j=1}^N (q_j - q_{j-1})^2 &= \frac{im}{2\epsilon} (q_N^2 + q_{N-1}^2 - 2q_N q_{N-1} + q_{N-1}^2 + q_{N-2}^2 - 2q_{N-1} q_{N-2} + q_{N-2}^2 + q_{N-3}^2 - 2q_{N-2} q_{N-3} + \dots + \\ &\quad + q_2^2 + q_1^2 - 2q_1 q_2 + q_1^2 + q_0^2 - 2q_1 q_0) = \\ &= \frac{im}{2\epsilon} \left(\underline{q_N^2 + 2q_{N-1}^2 - 2q_{N-1}(q_N + q_{N-2}) + q_{N-2}^2 + q_{N-2}^2 + 2q_{N-3}^2 - 2q_{N-3}(q_{N-2} + q_{N-4}) + q_{N-4}^2 + \dots +} \right. \\ &\quad \left. + \underline{q_2^2 + 2q_1^2 - 2q_1(q_2 + q_0) + q_0^2} \right)\end{aligned}$$

supponendo N pari, più precisamente della forma $N = 2^n$ per qualche n . Abbiamo quindi un integrale di tipo gaussiano sulle variabili q_1, q_3, \dots, q_{N-1} :

$$A = -\frac{im}{\epsilon} \quad B = \frac{im}{\epsilon} (q_N + q_{N-2})$$

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{im}{2\epsilon} q_N^2 + 2q_{N-1}^2 - 2q_{N-1}(q_N + q_{N-2}) + q_{N-2}^2\right) &\rightarrow \exp\left(\frac{im}{2\epsilon} (q_N^2 + q_{N-2}^2)\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{im}{2\epsilon}\right) (q_N + q_{N-2})^2\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{im}{2\epsilon}\right) (q_N - q_{N-2})^2\right) \\ \Rightarrow \int dq_2 dq_4 \dots dq_{N-4} dq_{N-2} &\left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i \epsilon}} \right)^N \left(\sqrt{\frac{i\pi\epsilon}{m}} \right)^{\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{im}{2\epsilon}\right) \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}} (q_{2j} - q_{2(j-1)})^2\right)\end{aligned}$$

Tutto va quindi come se avessimo raddoppiato gli intervalli temporali, e la distanza tra i punti q_i adiacenti. Dopo $n - 1$ iterazioni del procedimento otteniamo

$$\left(\sqrt{2}\right)^{(N-n)-1} \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i \epsilon}}\right)^N \left(\sqrt{\frac{i\pi\epsilon}{m}}\right)^{N-1} \exp\left(-\left(\frac{im}{2^n \epsilon}\right) (q_f - q_i)^2\right) =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i 2^n \epsilon}} \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{im}{2^n \epsilon} \right) (q_f - q_i)^2 \right) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \Delta T \hbar}} e^{im \frac{(q_f - q_i)^2}{2\Delta T \hbar}}$$

dove $\Delta T = N\epsilon = 2^n \epsilon$. Non c'è trucco non c'è inganno.

Abbiamo quindi trovato l'espressione generale per il path integral di una particella libera:

$$\langle q_f | e^{-i\Delta T H} | q_i \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \Delta T \hbar}} e^{im \frac{(q_f - q_i)^2}{2\Delta T \hbar}}$$

Nel limite $\Delta T \rightarrow 0$ il membro di sinistra si riduce ad una delta $\delta(q_f - q_i)$, e lo stesso deve fare il membro di sinistra, infatti lo riconosciamo essere una delta successione della forma

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$a = \sqrt{\frac{2i\Delta T \hbar}{m}}$$

Meccanica quantistica e diffusione

Possiamo continuare analiticamente a tempi euclidei il propagatore della particella libera:

$$t = -it_E$$

$$p_0 = ip_E$$

Per tempi euclidei $\Delta T = -i\Delta T_E$ e il propagatore prende la forma di una gaussiana:

$$\langle q_f | e^{-\Delta T_E H} | q_i \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi \Delta T_E \hbar}} e^{-m \frac{(q_f - q_i)^2}{2\Delta T_E \hbar}}$$

Mediante la continuazione analitica il path integral diventa, in forma generale:

$$\langle q_f | e^{-\Delta T_E H} | q_i \rangle = \int \mathcal{D}q \exp \left\{ - \int_{t_i}^{t_f} dt_E \left[\frac{1}{2} m \dot{q}^2 + (q) \right] \right\}$$

dove $-\int_{t_i}^{t_f} dt_E \left[\frac{1}{2} m \dot{q}^2 + (q) \right]$ è l'azione euclidea.

Nel caso di particella libera euclidea abbiamo quindi a vedere con un problema analogo a quello della diffusione; infatti l'elemento di matrice

$$\langle q_f | e^{-t_E \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m}} | q_i \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi \Delta T_E \hbar}} e^{-m \frac{(q_f - q_i)^2}{2\Delta T_E \hbar}}$$

ha il significato di probabilità di diffusione di una particella dal punto q_i al punto q_f in un tempo ΔT_E . L'operatore di diffusione soddisfa all'equazione di Schroedinger euclidea:

$$\frac{\partial}{\partial t_E} U = \frac{\hbar}{2m} \nabla^2 U$$

Normalmente si preferisce scrivere

$$\frac{\partial}{\partial t_E} U = D \nabla^2 U$$

dove con D si indica la costante di diffusione, che ha dimensione $[l]^2[t]^{-1}$. La probabilità di transizione, per $\Delta T_E = 0$, è una delta di Dirac, e via via che aumenta l'intervallo temporale su cui si osserva il sistema anche la probabilità aumenta. Risulta che il valor medio della posizione è legato all'intervallo di tempo di osservazione dalla costante di diffusione, secondo la nota relazione di Einstein per il moto browniano:

$$\langle \delta x^2 \rangle \sim 2tD$$

Questo parallelo ci fa capire che esiste un collegamento tra la meccanica quantistica a tempi euclidei e la meccanica statistica. Ci sono però due importanti differenze: i tempi della meccanica quantistica sono minkowskiani, mentre quelli della meccanica statistica sono euclidei, inoltre nel problema statistico l'elemento di matrice dell'operatore $e^{-i\Delta_E H}$ rappresenta una probabilità di transizione, mentre il corrispondente elemento di matrice in meccanica quantistica ha il significato di ampiezza di probabilità, dunque per ottenere la probabilità dobbiamo prenderne il modulo quadro. Questo fa una grande differenza, poichè tutti gli effetti di natura prettamente quantistica come l'interferenza originano proprio dai moduli quadri delle somme delle varie ampiezze che prendono parte a un processo.

Path integral per teorie di campo

Abbiamo visto che nel formalismo hamiltoniano, il path integral per un sistema con un solo grado di libertà era espresso da un integrale funzionale della forma

$$\langle q_f | e^{-iHT} | q_i \rangle = \int \mathcal{D}q \mathcal{D} \frac{p}{2\pi} e^{i \int p \dot{q} - H(p,q) dt} \equiv C(m) \int_{q_i=q(0)}^{q_f=q(T)} \mathcal{D}q e^{iS_{cl}[q,t]}$$

dove $C(m)$ è una certa costante, mal definita ma fortunatamente inessenziale ai nostri fini, che tiene conto delle integrazioni funzionali che abbiamo effettuato e del processo di limite discreto-continuo.

Nel caso di più gradi di libertà:

$$\int \mathcal{D}q \mathcal{D} \frac{p}{2\pi} e^{i \int p \dot{q} - H(p,q) dt} \rightarrow \int \prod_{\alpha} \mathcal{D}q_{\alpha} \mathcal{D} \frac{p_{\alpha}}{2\pi} e^{i \sum_{\alpha} \int p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H(p,q) dt}$$

Se vogliamo generalizzare il formalismo ad una teoria di campo, ci dobbiamo ricordare che in questo caso la posizione \vec{x} e il tempo sono soltanto dei parametri, e che il ruolo di coordinata generalizzata è ricoperto adesso dai campi $\phi_{\alpha}(\vec{x}, t)$. Gli impulsi sono sostituiti dai relativi momenti coniugati

$$\Pi_{\alpha}(\vec{x}, t) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\phi}_{\alpha}(\vec{x}, t)}$$

e l'elemento di matrice dell'operatore di evoluzione non è più preso tra due configurazioni spazio-temporali $q_i = q(t_i)$ e $q_f = q(t_f)$, bensì tra due configurazioni di campo $\phi_i = \phi(\vec{x}_i, t_i)$ e $\phi_f = \phi(\vec{x}_f, t_f)$:

$$\langle \phi_f | e^{-iHT} | \phi_i \rangle = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} S[\phi(\vec{x}, t)]}$$

Si segue quindi un procedimento analogo a quello del caso quantistico: si discretizza non più soltanto il tempo, ma anche lo spazio, introducendo un numero adeguato di completezze $\int \prod_{\alpha} d\phi_{\alpha} | \phi_{\alpha} \rangle \langle \phi_{\alpha} |$ e $\int \prod_{\alpha} d\Pi_{\alpha} | \Pi_{\alpha} \rangle \langle \Pi_{\alpha} |$. Nel caso di un solo campo scalare si giunge ad una espressione di questo tipo

$$\langle \phi_f | e^{-iHT} | \phi_i \rangle = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\Pi e^{i \int dt d^3x \Pi \dot{\phi} - H(\phi, \Pi)}$$

ovvero la versione in teoria dei campi del formalismo hamiltoniano, e con gli stessi argomenti si può passare a quello lagrangiano:

$$\langle \phi_f | e^{-iHT} | \phi_i \rangle = C'(m) \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi(\vec{x},t)]}$$

Path integral e funzioni di correlazione

Abbiamo detto che la costante $C(m)$ a fattore davanti all'integrale funzionale, pur essendo mal definita perchè potenzialmente divergente, è inessenziale: questo accade perchè le quantità di cui abbiamo bisogno di solito in teoria dei campi, ad esempio i correlatori, vengono ottenuti nel formalismo del path integral mediante rapporti tra integrali funzionali dello stesso tipo, dunque le eventuali costanti $C(m)$, pur infinite, si elidono esattamente portando ad un risultato ben definito. Poi sarà mal definito per altri motivi ma questa è un'altra storia.

Consideriamo l'espressione:

$$\int \mathcal{D}\phi(x) \phi(x_1) \phi(x_2) e^{-i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L}(x)}$$

Per il principio di sovrapposizione del path integral, possiamo suddividere l'integrale in tre porzioni:

$$\int \mathcal{D}\phi(x) = \int \mathcal{D}\phi_1(\vec{x}) \int \mathcal{D}\phi_2(\vec{x}) \int_{\phi(x_1, \vec{x}) = \phi_1(\vec{x})}^{\phi(x_2, \vec{x}) = \phi_2(\vec{x})} \mathcal{D}\phi(\vec{x})$$

In questo modo, oltre alla condizione al contorno ai tempi $-T$ e T , abbiamo una ulteriore condizione sui tempi x_1^0 e x_2^0 , che ci impone di integrare su tutte le possibili configurazioni a quegli istanti. Prendiamo ad esempio $x_1^0 < x_2^0$, possiamo scrivere allora l'integrale come

$$\int \mathcal{D}\phi_1(\vec{x}) \mathcal{D}\phi_2(\vec{x}) \phi_1(\vec{x}_1) \phi_2(\vec{x}_2) \langle \phi_f | e^{-iH(T-x_2^0)} | \phi_2 \rangle \langle \phi_2 | e^{-iH(x_2^0-x_1^0)} | \phi_1 \rangle \langle \phi_1 | e^{-iH(x_1^0+T)} | \phi_i \rangle$$

dove con $|\phi_1\rangle$ intendiamo l'autostato del campo di Schroedinger $\phi_S(\vec{x})$ corrispondente all'autovalore $\phi_1(\vec{x})$, allora possiamo riscrivere:

$$\int \mathcal{D}\phi_1(\vec{x}) \mathcal{D}\phi_2(\vec{x}) \langle \phi_f | e^{-iH(T-x_2^0)} | \phi_2 \rangle \langle \phi_2 | \phi_S(\vec{x}_2) e^{-iH(x_2^0-x_1^0)} \phi_S(\vec{x}_1) | \phi_1 \rangle \langle \phi_1 | e^{-iH(x_1^0+T)} | \phi_i \rangle$$

Poichè niente dipende più dalle ampiezze ϕ_1 e ϕ_2 , possiamo riassorbire le completezze ottenendo

$$\begin{aligned} & \langle \phi_f | e^{-iH(T-x_2^0)} \phi_S(\vec{x}_2) e^{-iH(x_2^0-x_1^0)} \phi_S(\vec{x}_1) e^{-iH(x_1^0+T)} | \phi_i \rangle = \\ & = \langle \phi_f | e^{-iHT} \underbrace{e^{iHx_2^0} \phi_S(\vec{x}_2) e^{-iHx_2^0}}_{\phi_H(x_2)} \underbrace{e^{iHx_1^0} \phi_S(\vec{x}_1) e^{-iHx_1^0}}_{\phi_H(x_1)} e^{-iHT} | \phi_i \rangle \end{aligned}$$

Osserviamo che aver preso $x_1^0 < x_2^0$ è stato del tutto ininfluenza, nel caso opposto gli operatori $\phi_H(x_1)$ e $\phi_H(x_2)$ sarebbero stati automaticamente scambiati di posto, pertanto possiamo riscrivere l'espressione come

$$\langle \phi_f | e^{-iHT} T \{ \phi_H(x_1) \phi_H(x_2) \} e^{-iHT} | \phi_i \rangle$$

Questa espressione è molto simile alla formula per la funzione di correlazione a due punti:

$$\langle \Omega | T \{ \phi_H(x_1) \phi_H(x_2) \} | \Omega \rangle$$

Vediamo in che modo è possibile ottenerla: ad esempio se inseriamo delle completezze costruite mediante gli autostati dell'energia:

$$\sum_{m,n} \langle \phi_f | m \rangle \langle n | e^{-iE_m T} T \{ \phi_H(x_1) \phi_H(x_2) \} e^{-iE_n T} | n \rangle \langle n | \phi_i \rangle$$

e supponendo che gli stati $|\phi_i, f\rangle$ abbiano una sovrapposizione non nulla col vuoto, nel limite $T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)$ (con $\epsilon > 0$) abbiamo che l'unico contributo significativo è quello del vuoto (che abbiamo inoltre supposto essere lo stato a minima energia). Abbiamo infine

$$\langle \phi_f | \Omega \rangle \langle \Omega | T \{ \phi_H(x_1) \phi_H(x_2) \} | \Omega \rangle \langle \Omega | \phi_i \rangle$$

che a meno di costanti moltiplicative ignote è proprio il risultato che cercavamo. Tali costanti scompaiono però se consideriamo il seguente rapporto:

$$\frac{\int \mathcal{D}\phi(x) \phi(x_1) \phi(x_2) e^{-i \int \mathcal{L} d^4x}}{\int \mathcal{D}\phi(x) e^{-i \int \mathcal{L} d^4x}} \equiv \frac{\langle \phi_f | T \{ \phi_H(x_1) \phi_H(x_2) \} | \phi_i \rangle}{\langle \phi_f | \phi_i \rangle}$$

nel limite $T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)$, per cui

$$\langle \Omega | T \{ \phi_H(x_1) \phi_H(x_2) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\int \mathcal{D}\phi(x) \phi(x_1) \phi(x_2) e^{-i \int_{-T}^T \mathcal{L} d^4x}}{\int \mathcal{D}\phi(x) e^{-i \int_{-T}^T \mathcal{L} d^4x}}$$

La derivata funzionale ed il funzionale generatore

Il risultato che abbiamo appena ottenuto è generalizzabile alla funzione di correlazione ad n punti, o in generale al valore di aspettazione sul vuoto del prodotto T -ordinato di un numero qualunque di operatori:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\int \mathcal{D}\phi(x) \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{-i \int_{-T}^T \mathcal{L} d^4x}}{\int \mathcal{D}\phi(x) e^{-i \int_{-T}^T \mathcal{L} d^4x}}$$

Consideriamo l'integrale

$$\int dx x e^{f(x)+bx}$$

dove $f(x)$ è una qualunque funzione della x che non dipende da b ; ad esempio tale integrale può rappresentare il momento primo della variabile x con funzione di densità $e^{f(x)+bx}$. Possiamo pensare di riscriverlo come

$$\int dx x e^{f(x)+bx} = \frac{\partial}{\partial b} \int dx e^{f(x)+bx}$$

Questa espressione risulta più maneggevole, in quanto abbiamo eliminato dei fattori dall'integrando. Possiamo applicare queste considerazioni al caso dell'integrale funzionale, ma dobbiamo prima estendere il concetto di derivata ordinaria rispetto ad una variabile al caso di un numero infinito di variabili. Consideriamo infatti un funzionale $F[\phi(x)]$, e definiamo la sua *derivata funzionale* rispetto alla funzione $\phi(y)$ come

$$\frac{\delta F[\phi(x)]}{\delta \phi(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[\phi(x) + \epsilon \delta(x-y)] - F[\phi]}{\epsilon}$$

Vediamo qualche caso facile

$$\begin{aligned}
F[\phi] &= \phi(x) \\
\frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(y)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\phi(x) + \epsilon\delta(x-y) - \phi(x)}{\epsilon} = \delta(x-y) \\
F[J(x)] &= \int d^4x J(x)\phi(x) \\
\frac{\delta}{\delta J(y)} \int d^4x J(x)\phi(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int d^4x J(x)\phi(x) + \int d^4x \epsilon\delta(x-y)\phi(x) - \int d^4x J(x)\phi(x)}{\epsilon} = \phi(y) \\
F_\mu[J(x)] &= \int d^4x (\partial_\mu J(x))\phi(x)
\end{aligned}$$

Integrando per parti si ha

$$\int d^4x (\partial_\mu J(x))\phi(x) = \int d^4x \partial_\mu (J(x)\phi(x)) - \int d^4x J(x)\partial_\mu \phi(x)$$

Il primo integrale non dà contributo se supponiamo che i campi vadano abbastanza rapidamente a zero per $|x| \rightarrow \infty$, dunque

$$\frac{\delta}{\delta J(y)} \int d^4x (\partial_\mu J(x))\phi(x) = -\frac{\delta}{\delta J(y)} \int d^4x J(x)\partial_\mu \phi(x) = -\partial_\mu \phi(y)$$

$$F[J(x)] = \exp\left\{\int d^4x J(x)\phi(x)\right\}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta J(y)} \exp\left\{\int d^4x J(x)\phi(x)\right\} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\exp\left\{\int d^4x J(x)\phi(x) + \int d^4x \epsilon\delta(x-y)\phi(x)\right\} - \exp\left\{\int d^4x J(x)\phi(x)\right\}}{\epsilon} = \\
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \exp\left\{\int d^4x J(x)\phi(x)\right\} \frac{\exp\left\{\int d^4x \epsilon\delta(x-y)\phi(x)\right\} - 1}{\epsilon} &\sim \exp\left\{\int d^4x J(x)\phi(x)\right\} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int d^4x \epsilon\delta(x-y)\phi(x)}{\epsilon} = \\
&= \phi(y) \exp\left\{\int d^4x J(x)\phi(x)\right\}
\end{aligned}$$

Vediamo quindi che al fine di calcolare funzioni di correlazione è utile definire un oggetto, detto *funzionale generatore*:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{iS[\phi] + i \int d^4x J(x)\phi(x)\right\}$$

In modo tale che

$$Z[0] = \int \mathcal{D}\phi \exp\{iS[\phi]\}$$

$$\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \exp\left\{iS[\phi] + i \int d^4x J(x)\phi(x)\right\} = \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right) \cdots \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_n)}\right) Z[J] \Big|_{J=0}$$

dunque

$$\langle \Omega | T \{\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle = \frac{1}{Z[0]} \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right) \cdots \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_n)}\right) Z[J] \Big|_{J=0}$$

La teoria scalare

Applichiamo il formalismo del funzionale generatore ad una teoria scalare, ovvero una teoria in cui l'azione è della forma

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2$$

Il funzionale generatore sarà allora

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 + i \int d^4x J(x) \phi(x) \right\}$$

L'esponente dell'integrando è la generalizzazione funzionale di una forma quadratica del tipo

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha,\beta} \phi_\alpha M_{\alpha\beta} \phi_\beta + \sum_\alpha \phi_\alpha J_\alpha \rightarrow Q(x,y) = \int d^4x d^4y \phi(x) M(x,y) \phi(y) + \int d^4x J(x) \phi(x)$$

Nel caso scalare il funzionale generatore si può risolvere esattamente, infatti se consideriamo l'espressione

$$Q(x,y) = i \int d^4x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 + i \int d^4x J(x) \phi(x)$$

Questa espressione deve essere un pò rimaneggiata per ritrovare la forma standard:

$$\begin{aligned} i \int d^4x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 &= i \int d^4x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi(x)) (\partial^\mu \phi(x)) - \frac{m^2}{2} \phi(x) \phi(x) = -i \int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi(x) \partial_\mu \partial^\mu \phi(x) + \frac{m^2}{2} \phi(x) \phi(x) \right] = \\ &= -i \frac{1}{2} \int d^4x d^4y [\phi(x) (\partial^2 + m^2) \delta(x-y) \phi(y)] = - \int d^4x d^4y [\phi(x) M(x-y) \phi(y)] \end{aligned}$$

$$M(x-y) = i \frac{1}{2} (\partial^2 + m^2 - i\epsilon) \delta(x-y)$$

Al fine di poter utilizzare i nostri risultati sugli integrali gaussiani, dobbiamo supporre che la forma quadratica $M(x-y)$ abbia una piccola componente reale negativa, per questo abbiamo sottratto $i\epsilon$. A questo punto il funzionale generatore si scrive

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int d^4x d^4y \phi(x) M(x-y) \phi(y) + i \int d^4x J(x) \phi(x) \right\}$$

e ricordando che

$$\int dx_1 \dots dx_n e^{-x^T A x + B^T x} = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}} e^{\frac{1}{4} B^T A^{-1} B}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} Z[J] &= \tilde{C} \frac{1}{\sqrt{\det M(x-y)}} \exp \left\{ -\frac{1}{4} \int d^4x d^4y J(x) M(x-y)^{-1} J(y) \right\} \equiv \\ &\equiv \tilde{C} \sqrt{\det M^{-1}(x-y)} \exp \left\{ -\frac{1}{4} \int d^4x d^4y J(x) M(x-y)^{-1} J(y) \right\} \end{aligned}$$

Dove \tilde{C} è una costante inessenziale, e $M^{-1}(x-y)$ è l'inverso dell'operatore differenziale $M(x-y)$. Nello spazio degli impulsi si ha

$$M(x-y) \rightarrow \tilde{M}(k) = \frac{i}{2} (-k^2 + m^2 - i\epsilon)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \tilde{M}^{-1}(k) &= \frac{2i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\ \Rightarrow M^{-1}(x-y) &= 2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = 2\Delta_F(x-y)\end{aligned}$$

dove $\Delta_F(x-y)$ è il propagatore di Feynman per una particella scalare. Infine

$$\begin{aligned}Z[J] &= \tilde{C} \sqrt{\det M^{-1}(x-y)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right\} \\ Z[0] &= \tilde{C} \sqrt{\det M^{-1}(x-y)}\end{aligned}$$

Vediamo quindi che nonostante in base alla sua definizione il funzionale generatore contenga oggetti potenzialmente infiniti come il determinante funzionale $\det M^{-1}(x-y)$, nella computazione delle funzioni di correlazione questi contributi si cancellano. Vediamo ad esempio la funzione a due punti:

$$\begin{aligned}\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \Omega \rangle &= - \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right\} \Big|_{J=0} = \\ &= \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{1}{2} \left[\int d^4y \Delta_F(x_2-y) J(y) + \int d^4x J(x) \Delta_F(x-x_2) \right] = \frac{1}{2} [\Delta_F(x_2-x_1) + \Delta_F(x_1-x_2)] = \Delta_F(x_1-x_2)\end{aligned}$$

poichè il propagatore di Feynman è simmetrico nello scambio $1 \leftrightarrow 2$.

Suggerimento: quando si devono calcolare funzioni di correlazione ad n del funzionale generatore, è utile considerare non l'espressione completa ma il suo sviluppo ad un ordine m tale che $n = 2m$. Questo perchè l'esponente contiene sempre un numero pari di correnti, e i termini dello sviluppo che dopo la derivazione contengono ancora termini in J spariscono per $J = 0$; questo spiega anche perchè in una teoria scalare *libera* come quella che abbiamo considerato, le funzioni di correlazione a $2n + 1$ punti si annullano identicamente. Ad esempio per la funzione a 4 punti, è sufficiente espandere fino al secondo ordine:

$$\begin{aligned}\exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right\} &\sim 1 - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) + \\ &+ \frac{1}{8} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \int d^4x' d^4y' J(x') \Delta_F(x'-y') J(y') + O(J^6)\end{aligned}$$

L'unico termine che può sopravvivere a quattro derivazioni è il terzo, quindi:

$$\begin{aligned}\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \} | \Omega \rangle &= \\ &= \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \frac{\delta}{\delta J(x_3)} \frac{\delta}{\delta J(x_4)} \left(\frac{1}{8} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \int d^4x' d^4y' J(x') \Delta_F(x'-y') J(y') \right) = \\ &= \frac{1}{8} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \frac{\delta}{\delta J(x_3)} \frac{\delta}{\delta J(x_4)} \left(\int d^4y \Delta_F(x_4-y) J(y) \int d^4x' d^4y' J(x') \Delta_F(x'-y') J(y') \right. \\ &\quad + \int d^4x J(x) \Delta_F(x-x_4) \int d^4x' d^4y' J(x') \Delta_F(x'-y') J(y') + \\ &\quad \left. + \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \int d^4y' \Delta_F(x_4-y') J(y') \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \int d^4x' J(x') \Delta_F(x'-x_4) \Big) = \\
& = \frac{1}{8} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \left(2 \Delta_F(x_3-x_4) \int d^4x' d^4y' J(x') \Delta_F(x'-y') J(y') + \right. \\
& + 2 \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \Delta_F(x_3-x_4) + 4 \int d^4y' \Delta_F(x_3-y') J(y') \int d^4y'' \Delta_F(x'-x_4) J(y'') \Big) = \\
& = \Delta(x_1-x_2) \Delta(x_3-x_4) + \Delta(x_1-x_3) \Delta(x_2-x_4) + \Delta(x_1-x_4) \Delta(x_2-x_3)
\end{aligned}$$

Dunque abbiamo riottenuto il risultato del teorema di Wick.

Può essere comodo passare nella base degli impulsi:

$$-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} J(p) \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} J(-p)$$

Questo prevede anche una trasformazione della derivata funzionale:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} = \int d^4p e^{ip \cdot x} \frac{\delta}{\delta J(p)}$$

Per verificare questa formula consideriamo un esempio:

$$\frac{\delta J(x)}{\delta J(y)} = \delta^4(x-y)$$

Possiamo espandere $J(x)$ in serie di Fourier:

$$J(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} J(p)$$

Adesso, se deriviamo funzionalmente rispetto a $J(k)$:

$$\frac{\delta}{\delta J(k)} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} J(p) = \frac{1}{(2\pi)^4} e^{-ikx}$$

Per ottenere una $\delta^4(x-y)$ da quest'espressione è sufficiente integrare in d^4k con un peso oscillante e^{iky} :

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} = \delta^4(x-y)$$

da cui

$$\frac{\delta}{\delta J(y)} = \int d^4k e^{ik \cdot y} \frac{\delta}{\delta J(k)}$$

Dunque le funzioni a n punti nello spazio degli impulsi si ottengono da

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(p_1, \dots, p_n) &= \langle \Omega | T \{ \phi(p_1) \dots \phi(p_n) \} | \Omega \rangle = \\
&= \left(-i(2\pi)^4 \frac{\delta}{\delta J(p_1)} \right) \dots \left(-i(2\pi)^4 \frac{\delta}{\delta J(p_n)} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} J(p) \Delta_F(p) J(-p) \right\} \Big|_{J=0}
\end{aligned}$$

$$G(x_1, \dots, x_n) = \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 p_n}{(2\pi)^4} \tilde{G}(p_1, \dots, p_n)$$

Ad esempio per la funzione a 2 punti:

$$\left(-i(2\pi)^4 \frac{\delta}{\delta J(p_1)} \right) \left(-i(2\pi)^4 \frac{\delta}{\delta J(p_2)} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} J(p) \Delta_F(p) J(-p) \right\} \Big|_{J=0} = (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2) \Delta(p_1)$$

e per quella a 4 punti:

$$\begin{aligned} & \left(-i(2\pi)^4 \frac{\delta}{\delta J(p_1)} \right) \dots \left(-i(2\pi)^4 \frac{\delta}{\delta J(p_4)} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} J(p) \Delta_F(p) J(-p) \right\} \Big|_{J=0} = \\ & = \frac{(2\pi)^{16}}{(2\pi)^8} (\Delta(p_4) \Delta(p_2) \delta^4(p_3 + p_4) \delta^4(p_1 + p_2) + \Delta(p_4) \Delta(p_1) \delta^4(p_2 + p_4) \delta^4(p_1 + p_3) + \Delta(p_4) \Delta(p_3) \delta^4(p_1 + p_4) \delta^4(p_3 + p_2)) = \\ & = \Delta(p_4) \Delta(p_2) (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) + \Delta(p_4) \Delta(p_1) (2\pi)^4 \delta^4(p_2 + p_4) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_3) + \\ & \quad + \Delta(p_4) \Delta(p_3) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_4) (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_2) \end{aligned}$$

Determinanti funzionali

Abbiamo visto che nella risoluzione del funzionale generatore compare un fattore della forma $\det M(x-y)$. Anche se nel calcolo delle funzioni di correlazione esso si elide, può essere utile dargli un volto. Dobbiamo generalizzare a un numero infinito di dimensioni la formula per il determinante in n dimensioni

$$\begin{aligned} \det M &= \prod_i \lambda_i \\ \Rightarrow \log \det M &= \sum_n \log \lambda_n = Tr[\log M] \Rightarrow \det M = e^{Tr[\log M]} \end{aligned}$$

L'operazione di traccia è indipendente dalla base scelta, e poichè l'operatore di Klein-Gordon è diagonale nello spazio degli impulsi, la scelta più naturale è di usare proprio la base degli impulsi. Tuttavia per semplicità è più conveniente passare al formalismo euclideo:

$$\begin{aligned} p_E &= -ip_0 \\ x_E &= ix_0 \\ iS &= - \int d^4 x \phi(x) \left(\frac{i}{2} (\partial^2 + m^2 - i\epsilon) \right) \phi(x) = i \int d^4 x_E \phi(x_E) \left(\frac{i}{2} (-\partial_E^0)^2 - \nabla^2 + m^2 \right) \phi(x_E) = \\ &= - \int d^4 x_E \phi(x_E) \left(\frac{1}{2} (-\partial_E^2 + m^2) \right) \phi(x_E) \equiv - \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \phi(p_E) \left(\frac{1}{2} (p_E^2 + m^2) \right) \phi(-p_E) \\ M(x-y) &= \frac{i}{2} (\partial^2 + m^2 - i\epsilon) \delta(x-y) \rightarrow M_E(x-y) = \frac{1}{2} (-\partial_E^2 + m^2) \delta^4(x-y) \\ \tilde{M}(p) &= \frac{i}{2} (-p^2 + m^2 - i\epsilon) \rightarrow \tilde{M}_E(p) = \frac{1}{2} (p_E^2 + m^2) \\ Tr[\log \tilde{M}] &= \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \log \left(\frac{1}{2} (p_E^2 + m^2) \right) \end{aligned}$$

Per piccoli impulsi, $\log \frac{m^2}{2}$ è regolare, mentre per $|p_E| \rightarrow \infty$ l'integrale diverge come p^4 , dunque dovremo introdurre un cutoff Λ . Considerando anche i termini subleading si ha:

$$Tr[\log M] \sim (\Lambda^4 + m^2 \Lambda^2 + m^4 \Lambda^0) (1 + \log \Lambda)$$

Teoria scalare interagente

Consideriamo una teoria scalare con autointerazioni, del tipo $\lambda\phi^4$. L'azione è

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} ((\partial^\mu \phi)^2 - m^2 \phi^2) - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

dunque il funzionale generatore

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x \frac{1}{2} ((\partial^\mu \phi)^2 - m^2 \phi^2) - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + i \int d^4x J(x) \phi(x) \right\}$$

Utilizzeremo un trucco per scrivere il funzionale generatore interagente $Z[J]$ in termini del funzionale libero $Z_0[J]$; abbiamo visto infatti che un qualunque funzionale $F[\phi]$ può essere ottenuto derivando in modo opportuno il termine di corrente, in particolare basta considerare il funzionale $F \left[\frac{\delta}{\delta J} \right]$ (ovvero lo stesso funzionale di prima dove abbiamo sostituito a ogni campo $\phi(x)$ una derivata funzionale $\frac{\delta}{\delta J(x)}$), applicato al funzionale generatore:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \exp \left\{ -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right\} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x \frac{1}{2} ((\partial^\mu \phi)^2 - m^2 \phi^2) + i \int d^4x J(x) \phi(x) \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right\} Z_0[J] \end{aligned}$$

Vedremo adesso che questo trucco riproduce tutti i diagrammi di Feynman della teoria: ad ogni ordine perturbativo entrerà in gioco un certo numero di derivate, quindi un certo numero (finito) di termini:

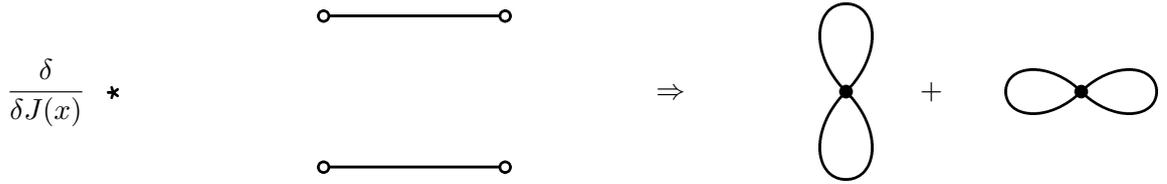
$$\begin{aligned} \exp \left\{ -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right\} &= 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 + \\ &+ \left(\frac{i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4x \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \int d^4y \left(-i \frac{\delta}{\delta J(y)} \right)^4 + O(\lambda^3) \end{aligned}$$

Consideriamo il primo termine non banale del funzionale generatore, ovvero quello di ordine λ : poichè esso contiene quattro derivate, dovremo sviluppare $Z_0(J)$ fino al second'ordine

$$\begin{aligned} \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4x_1 \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right)^4 \left(\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \int d^4z d^4t J(z) \Delta_F(z-t) J(t) + O(J^6) \right) = \\ = -\frac{1}{8} \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x_1 \left(\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right)^3 \left(\int d^4y 4 \Delta_F(x_1-y) J(y) \int d^4z d^4t J(z) \Delta_F(z-t) J(t) \right) = \\ = -\frac{1}{8} \frac{i\lambda}{3!} \int d^4x_1 \left(\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right)^2 \left(\Delta_F(x_1-x_1) \int d^4z d^4t J(z) \Delta_F(z-t) J(t) + \right. \\ \left. + 2 \int d^4x \Delta_F(x_1-x) J(x) \int d^4z \Delta_F(x_1-z) J(z) \right) = \\ = -\frac{1}{8} \frac{i\lambda}{3!} \int d^4x_1 \left(\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) \left(6 \Delta_F(x_1-x_1) \int d^4z J(z) \Delta_F(z-x_1) \right) = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{8}i\lambda \int d^4x_1 \Delta_F(0)\Delta_F(0) = -\frac{1}{8}i\lambda VT \Delta_F(0)\Delta_F(0)$$

dove con VT abbiamo indicato il volume dello spazio-tempo su cui integriamo, ed è caratteristico dei *diagrammi del vuoto*: un diagramma del vuoto è un diagramma in cui non sono presenti gambe esterne, proprio come quello che abbiamo appena calcolato



Vedremo in seguito che il funzionale generatore automaticamente genera tutti i diagrammi del vuoto.

Possiamo pensare alle derivate funzionali come a dei ganci che si attaccano agli estremi dei propagatori. Se consideriamo le funzioni di correlazione della teoria libera ($\lambda = 0$) abbiamo:

$$\langle \phi_1 \phi_2 \rangle_{\lambda=0} = \Delta_F(1, 2)$$

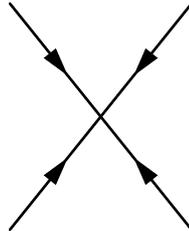
$$\langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle_{\lambda=0} = \Delta_F(1, 2)\Delta_F(3, 4) + \Delta_F(1, 3)\Delta_F(2, 4) + \Delta_F(1, 4)\Delta_F(2, 3)$$



Mentre se andiamo a considerare le derivazioni funzionali nello spazio degli impulsi, abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 &= \frac{\lambda}{4!} \int d^4x d^4p_1 \dots d^4p_4 e^{ix(p_1+p_2+p_3+p_4)} \frac{\delta}{\delta J(p_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(p_4)} = \\ &= \frac{\lambda}{4!} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \int d^4p_1 \dots d^4p_4 \frac{\delta}{\delta J(p_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(p_4)} \end{aligned}$$

Tale termine può essere rappresentato come un vertice, perchè la sua azione fa convergere in uno stesso punto quattro impulsi, con la condizione che la loro somma sia nulla:

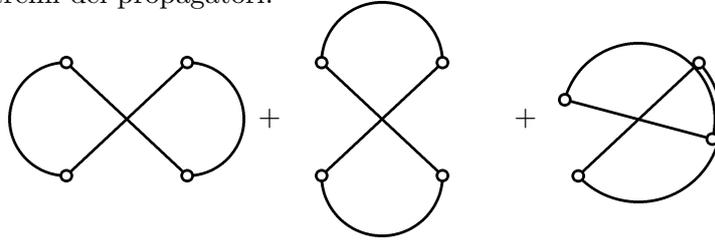


Il valore del vertice è privo del $4!$, che viene cancellato dalle varie combinazioni di derivate funzionali.

Il funzionale generatore libero può essere sviluppato in serie di diagrammi di Feynman:

$$\begin{aligned}
 e^{-\frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} J(p) \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} J(-p)} &= 1 - \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} J(p) \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} J(-p) + \\
 + \frac{1}{8} \left(\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} J(p) \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} J(-p) \right) &\left(\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} J(q) \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} J(-q) \right) + \dots = \\
 = 1 - \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{8} \text{---} \text{---} \text{---} &\text{---} \text{---} \text{---} + \dots
 \end{aligned}$$

Da questa espansione segue che ad ordine λ abbiamo soltanto tre termini utili, che corrispondono ai tre modi di collegare gli estremi dei propagatori:



Per la conservazione dell'impulso ai vertici la delta di conservazione è automaticamente soddisfatta, dunque ognuno di questi grafici porta un contributo $\delta(0)$:

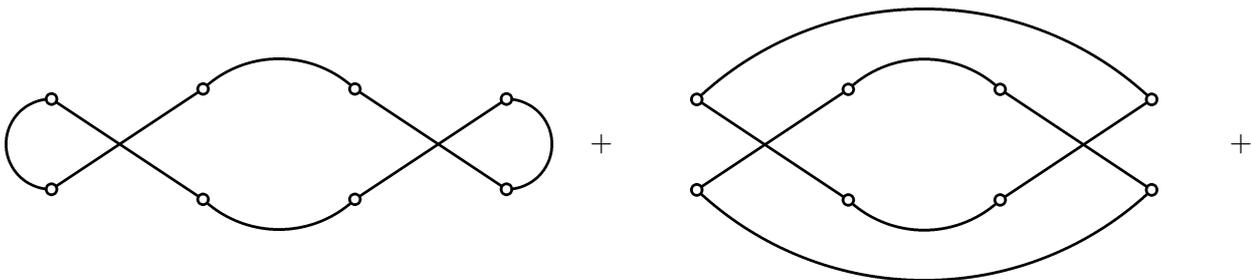
$$\text{---} \text{---} \text{---} = -i\lambda(2\pi)^4 \delta(0) \left[\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} \right]^2$$

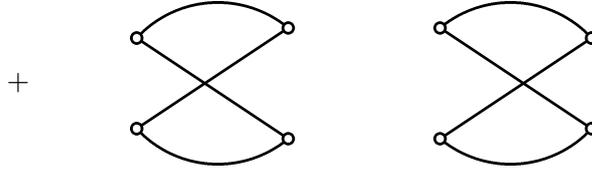
Ogni grafico si porta poi appresso un fattore di simmetria di cui parleremo in seguito, o forse mai. In ogni caso avevamo già incontrato il fattore singolare $\delta(0)$ anche nel caso dei diagrammi di Feynman nello spazio delle configurazioni:

$$\delta(0) \equiv \int d^4 x e^{ip \cdot 0} = \int d^4 x \sim VT$$

Tale fattore è un fattore di volume, e la sua interpretazione è che il processo descritto dal diagramma può avere luogo in un punto qualsiasi dello spazio-tempo.

Se andiamo ad ordini superiori, ad esempio λ^2 , abbiamo questi contributi:





L'ultimo diagramma è un esempio di diagramma disconnesso, e possiamo vederlo come il contributo del vuoto al prim'ordine, al quadrato e con un coefficiente diverso dovuto al diverso ordine di sviluppo. Possiamo vedere questi diagrammi come una sorta di funzioni di correlazione "a 0 punti": così come la funzione a due punti rappresenta l'ampiezza di probabilità di propagazione di una particella da un punto 1 ad un punto 2, e si esprime come

$$\langle T\{\phi_1\phi_2\} \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi_1\phi_2 e^{iS[\phi] + \int J\phi}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}}$$

la funzione a zero punti rappresenta l'ampiezza totale di propagazione del vuoto in sè, ovvero la somma delle ampiezze di tutti i processi (virtuali, quindi non osservabili) che hanno elementi di matrice sul vuoto.

I contributi del vuoto si ottengono semplicemente sviluppando in serie il funzionale generatore e mandando a 0 le sorgenti J : le derivate infatti connettono sempre un numero di estremi multiplo di 4, pertanto i termini dello sviluppo di $Z_0[J]$ che ne contengono un numero diverso da $4n$ escono automaticamente dal calcolo.

Analogie tra meccanica statistica e teoria di campo

Abbiamo visto che la derivata n -esima del funzionale generatore dà la funzione di correlazione a n punti, dunque possiamo riscriverlo nella forma:

$$Z[J] = Z[0] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle J_1 \dots J_n$$

o in versione euclidea

$$Z_E[J] = Z_E[0] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle J_1 \dots J_n$$

dove

$$Z_E[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi] + \int J\phi}$$

Vediamo che il funzionale generatore in versione euclidea presenta una certa somiglianza con la funzione di partizione della meccanica statistica, infatti se consideriamo un modello di Ising in presenza di un campo magnetico esterno h

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{-\beta\mathcal{H}(\{\sigma_i\}) - h\sum \sigma_i} \equiv e^{-\beta F}$$

dove F è l'energia libera di Helmholtz, anche in questo caso infatti abbiamo una somma su tutte le possibili configurazioni delle variabili di spin (discrete) $\sigma_i = \pm 1$, l'analogo del campo scalare $\phi(x)$, e una dipendenza da una sorgente esterna. L'hamiltoniana del modello di Ising è

$$\mathcal{H}(\{\sigma_i\}) = -\lambda \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j$$

dove λ è una costante positiva in modo che sia favorito il comportamento ferromagnetico. Le analogie non si fermano qui, e possiamo stilare un elenco:

- la meccanica statistica in d dimensioni è equivalente ad una teoria di campo euclidea in $d-1$ dimensioni più il tempo; ce ne siamo già accorti in un caso particolare trattando il problema di una particella in meccanica quantistica a tempi euclidei (0 dimensioni più il tempo), che risultava equivalente al problema della diffusione unidimensionale di un gas.
- Le variabili σ_i del modello di Ising, che nel caso di un ferromagnete continuo diventano un campo di spin $\sigma(\vec{x})$, possono essere messe in corrispondenza con il campo scalare $\phi(x_E)$ di una teoria di campo euclidea.
- I parametri che rendono adimensionale l'argomento dell'esponenziale, $\beta = \frac{1}{K_B T}$ nel caso statistico e $\frac{1}{\hbar}$ nel caso quantistico, sono entrambi legati alle rispettive fluttuazioni. Nel caso termico, quando $\beta \rightarrow \infty$ (cioè $T \rightarrow 0$), lo stato che domina è il ground state, mentre quando $\hbar \rightarrow 0$ (limite classico) la configurazione che domina è il minimo dell'azione euclidea, che corrisponde all'orbita classica.
- Da uno studio del modello di Ising mediante la teoria di Landau si ottiene che il campo di spin $s(\vec{x})$ obbedisce ad una equazione differenziale di questo tipo

$$(-\nabla^2 + 2b(T - T_c))s(\vec{x}) = h(\vec{x})$$

dove T_c è la temperatura critica e b è un parametro. Se scegliamo un campo $h(\vec{x}) = h_0\delta(\vec{x})$, allora $s(\vec{x})$ non è altro che una funzione di Green dell'operatore differenziale $-\nabla^2 + 2b(T - T_c)$, ovvero una funzione di questo tipo:

$$G(\vec{x}) = \frac{h_0}{4\pi r} e^{-\frac{r}{\xi}}$$

dove $\xi = [2b(T - T_c)]^{-\frac{1}{2}}$. Tale funzione di Green è legata alla funzione di correlazione di spin

$$\langle s(\vec{x})s(0) \rangle \equiv \sum_{conf} s(\vec{x})s(0)e^{-\beta\mathcal{H}}$$

ovvero una espressione analoga alle funzioni di correlazione a due punti di una teoria di campo. Il propagatore massivo euclideo in tre dimensioni, come abbiamo visto, è proporzionale alla funzione di Bessel che per grandi x ha un andamento del tipo $\frac{e^{-mr}}{r}$, dove m è la massa della eccitazione elementare. Questo ci suggerisce quindi l'identificazione $\frac{1}{\xi} \sim m$.

- Infine, la meccanica statistica ha un cutoff ultravioletto naturale, dato dalle dimensioni microscopiche del sistema (ad esempio il passo reticolare a , che induce un cutoff ultravioletto $\frac{1}{a}$), mentre in teoria di campo esiste un cutoff Λ , anche se deve essere imposto a mano e viene mandato all'infinito alla fine dei calcoli.

L'azione effettiva

In analogia con la meccanica statistica della funzione di partizione e dell'energia libera, possiamo esprimere il funzionale generatore nella forma:

$$Z[J] = e^{iE[J]}$$

Dove $E[J]$ è un nuovo funzionale che prende il nome di azione effettiva (o efficace). Il significato fisico di tale funzionale si estrae dalla scrittura estesa del funzionale generatore:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi] + i \int J\phi}$$

Infatti, il membro di destra dell'equazione è ricavato equivalentemente dalla computazione in termini di path integral dell'elemento di matrice

$$\langle \Omega | e^{-iHT} | \Omega \rangle$$

dove H è l'hamiltoniana e T è l'intervallo di integrazione. Dunque l'azione effettiva $E[J]$ ha il significato di energia dello stato di vuoto, in presenza di una sorgente esterna. In termini del funzionale generatore si ha

$$E[J] = i \log Z[J]$$

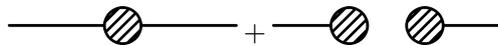
Consideriamo allora la derivata prima dell'azione effettiva:

$$\frac{\delta E[J]}{\delta J(x)} = -\frac{1}{Z[J]} \int \mathcal{D}\phi \phi(x) e^{iS[\phi] + i \int J\phi}$$

Per $J = 0$, questa è proprio la funzione a un punto cambiata di segno. Consideriamo ora la derivata seconda:

$$\begin{aligned} & \frac{\delta E[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} = \\ & = -i \left[\frac{1}{Z[J]} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \phi(x_2) e^{iS[\phi] + i \int J\phi} - \frac{1}{Z[J]} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) e^{iS[\phi] + i \int J\phi} \frac{1}{Z[J]} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_2) e^{iS[\phi] + i \int J\phi} \right] = \\ & = -i (\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle - \langle \phi(x_1) \rangle \langle \phi(x_2) \rangle) \end{aligned}$$

Il significato di tale espressione è il seguente: se consideriamo tutti i grafici che contribuiscono alla funzione a due punti, avremo contributi di questa forma



ovvero una somma di contributi *connessi* e *disconnessi*. Il secondo termine nell'espressione della derivata seconda di $E[J]$ cancella i contributi disconnessi alla funzione a due punti, pertanto possiamo scrivere:

$$\frac{\delta E[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} = -i \langle \phi_1 \phi_2 \rangle_c$$

dove il pedice c indica la funzione a due punti *connessa*. Analogamente per la funzione a tre punti abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{\delta E[J]}{\delta J_1 \delta J_2 \delta J_3} &= -i \frac{\delta}{\delta J_1} (\langle \phi_2 \phi_3 \rangle - \langle \phi_2 \rangle \langle \phi_3 \rangle) = \\ &= (\langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \rangle - \langle \phi_1 \phi_2 \rangle \langle \phi_3 \rangle - \langle \phi_1 \rangle \langle \phi_2 \phi_3 \rangle - \langle \phi_1 \phi_3 \rangle \langle \phi_2 \rangle + 2 \langle \phi_1 \rangle \langle \phi_2 \rangle \langle \phi_3 \rangle) \end{aligned}$$

Ricordando adesso che

$$\langle \phi_a \phi_b \rangle = \langle \phi_a \phi_b \rangle_c + \langle \phi_a \rangle \langle \phi_b \rangle$$

$$\Rightarrow \frac{\delta E[J]}{\delta J_1 \delta J_2 \delta J_3} = \langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \rangle - \langle \phi_1 \phi_2 \rangle_c \langle \phi_3 \rangle - \langle \phi_1 \rangle \langle \phi_2 \phi_3 \rangle_c - \langle \phi_1 \phi_3 \rangle_c \langle \phi_2 \rangle - \langle \phi_1 \rangle \langle \phi_2 \rangle \langle \phi_3 \rangle \equiv \langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \rangle_c$$

Ovvero anche stavolta alla funzione a tre punti vengono sottratti tutti i contributi disconnessi. In generale si avrà

$$\frac{\delta E[J]}{\delta J_1 \dots \delta J_n} = (i)^{n+1} \langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle_c$$

ovvero l'azione effettiva è il generatore delle funzioni di correlazione a n punti connesse, e ha un'espressione analoga a quella del funzionale generatore:

$$E[J] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i)^{n+1}}{n!} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n J_1 \dots J_n \langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle_c$$

In definitiva, $E[J]$ ha sia il significato di generatore dei diagrammi connessi, che di energia dello stato fondamentale in presenza di sorgenti. I diagrammi di vuoto che lo compongono saranno quindi tutti connessi, e come abbiamo visto un contributo di vuoto connesso porta sempre un fattore di volume $(2\pi)^4 \delta(0) \sim VT$. Se andiamo a definire la densità di energia del vuoto, $\frac{E[J]}{V}$, essa sarà quindi indipendente dal volume V e dal tempo di integrazione T , in altre parole l'energia del sistema è proporzionale al suo volume.

1.2.2 Il potenziale effettivo

In meccanica statistica, è possibile passare dall'energia libera di Helmholtz al potenziale di Gibbs mediante una trasformata di Legendre, che ha il significato fisico di cambio delle variabili di controllo di un sistema (ad esempio, dal campo magnetico esterno H alla magnetizzazione del sistema M). Se consideriamo un sistema descritto da una funzione di partizione

$$Z[H] = e^{-\beta F[H]} = \int \mathcal{D}s e^{-\beta \int dx \mathcal{H}[s] - Hs(x)}$$

dove $\mathcal{H}[s]$ è la densità di energia di spin, $s(x)$ la configurazione di spin nel punto x , e H un campo magnetico esterno, notiamo subito una somiglianza con il formalismo dell'integrale funzionale visto finora. Una quantità importante per sistemi di questo tipo è la magnetizzazione M , definita da

$$M = - \left. \frac{\partial F}{\partial H} \right|_{\beta} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial H} \log Z = \frac{1}{Z} \int dx \int \mathcal{D}s s(x) e^{-\beta \int dx \mathcal{H}[s] - Hs(x)} = \int dx \langle s(x) \rangle$$

Il potenziale di Gibbs viceversa è definito da

$$G = F + MH$$

in modo che

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G}{\partial M} \right|_{\beta} &= \frac{\partial F}{\partial M} + M \frac{\partial H}{\partial M} + H = \\ &= \frac{\partial H}{\partial M} \frac{\partial F}{\partial H} + M \frac{\partial H}{\partial M} + H = -M \frac{\partial H}{\partial M} + M \frac{\partial H}{\partial M} + H = H \end{aligned}$$

Se il campo magnetico è nullo, il potenziale Gibbs ha un punto stazionario nel corrispondente valore di M , e lo stato termodinamico più stabile corrisponde al minimo di $G(M)$. Pertanto $G(M)$ dà una visione geometrica

dello stato termodinamico privilegiato (G è funzione della configurazione degli spin), e contemporaneamente include tutti gli effetti delle fluttuazioni quantistiche.

L'applicazione di queste tecniche alla teoria dei campi risponde all'esigenza di calcolare quantità come il valore di aspettazione sul vuoto di un campo ϕ , includendo fin dall'inizio le eventuali correzioni quantistiche che possono derivare da correzioni di loop. Infatti a livello classico $\langle\phi\rangle$ è legato al minimo dell'energia potenziale, mentre a livello quantistico è possibile mostrare che riceve contributi da quantità potenzialmente divergenti, che è necessario controllare attraverso la rinormalizzazione. Cercheremo quindi di trovare una funzione che all'ordine più basso dello sviluppo perturbativo coincida con l'energia potenziale classica, ma che possa essere modificata ad ordini superiori dalle correzioni quantistiche: tale quantità prenderà il nome di *potenziale effettivo*.

Così come in meccanica statistica la variabile coniugata al campo H è la magnetizzazione M , possiamo considerare il valore di aspettazione del campo ϕ sul vuoto come la variabile coniugata alla sorgente J , dato che

$$\frac{\delta E[J]}{\delta J(x)} = -\langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle_J$$

e definire quindi

$$\langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle_J \equiv \phi_{cl}$$

Il legame tra il *campo classico* ϕ_{cl} e il campo $\phi(x)$ è lo stesso legame che intercorre tra la magnetizzazione M e il campo di spin locale $s(x)$ in meccanica statistica: $\phi_{cl}(x)$ è infatti una media pesata su tutte le possibili fluttuazioni. Inoltre ϕ_{cl} dipende da J allo stesso modo in cui M dipendeva dal campo esterno H . Possiamo definire allora l'analogo del potenziale di Gibbs:

$$\Gamma[\phi_{cl}] \equiv -E[J] - \int d^4y J(y)\phi_{cl}(y)$$

dove il segno - è convenzionale. Possiamo infatti verificare che

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Gamma[\phi_{cl}]}{\delta\phi_{cl}(x)} &= -\frac{\delta E[J]}{\delta\phi_{cl}(x)} - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta\phi_{cl}(x)}\phi_{cl}(y) - J(x) = \\ &= -\int d^4z \frac{\delta J(z)}{\delta\phi_{cl}(x)} \frac{\delta E[J]}{\delta J(z)} - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta\phi_{cl}(x)}\phi_{cl}(y) - J(x) \end{aligned}$$

ma poichè $\frac{\delta E[J]}{\delta J(x)} = -\phi_{cl}(x)$

$$= \int d^4z \frac{\delta J(z)}{\delta\phi_{cl}(x)}\phi_{cl}(z) - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta\phi_{cl}(x)}\phi_{cl}(y) - J(x) = -J(x)$$

Mediante il potenziale effettivo si può studiare la rottura spontanea di simmetria: nel caso della meccanica statistica, avevamo magnetizzazione diversa da zero quando la derivata dell'energia libera rispetto al campo magnetico aveva una soluzione classica diversa da zero, e in tal caso si poteva scrivere

$$\lim_{H \rightarrow 0^+} \frac{\delta G}{\delta M} = 0 \Big|_{M \neq 0} = 0$$

nel caso della teoria dei campi, se la sorgente esterna è posta a zero abbiamo

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_{cl}]}{\delta\phi_{cl}(x)} = 0$$

e le soluzioni a questa equazione sono i valori di aspettazione $\langle \phi(x) \rangle$ negli stati quantistici stabili della teoria. Assumeremo d'ora in avanti che i possibili stati di vuoto siano invarianti sotto traslazioni e trasformazioni di Lorentz; in questo modo, per ogni possibile stato di vuoto, la corrispondente soluzione ϕ_{cl} sarà una costante indipendente da x , e l'equazione $\frac{\delta \Gamma[\phi_{cl}]}{\delta \phi_{cl}(x)} = 0$ si riduce ad una equazione ordinaria in una variabile, ϕ_{cl} .

Inoltre, sappiamo che in termini termodinamici, Γ è una quantità estensiva, ovvero dipende linearmente dal volume $V \cdot T$ della regione di spazio-tempo su cui integriamo; potremo scrivere allora

$$\Gamma[\phi_{cl}] = -(VT)V_{eff}(\phi_{cl})$$

dunque l'equazione per gli estremi di Γ si riduce a

$$\frac{\delta V_{eff}(\phi_{cl})}{\delta \phi_{cl}} = 0$$

Inoltre, se $J = 0$ abbiamo che $\Gamma = -E$, pertanto $V_{eff}(\phi_{cl})$ valutato in un minimo non è altro che la densità di energia dello stato corrispondente. I massimi locali di V_{eff} (o punti di sella, nel caso di più campi ϕ^i), corrispondono a configurazioni instabili che non possono essere realizzate come stati stazionari; i minimi locali invece corrispondono a stati di vuoto metastabili, che possono decadere al vero vuoto per effetto tunnel. Infine, il minimo assoluto di V_{eff} corrisponde al vero vuoto stabile; in un sistema con rottura spontanea della simmetria ci sono più minimi assoluti con lo stesso valore, e la scelta di uno di questi stati è proprio la rottura spontanea di simmetria.

Come calcolare l'azione effettiva

È possibile verificare che la derivata seconda dell'azione effettiva è l'inverso della derivata seconda del potenziale effettivo:

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta J(x) \delta \phi_{cl}(y)} = \frac{\delta}{\delta J(x)} [-j(y)] = -\delta(x - y)$$

ma per la regola della derivazione a catena si ha anche

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta J(x) \delta \phi_{cl}(y)} = \int d^4 z \frac{\delta \phi_{cl}(z)}{\delta J(x)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_{cl}(z) \delta \phi_{cl}(y)}$$

ma $\phi_{cl}(z) = -\frac{\delta E[J]}{\delta J(z)}$, da cui

$$-\delta(x - y) = \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta J(x) \delta \phi_{cl}(y)} = - \int d^4 z \frac{\delta^2 E[J]}{\delta J(x) \delta J(z)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_{cl}(z) \delta \phi_{cl}(y)}$$

$$\Rightarrow \int d^4 z \frac{\delta^2 E[J]}{\delta J(x) \delta J(z)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_{cl}(z) \delta \phi_{cl}(y)} = \delta(x - y)$$

L'oggetto

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_{cl}(1) \delta \phi_{cl}(2)} = \langle \phi_1 \phi_2 \rangle^{-1} = G_c^{-1}(1, 2)$$

viene detto *2-vertice*. Quindi, se deriviamo funzionalmente Γ rispetto a J otteniamo:

$$\frac{\delta}{J_1} \Gamma = \frac{\delta \phi_2}{\delta J_1} \frac{\delta}{\delta \phi_2} = G^{-1}(1, 2) \frac{\delta}{\delta \phi_2}$$

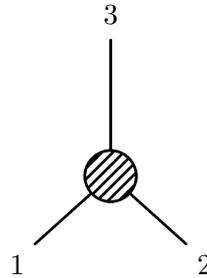
La derivata terza dell'azione effettiva dà i diagrammi connessi a tre punti:

$$\frac{\delta}{\delta J_1} \frac{\delta^2 E[J]}{\delta J_2 \delta J_3} = \frac{\delta}{\delta J_1} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\phi_2 \phi_3} \right)^{-1} = G^{-1}(1, 4) \frac{\delta}{\delta \phi_4} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\phi_2 \phi_3} \right)^{-1}$$

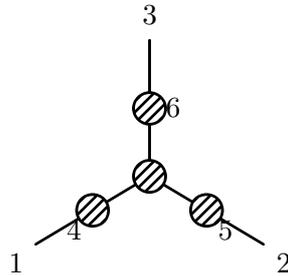
Per calcolare la derivata dell'inverso di un operatore ricordiamo la formula:

$$\begin{aligned} \delta M^{-1} &= -M^{-1} \delta M M^{-1} \\ \Rightarrow \frac{\delta}{\delta J_1} \frac{\delta^2 E[J]}{\delta J_2 \delta J_3} &= G^{-1}(1, 4) G^{-1}(2, 5) \frac{\delta}{\delta \phi_4} \frac{\delta^2 \Gamma}{\phi_5 \phi_6} G^{-1}(3, 6) \end{aligned}$$

dove si sottintende l'integrazione sulle variabili ripetute. In questo modo abbiamo quindi ridotto un diagramma di questo tipo:



ad un diagramma della forma



dove il nucleo centrale (ovvero la funzione a tre punti da cui abbiamo rimosso i propagatori esatti esterni) si dice essere *1 particle irreducible* (1PI), ovvero un diagramma irriducibile ad una particella: non è possibile dividerlo in due diagrammi separati tagliando una unica linea interna. L'utilità dell'aver introdotto il potenziale effettivo sta dunque nel fatto che la sua derivata terza restituisce la funzione a tre punti 1PI, separando quindi i contributi propri della funzione a due punti da quelli delle funzioni a 3, 4, ..., n punti.

1.2.3 Rottura spontanea della simmetria

La rottura spontanea della simmetria è un fenomeno che si ritrova in molti campi della fisica, ad esempio in teoria dei campi non relativistica o di many-body (superfluidità, superconduttività, anyon superfluid), in teoria relativistica (simmetria chirale, modello standard) e in meccanica statistica (ferromagnetismo, fononi su reticolo). Dal punto di vista della teoria dei campi, si parla di rottura spontanea della simmetria quando l'hamiltoniana del sistema possiede una certa simmetria, ma tale simmetria viene persa dallo stato fondamentale. Nel caso di rottura di simmetrie continue, il teorema di Goldstone prevede la comparsa di particelle a massa nulla, i cosiddetti bosoni di Goldstone, associati alle fluttuazioni del campo nella direzione della simmetria rotta.

Da un punto di vista classico è del tutto normale il fatto di avere uno stato fondamentale non invariante, mentre in meccanica quantistica avviene l'esatto contrario, grazie all'effetto tunnel. Se consideriamo ad

esempio una particella in un potenziale a doppia buca, con altezza della barriera $V_0 < \infty$, lo stato di minima energia corrisponderà alla particella che sta in una delle due buche, ovvero il ground state romperebbe la simmetria: ma aspettando un tempo sufficientemente lungo è possibile osservare per effetto tunnel la transizione della particella da una buca all'altra, dunque la simmetria inizialmente persa viene ristabilita. Nel limite di barriera infinita, $V_0 \rightarrow \infty$, si recupera la rottura di simmetria.

Secondo l'analogia tra meccanica statistica e teoria dei campi di cui abbiamo parlato, la meccanica quantistica corrisponde alla meccanica statistica in una dimensione, mentre una teoria di campo unidimensionale corrisponde alla meccanica statistica in 2 dimensioni. Si trova che per $d = 1$ non c'è rottura spontanea della simmetria, mentre il contrario accade per $d = 2$; per capire questo fatto studieremo il modello di Ising per N siti:

$$\mathcal{H} = -U \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - J \sum_{i=1}^N \sigma_i \quad U > 0$$

Gli spin σ_i possono assumere i valori ± 1 , e in questo senso il problema è l'analogo quantistico della particella la cui funzione d'onda ha un picco per $x = \pm v$, o il cui campo può assumere valore di aspettazione sul vuoto $\langle \phi \rangle = \pm v$. L'interazione tra gli spin è tra primi vicini, cioè sono favoriti gli spin paralleli, allo stesso modo in cui in teoria di campo il termine cinetico favorisce tra istanti successivi la permanenza in stati v oppure $-v$. Esiste un argomento, dovuto a Peierls, secondo il quale considereremo la funzione di partizione del sistema:

$$Z = e^{-\beta F}$$

Se la temperatura va a zero, e supponiamo di avere rottura spontanea della simmetria (ad esempio tutti gli spin hanno valore $+1$), possiamo stimare la differenza di energia libera tra questo stato e quello in cui si è avuta una fluttuazione di tipo spin flip:

$$F_i = E_i - TS_i$$

ma $S_i = 0$ perchè lo stato con tutti gli spin allineati ha una sola configurazione possibile. Se uno spin viene ribaltato si ha una variazione di energia $E_f - E_i = 4U$, mentre l'entropia dello stato è pari al logaritmo del numero di configurazioni possibili, in questo caso N , dunque

$$F_f - F_i = 4U - T \log N$$

Per N che tende a ∞ la variazione di energia libera tende a $-\infty$, il che significa che lo stato con uno spin ribaltato è più probabile; con ragionamenti analoghi è possibile mostrare che gli stati più probabili sono quelli con $\frac{N}{2}$ spin ribaltati, ovvero la condizione privilegiata è quella a magnetizzazione nulla, e quindi assenza di rottura spontanea di simmetria. Lo stato di vuoto iniziale, ovvero quello con tutti gli spin allineati, non è stabile per $T \neq 0$.

Se consideriamo adesso il caso di un reticolo di Ising bidimensionale con tutti gli spin allineati, la fluttuazione sarà rappresentata in questo caso da una goccia di spin che si ribalta: parametrizzeremo tale goccia con un cammino di lunghezza L , pertanto la variazione di energia ad esso associata sarà

$$E_f - E_i = 2UL$$

La variazione di entropia è legata al numero di cammini di lunghezza L che è possibile costruire: escludendo che il cammino torni su se stesso, ad ogni passo dopo il primo abbiamo tre possibilità, da cui

$$S_L = \log 3^L$$

$$\Rightarrow \Delta F = 2UL - T \log 3^L = L(2U - T \log 3)$$

In questo caso abbiamo temperatura critica

$$T_c = \frac{2U}{\log 3}$$

oltre la quale, nel limite $L \rightarrow \infty$ è privilegiato lo stato magnetizzato ($T < T_c$) oppure quello simmetrico ($T > T_c$). Il calcolo esatto è dovuto ad Onsager e la temperatura critica da lui ottenuta non è troppo dissimile da questa.

Osserviamo che in caso di rottura spontanea di simmetria i due ground state possibili del ferromagnete, ovvero $\sigma_i = +1$ oppure $\sigma_i = -1 \forall i$, non comunicano tra loro, ovvero diventano due settori della teoria completamente ortogonali. In questa maniera, un qualunque operatore non può avere elementi di matrice diversi da zero tra stati che appartengano ai due sottospazi:

$$\langle -|\mathcal{O}|+\rangle = 0$$

Si definisce *dimensione critica* la dimensione al di sotto della quale non si ha rottura di simmetria: nel caso di simmetrie discrete tale dimensione è 1, nel caso di simmetrie continue è 2; questo è il contenuto del teorema di Mermin-Wagner-Coleman. Per capire perchè non è possibile avere rottura spontanea di simmetria in due dimensioni, possiamo considerare il seguente argomento: il bosone di Goldstone associato alla simmetria rotta ha massa nulla, pertanto il suo propagatore sarà della forma

$$\langle \phi(x)\phi(0) \rangle = \int^\Lambda \frac{d^2k}{k^2} \sim \log \Lambda$$

1.2.4 Path integral per campi fermionici

Per poter parlare del path integral in QED dobbiamo introdurre i campi classici fermionici. Infatti, i campi classici scalare ed elettromagnetico soddisfacevano a regole canoniche di commutazione, mentre i campi spinoriali come sappiamo soddisfano a regole di anticommutazione:

$$\{\psi(\vec{x}, t), \psi^\dagger(\vec{y}, t)\} = \hbar \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

Il formalismo del path integral si esprime in maniera analoga:

$$\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^\dagger e^{-S_F[\psi, \psi^\dagger]}$$

ma l'integrale adesso è detto integrale di Berezin, e le variabili ψ e ψ^\dagger che vi compaiono non sono ordinari c-numeri bensì variabili anticommutanti, o numeri di Grassmann.

I numeri di Grassmann appartengono a una cosiddetta *algebra di Grassmann*: siano $\theta_1, \dots, \theta_n$ n variabili con la proprietà

$$\begin{aligned} \theta_i \theta_j &= -\theta_j \theta_i \quad \forall i, j \\ \Rightarrow \theta_i^2 &= 0 \end{aligned}$$

Dato questo prodotto tra le variabili, esse formano un'algebra con coefficienti reali (o complessi), che ha per elementi di base

$$\theta_i$$

$$\begin{aligned} & \theta_i \theta_j \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \theta_1 \dots \theta_n \end{aligned}$$

e che pertanto è 2^n -dimensionale. È possibile definire su questi oggetti una sorta di integrale e derivata in questo modo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \theta &\equiv 1 \\ \frac{\partial}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial \theta_j} &= - \frac{\partial}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \end{aligned}$$

Se consideriamo una funzione di una variabile anticommutante, la sua forma è molto limitata dalla struttura dell'algebra:

$$F(\theta) = A + B\theta$$

Per definire l'integrale richiederemo invarianza per traslazioni della misura, pertanto

$$\int d\theta A + B\theta = \int d\theta A + B(\theta + \eta) = \int d\theta A + B\eta + B\theta = \int d\theta A' + B\theta$$

dunque l'integrale non può dipendere da A , e può soltanto essere proporzionale a B . Per convenzione prendiamo la costante di proporzionalità pari a 1 e definiamo quindi l'integrale come

$$\int d\theta A + B\theta = B$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \int d\theta A &= 0 \\ \int d\theta \theta &= 1 \end{aligned}$$

Osserviamo che l'integrale coincide con la derivata. Per generalizzare al caso di più variabili, dobbiamo ricordare che le variabili anticommutano, e per convenzione per essere integrate le variabili devono essere adiacenti alla propria misura di integrazione:

$$\int d\theta_1 d\theta_2 \theta_1 \theta_2 = - \int d\theta_1 d\theta_2 \theta_2 \theta_1 = -1$$

Poichè anticommutano, le variabili θ saranno delle matrici, in una qualche rappresentazione, e se consideriamo l'algebra di Grassmann complessa risulta naturale definire l'hermitiano coniugato in questo modo:

$$(\theta_1 \theta_2)^* = \theta_2^* \theta_1^* = -\theta_1^* \theta_2^*$$

Passiamo adesso a generalizzare l'integrale gaussiano per variabili di Grassmann:

$$\int d\theta^* d\theta e^{-b\theta^* \theta}$$

Dalla definizione di esponenziale, sopravvivono soltanto i termini di ordine 0 e 1:

$$\int d\theta^* d\theta (1 - b\theta^*\theta) = b$$

Osserviamo che a differenza del caso ordinario, in cui il coefficiente della forma quadratica doveva essere reale positivo, stavolta non è necessario richiedere alcuna condizione su b , che è un numero complesso qualsiasi.

Se consideriamo l'integrale in più variabili:

$$\int d\theta_1 \dots d\theta_n f(\theta_1, \dots, \theta_n)$$

per le regole che abbiamo elencato può sopravvivere solo il coefficiente del monomio di grado massimo, cioè quello che contiene tutti i θ_i in qualche ordine. L'integrale gaussiano complesso e multidimensionale è dato da

$$\int \prod_i d\theta_i^* \prod_j d\theta_j e^{-\theta_i^* B_{im} \theta_m} = \text{coefficiente di } \prod_i \theta_i \prod_j \theta_j^*$$

Svilupperemo l'esponenziale fino all'ordine massimo, per ottenere il coefficiente giusto; se supponiamo B hermitiana, essa sarà diagonalizzata da una trasformazione unitaria:

$$B = U^{-1} \Lambda U$$

$$\tilde{\theta}_i = U_{ij} \theta_j$$

Possiamo vedere che una trasformazione unitaria sulle θ_i e sulle θ_j^* non altera il risultato dell'integrale:

$$\begin{aligned} \prod_i \tilde{\theta}_i &= \frac{1}{n!} \epsilon^{p_1 \dots p_n} \tilde{\theta}_{p_1} \dots \tilde{\theta}_{p_n} = \\ &= \frac{1}{n!} \epsilon^{p_1 \dots p_n} U_{p_1 k_1} \dots U_{p_n k_n} \theta_{k_1} \dots \theta_{k_n} = \frac{1}{n!} \epsilon^{p_1 \dots p_n} U_{p_1 k_1} \dots U_{p_n k_n} \epsilon^{k_1 \dots k_n} \theta_1 \dots \theta_n = \\ &= \sum_p (-1)^p U_{1 p_1} \theta_1 \dots \theta_n = (\det U) \theta_1 \dots \theta_n \end{aligned}$$

Analogamente per le $\tilde{\theta}^*$ si ottiene $(\det U^\dagger) \theta_1^* \dots \theta_n^*$ dunque la trasformazione unitaria prende un fattore complessivo $\det U \det U^\dagger = 1$. Si ha infine:

$$\begin{aligned} &\int \prod_j d\theta_j^* \prod_i d\theta_i e^{-\sum_k \tilde{\theta}_k^* \lambda_k \tilde{\theta}_k} = \\ &= \int \prod_j d\theta_j^* \prod_i d\theta_i \prod_k \lambda_k \tilde{\theta}_k^* \tilde{\theta}_k = \prod_k \lambda_k = \det B \end{aligned}$$

La cosa più evidente è il fatto che a differenza degli integrali gaussiani ordinari, dove il determinante della forma quadratica stava a denominatore, stavolta lo troviamo a numeratore. Se avessimo considerato un integrale gaussiano reale:

$$\int \prod_j d\theta_j e^{-i\theta_i B_{ij} \theta_j}$$

avremmo dovuto osservare che la matrice B_{ij} deve necessariamente essere antisimmetrica, quindi in questo caso non si può usare lo stesso trucco della diagonalizzazione. Riscriveremo l'esponenziale in questo modo:

$$e^{-\theta_i B_{ij} \theta_j} = \prod_{i \neq j=1}^n (1 - \theta_i B_{ij} \theta_j)$$

Osserviamo che la matrice deve sempre essere di ordine pari, affinché l'integrale non si annulli identicamente: infatti in caso B fosse di ordine dispari, i $d\theta_i$ sarebbero anch'essi dispari, ma i prodotti derivanti dallo sviluppo in serie dell'esponenziale danno luogo soltanto a termini con un numero pari di θ_i . Siamo interessati soltanto ai termini con un numero N di θ_i , ovvero della forma

$$\begin{aligned} \theta_{i_1} B_{i_1 j_1} \theta_{j_1} \cdots \theta_{i_{\frac{N}{2}}} B_{i_{\frac{N}{2}} j_{\frac{N}{2}}} \theta_{j_{\frac{N}{2}}} &= B_{i_1 j_1} \cdots B_{i_{\frac{N}{2}} j_{\frac{N}{2}}} \theta_{i_1} \theta_{j_1} \cdots \theta_{i_{\frac{N}{2}}} \theta_{j_{\frac{N}{2}}} = \\ &= (-1)^\alpha B_{i_1 j_1} \cdots B_{i_{\frac{N}{2}} j_{\frac{N}{2}}} \theta_1 \cdots \theta_N \end{aligned}$$

dove α è la parità della permutazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & N \\ i_1 & j_1 & \cdot & \cdot & i_{\frac{N}{2}} & j_{\frac{N}{2}} \end{pmatrix}$$

Poichè tutti i termini di questo tipo sono sommati automaticamente nell'integrale, il risultato è

$$\sum_{\alpha} (-1)^\alpha B_{i_1 j_1} \cdots B_{i_{\frac{N}{2}} j_{\frac{N}{2}}} = \text{pf} a f f(B) = \sqrt{\det B}$$

Per applicare l'integrale gaussiano di variabili anticommutanti ai campi di Dirac, ricordiamone la definizione (nel caso non relativistico):

$$\psi(x) = \sum_j a_j \phi_j e^{ipx}$$

dove gli a_j sono numeri di Grassmann (che diventeranno operatori anticommutanti dopo la quantizzazione) e i ϕ_j sono spinori. Scriveremo

$$\int \mathcal{D}\psi \equiv \int \prod_i da_i$$

e il funzionale generatore sarà espresso come

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{i \int d^4x \bar{\psi} (i\partial - m) \psi} e^{i \int d^4x \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta}$$

Con i soliti argomenti si può definire la funzione a due punti

$$\langle \Omega | T \{ \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \} | \Omega \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{iS} \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)}{\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{iS}}$$

Stavolta il T -ordinamento cambia segno se scambiamo gli ordini degli operatori, e lo stesso accade automaticamente scambiando le variabili all'interno dell'integrale. Si ha inoltre

$$\langle \Omega | T \{ \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \} | \Omega \rangle = \frac{1}{Z[0]} \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_1} \right) \left(i \frac{\delta}{\delta \eta_2} \right) Z[\eta, \bar{\eta}] \Big|_{\eta, \bar{\eta}=0}$$

Il funzionale generatore si può risolvere esattamente:

$$\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-\int d^4x \bar{\psi}(-i)(i\partial - m)\psi} = \det(i \not{\partial} - m)$$

mentre

$$\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{i\int d^4x \bar{\psi}(-i)(i\partial - m)\psi} e^{i\int d^4x \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta} = \det(i \not{\partial} - m) e^{i\int d^4x \bar{\eta}((-i)(i\partial - m))^{-1}\eta}$$

Calcoliamo l'inverso dell'operatore $(-i)(i \not{\partial} - m)\delta(x - y)$ nello spazio degli impulsi:

$$\begin{aligned} (-i)(\not{p} - m) \rightarrow \frac{i}{\not{p} - m} &\Rightarrow [(-i)(i \not{\partial} - m)\delta(x - y)]^{-1} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\not{p} - m} e^{-ip \cdot (x-y)} \equiv S_F(x - y) \\ &\Rightarrow Z[\eta, \bar{\eta}] = Z[0] e^{-\int d^4x \bar{\eta}(x) S_F(x-y) \eta(y)} \end{aligned}$$

Pertanto la funzione a due punti è data da

$$\langle \Omega | T \{ \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \} | \Omega \rangle = S_F(x_1 - x_2)$$

1.2.5 Teorie di gauge e modello standard

L'elettrodinamica quantistica è una teoria invariante sotto trasformazioni di gauge, ovvero sotto trasformazioni *locali* dei campi. Mentre le invarianze globali sono associate via teorema di Noether con delle correnti conservate, una invarianza locale indica la presenza di una ridondanza di variabili; ad esempio nel caso del campo elettromagnetico l'invarianza di gauge ci permette di abbassare i gradi di libertà del campo elettromagnetico A^μ da 4 a 3 (ad esempio con la gauge di Lorentz; con una trasformazione di gauge residua è possibile abbassare ulteriormente a 2 i gradi di libertà, andando nella gauge di Coulomb). La lagrangiana della QED, a livello classico, è:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i \not{D} - m)\psi$$

dove D è la derivata covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$$

Dunque abbiamo un termine di lagrangiana libera e uno di interazione, dovuto alla derivata covariante:

$$-e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu \equiv -J_\mu A^\mu$$

$F_{\mu\nu}$ è il consueto tensore antisimmetrico

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

La lagrangiana complessiva è invariante sotto la trasformazione

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &\rightarrow F_{\mu\nu} \\ \psi &\rightarrow \psi' = e^{-ie\omega(x)}\psi \\ D_\mu\psi &\rightarrow (D_\mu\psi)' = e^{ie\omega(x)}D_\mu\psi \end{aligned}$$

Alla invarianza per trasformazioni di fase globali (ovvero con $\omega(x) = cost$) corrisponde la conservazione della corrente elettromagnetica:

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

Le equazioni del moto a livello classico si ottengono dalle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu}$$

Già da qui ci accorgiamo di una particolarità del campo elettromagnetico: infatti il campo A_0 non ha momento canonico coniugato:

$$\begin{aligned}\Pi^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu} \\ \Pi^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_0)} = F^{00} = 0\end{aligned}$$

dunque non si propaga; questo è anche una conseguenza del fatto che essendo i momenti coniugati dipendenti da $F^{\mu\nu}$, che è invariante di gauge, essi non possono dipendere da tutti e 4 i \dot{A} . Dall'invarianza di gauge segue anche che la componente longitudinale del campo elettromagnetico (ovvero quella nella direzione k^μ) non conta niente perchè può essere arbitrariamente modificata mediante una trasformazione di gauge:

$$\tilde{A}^\mu(k) \rightarrow \tilde{A}^\mu(k) - ik^\mu \tilde{\omega}(k)$$

inoltre le stesse equazioni del moto non sono tutte indipendenti: per la conservazione della corrente elettromagnetica si ha

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu\nu} &= J^\nu \\ \partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} &= \partial_\nu J^\nu = 0\end{aligned}$$

Questo implica che quando andiamo a invertire le equazioni del moto per trovare il propagatore a livello classico incontriamo un problema poichè l'operatore d'onda è singolare; per risolvere questo inconveniente sceglieremo una gauge generica in cui l'operatore d'onda non è singolare, sfruttando il fatto che le quantità osservabili classiche (come il campo elettrico e magnetico) sono gauge invarianti. A livello quantistico le osservabili sono ancora gauge invarianti, ma possono assumere caratteristiche di non località, ad esempio la fase di Dirac:

$$e^{i \oint d^4x A_\mu}$$

è un oggetto gauge invariante ma non locale.

Per invertire l'operatore d'onda una gauge utile è quella di Coulomb, nonostante la difficoltà rappresentata dal fatto che essa non è manifestamente Lorentz-invariante. Nell'equazione di moto si ha

$$\begin{aligned}\square A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) &= J^\mu \\ \left\{ \begin{array}{l} (\partial_0^2 - \nabla^2)A^0 - \partial_0^2 A_0 = J_0 \\ \square A^i - \partial^i(\partial_0 A_0) = J^i \end{array} \right.\end{aligned}$$

da cui deriva che A_0 obbedisce all'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 A_0 = -J_0 \Rightarrow A_0 = -\frac{1}{\nabla^2} J_0$$

Per l'altra equazione

$$\begin{aligned}\square A^i - \partial^i(\partial_0 A_0) &= J^i \\ \Rightarrow \square A^i &= \left(\delta^{ik} - \frac{\partial^i \partial^k}{\nabla^2}\right) J^k\end{aligned}$$

Una volta che conosciamo la funzione di Green per l'operatore d'onda, che indicheremo con $D_{\mu\nu}(x)$, possiamo esprimere le quattro componenti del potenziale A^μ mediante un prodotto di convoluzione:

$$A^\mu(x) = \int d^4y D^{\mu\nu}(x-y) J_\nu(y)$$

Da quanto trovato sopra, è immediato scrivere la funzione di Green (che in definitiva è il propagatore) in trasformata di Fourier come

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(q) = \begin{pmatrix} \frac{1}{|\vec{q}|^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q^2 + i\epsilon} \left(\delta_{ik} - \frac{q_i q_k}{|\vec{q}|^2}\right) \end{pmatrix}$$

Da questa espressione è evidente che $\partial_i A^i = 0$, infatti

$$i q_i A^i = i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + i\epsilon} q_i \left(\delta^{ik} - \frac{q^i q^k}{|\vec{q}|^2}\right) J_k(q)$$

ma $q_i \left(\delta^{ik} - \frac{q^i q^k}{|\vec{q}|^2}\right) = 0$ essendo $\delta^{ik} - \frac{q^i q^k}{|\vec{q}|^2}$ il proiettore sulle componenti trasverse.

A questo punto, la quantizzazione canonica impone regole di commutazione per le due componenti che si propagano:

$$\begin{aligned}\Pi_i &= E_i = 1\partial_0 A^i + \partial_i A_0 \\ [A_i^\perp(\vec{x}, t), E_j(\vec{y}, t)] &= i\left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2}\right) \delta^2(\vec{x} - \vec{y})\end{aligned}$$

e introducendo gli operatori di creazione e distruzione possiamo espandere il campo $A^{\perp i}$ in modi propri:

$$A^{\perp i} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k,\alpha=1,2} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \epsilon_{k\alpha}^i \left[a_{k\alpha} e^{-ikx} + a_{k\alpha}^\dagger e^{ikx} \right]$$

Dalle regole di commutazione sul campo si ottengono le regole di commutazione per a, a^\dagger :

$$\begin{aligned}[a_{k\alpha}, a_{k'\beta}^\dagger] &= \delta_{kk'} \delta_{\alpha\beta} \\ [a_{k\alpha}^\dagger, a_{k'\beta}^\dagger] &= [a_{k\alpha}, a_{k'\beta}] = 0\end{aligned}$$

I versori di polarizzazione ϵ soddisfano relazioni di ortogonalità e completezza:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^3 \epsilon_\alpha^i \epsilon_\beta^i &= \delta_{\alpha\beta} \\ \sum_{\alpha=1,2} \epsilon_\alpha^i \epsilon_\alpha^j &= \delta^{ij} - \frac{q^i q^j}{|\vec{q}|^2}\end{aligned}$$

Uno degli svantaggi della gauge di Coulomb è che la non covarianza a vista può in certi casi complicare un po' le formule, ma vediamo che la relazione tra il propagatore di Feynman

$$D_F^{\mu\nu}(q) = -i \frac{\eta^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}$$

e quello di Coulomb

$$D_C^{\mu\nu}(q) = -i \frac{d_{\mu\nu}(q)}{q^2 + i\epsilon}$$

si può esprimere come una trasformazione di gauge:

$$\begin{aligned} d_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + \alpha_\mu q_\nu + q_\mu \alpha_\nu \\ \frac{1}{q^2 + i\epsilon} + \frac{2\alpha_0 q_0}{q^2 + i\epsilon} &= \frac{1}{|\vec{q}|^2} \Rightarrow \alpha_0 = \frac{q_0}{2|\vec{q}|^2} \\ \frac{\delta_{ij}}{q^2} + \frac{\alpha_i q_j + q_i \alpha_j}{q^2 + i\epsilon} &= \left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{|\vec{q}|^2} \right) \frac{1}{q^2 + i\epsilon} \Rightarrow \alpha_i = -\frac{q_i}{2|\vec{q}|^2} \\ \Rightarrow \alpha^\mu &= \left(\frac{q_0}{2|\vec{q}|^2}, -\frac{q_i}{2|\vec{q}|^2} \right) \end{aligned}$$

In questo modo, se in un diagramma il propagatore $D_{\mu\nu}$ si collega a correnti conservate, per cui cioè $q_\mu \tilde{J}^\mu = 0$, i risultati ottenuti usando i due propagatori coincidono:

$$J_\mu D_C^{\mu\nu} J_\nu = J_\mu D_F^{\mu\nu} J_\nu$$

In questo modo le ampiezze fisiche risultano indipendenti dalla scelta di gauge.

1.2.6 Quantizzazione del campo elettromagnetico col path integral: l'argomento di Faddeev-Popov

Consideriamo il funzionale generatore per il campo elettromagnetico:

$$Z[J_\mu] = \int \mathcal{D}A^\mu e^{iS[A] + i \int J_\mu A^\mu}$$

L'azione $S[A]$ è data da

$$\begin{aligned} S[A] &= \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) = -\frac{1}{2} \int d^4x \partial_\mu A_\nu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x A_\nu(x) (\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\nu \partial^\mu) A_\mu(x) \end{aligned}$$

L'operatore da invertire è quindi

$$M(x-y) = \delta^4(x-y) (\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\nu \partial^\mu)$$

Vediamo però facilmente che tale operatore è singolare in quanto un campo della forma $A^\mu \sim k^\mu$ è suo autovettore con autovalore nullo. Poichè i campi della forma $A^\mu(k) \sim k^\mu \alpha(k)$ sono infiniti, l'integrale

funzionale diverge perchè divergente è il volume dello spazio di questi campi. Infatti, dato che la lagrangiana è invariante sotto la trasformazione di gauge

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$$

i campi della forma sopra descritta sono tutti quelli gauge-equivalenti al campo $A_\mu(x) = 0$, dunque l'integrale funzionale conta infinite volte lo stesso contributo. L'argomento di Faddeev-Popov rimedia a questo inconveniente: introduciamo la seguente identità funzionale

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha(x) \delta(D(A^\alpha)) \det \left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} \right)$$

dove $G(A^\alpha)$ è una opportuna funzione dipendente dai campi che vogliamo porre uguale a zero come condizione di gauge-fixing, A^α è il campo di gauge trasformato:

$$A_\mu^\alpha(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$$

Possiamo vedere questa identità come la generalizzazione al continuo dell'identità

$$1 = \prod_i \int da_i \delta^n(\vec{g}(\vec{a})) \frac{\partial g^i}{\partial a_j}$$

In gauge di Lorentz, dove la funzione che vogliamo mettere a zero è $G(A) = \partial_\mu A^\mu$, per cui $G(A^\alpha) = \partial_\mu A^\mu + \frac{1}{e} \partial^2 \alpha(x)$ il determinante funzionale è

$$\det \left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} \right) = \det \left(\frac{1}{e} \partial^2 \right)$$

Pur non calcolando esplicitamente il valore di questo determinante funzionale, ci accontentiamo di osservare che esso non dipende dai campi A^μ , dunque ai fini dell'integrale funzionale lo possiamo trattare come una costante. L'integrale funzionale diventa allora

$$Z[J_\mu] = \int \mathcal{D}A^\mu e^{iS[A]} = \det \left(\frac{1}{e} \partial^2 \right) \int \mathcal{D}\alpha(x) \int \mathcal{D}A^\mu \delta(G(A^\alpha)) e^{iS[A] + i \int J_\mu A^\mu}$$

Adesso, osserviamo che l'azione è invariante sotto trasformazioni di gauge, quindi $S[A] = S[A^\alpha]$, inoltre anche la misura è invariante, perchè la trasformazione di gauge è semplicemente una traslazione, allora possiamo scrivere

$$\det \left(\frac{1}{e} \partial^2 \right) \int \mathcal{D}\alpha(x) \int \mathcal{D}A_\mu^\alpha \delta(G(A^\alpha)) e^{iS[A^\alpha]} =$$

ma adesso A^α è diventata una variabile muta e possiamo effettuare il campo $A^\alpha \rightarrow A$:

$$\det \left(\frac{1}{e} \partial^2 \right) \int \mathcal{D}\alpha(x) \int \mathcal{D}A_\mu \delta(G(A)) e^{iS[A]}$$

L'utilità di questa procedura sta nel fatto che adesso nell'integrale niente dipende più da α , dunque l'integrale $\int \alpha(x)$, che non è altro che il volume delle orbite di gauge e che era causa degli infiniti di cui parlavamo, può essere fattorizzato fuori dall'integrale funzionale.

Possiamo generalizzare questa procedura al caso di una funzione di gauge-fixing arbitraria:

$$G(A) = \partial^\mu A_\mu(x) - \omega(x)$$

dove x è una funzione scalare qualunque. Anche stavolta abbiamo

$$\det \left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} \right) = \det \left(\frac{1}{e} \partial^2 \right)$$

e l'integrale funzionale diventa

$$\det \left(\frac{1}{e} \partial^2 \right) \int \mathcal{D}\alpha(x) \int \mathcal{D}A_\mu \delta(\partial_\mu A^\mu - \omega(x)) e^{iS[A]}$$

Poichè tale espressione vale per ogni $\omega(x)$, possiamo introdurre una combinazione lineare con peso gaussiano opportunamente normalizzata:

$$= N(\xi) \int \mathcal{D}\omega(x) e^{-i \int d^4x \frac{\omega^2}{2\xi}} \det \left(\frac{1}{e} \partial^2 \right) \int \mathcal{D}\alpha(x) \int \mathcal{D}A_\mu \delta(\partial_\mu A^\mu - \omega(x)) e^{iS[A]}$$

dove $N(\xi)$ è semplicemente una costante di normalizzazione. A questo punto integriamo su $\omega(x)$ e otteniamo

$$= N(\xi) \det \left(\frac{1}{e} \partial^2 \right) \left(\int \mathcal{D}\alpha(x) \right) \int \mathcal{D}A_\mu e^{iS[A]} e^{-\frac{i}{2\xi} \int d^4x (\partial_\mu A^\mu)^2}$$

Il parametro ξ può assumere qualunque valore reale. Questa procedura ha come effetto finale quello di aggiungere alla lagrangiana un termine di gauge-fixing $-\frac{(\partial_\mu A^\mu)^2}{2\xi}$; in questo modo l'operatore d'onda diventa

$$M(x-y) = -i\delta(x-y) \left(\partial^2 g^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\nu \right)$$

Tale operatore non è più singolare e possiamo invertirlo, passando nello spazio degli impulsi:

$$M^{\mu\nu}(k) = i \left(k^2 g^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^\mu k^\nu \right)$$

L'inverso sarà allora un operatore $D^{\mu\nu}(k) = -i\tilde{D}^{\mu\nu}(k)$ dove

$$\left(k^2 g^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^\mu k^\nu \right) \tilde{D}_{\nu\rho}(k) = \delta_\rho^\mu$$

Risulta che

$$D^{\mu\nu}(k) = -i \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left(g^{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right)$$

Vediamo quindi che specificare il parametro ξ equivale a specificare una gauge: per $\xi = 1$ si ha il gauge di Feynman, mentre per $\xi = 0$ il gauge di Landau.

1.2.7 Il path integral per la QED

Questi risultati sono stati ottenuti in assenza di sorgenti e di campi di materia. Se introduciamo le sorgenti nel funzionale generatore del campo elettromagnetico otteniamo:

$$\begin{aligned}
 Z_0[J_\mu] &= \\
 &= \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left\{ - \int d^4x d^4y A^\mu(x) \frac{-i}{2} \delta^4(x-y) \left(\partial^2 g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right) A^\nu(x) + i \int d^4x J_\mu(x) A^\mu(x) \right\} = \\
 &= Z_0[0] \exp \left\{ \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{J}^\mu(k) \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) J^\nu(-k) e^{-ik \cdot x} \right\} \equiv \\
 &\equiv Z_0[0] e^{-\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} J_\mu(k) D_\xi^{\mu\nu}(k) J_\nu(-k)}
 \end{aligned}$$

Se scegliamo $\xi = 1$ come abbiamo detto abbiamo il propagatore di Feynman:

$$D_F^{\mu\nu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-i) \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\epsilon}$$

A questo punto possiamo introdurre il funzionale generatore libero per la QED:

$$\begin{aligned}
 Z_0[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A^\mu \exp \left\{ i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi \right) + \right. \\
 &\quad \left. + i \int d^4x J^\mu(x) A_\mu(x) + \bar{\eta}(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \eta(x) \right\}
 \end{aligned}$$

Per introdurre l'interazione $-e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ utilizzeremo il solito trucco della derivata:

$$Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \exp \left\{ e \int d^4x \left(-i \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \right) \gamma^\mu \left(i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \right) \left(-i \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \right) \right\} Z_0[\eta, \bar{\eta}] Z_0[J^\mu]$$

dove

$$\begin{aligned}
 Z_0[\eta, \bar{\eta}] &= \exp \left\{ - \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) S(x-y) \eta(y) \right\} \\
 Z_0[J^\mu] &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J_\mu(x) D_F^{\mu\nu}(x-y) J_\nu(y) \right\}
 \end{aligned}$$

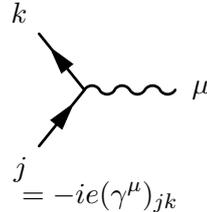
Per quanto riguarda le regole di Feynman (nello spazio degli impulsi), avremo due tipi di propagatore, quello fermionico:

$$S_F(p)_{jk} = j \xrightarrow[p]{\quad} k = \left(\frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \right) = i \frac{(\not{p} + m)_{jk}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

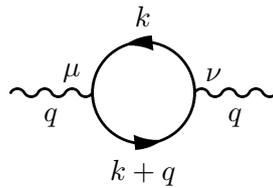
dove j, k sono gli indici spinoriali, e quello fotonico:

$$D_F^{\mu\nu}(k) = \mu \text{ ~~~~~ } \nu = -i \frac{\eta^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$$

Inoltre, il vertice è dato da



Come ultima regola, c'è un segno - da aggiungere per ogni loop fermionico: esso deriva dal fatto che facendo le derivate ci troviamo a dover commutare delle variabili di Grassmann. Ad esempio, la prima correzione alla funzione a due punti esatta del fotone è data dal diagramma



Il contributo del loop (di ordine e^2) è espresso da

$$\left(\frac{\delta}{\delta \eta(k+q)} \gamma^\mu \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(k)} \right) \left(\frac{\delta}{\delta \eta(k)} \gamma^\nu \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(k+q)} \right) \cdot \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \bar{\eta}(q_1) \frac{i}{q_1 - m + i\epsilon} \eta(-q_1) \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \bar{\eta}(q_2) \frac{i}{q_2 - m + i\epsilon} \eta(-q_2)$$

Se eseguiamo le derivate, il segno - nasce dall'azione della derivata rispetto a $\bar{\eta}(k)$, che deve scavalcare $\eta(-q_1)$ per agire su $\bar{\eta}(q_2)$; tutte le altre derivate o agiscono direttamente su un opportuno spinore oppure devono scavalcarne un numero pari. Infine gli indici spinoriali insiti nelle derivate si riorganizzano in modo da dare come risultato

$$(-1) Tr \left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m + i\epsilon} \right]$$

Per ottenere il valore finale del diagramma dobbiamo integrare sull'impulso libero k , ottenendo un risultato divergente.

Le identità di Ward

Vedremo adesso come dal path integral sia possibile ricavare informazioni utili riguardo alle funzioni a n punti, seguendo lo schema logico che nel caso classico ci porta a determinare le equazioni del moto mediante le equazioni di Eulero-Lagrange. Consideriamo come caso banale l'integrale

$$F(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{2}} (ax^2 + bx)$$

Tale integrale possiede una simmetria $x \rightarrow -x$ per cui anche se in linea di principio l'integrando non la possiede, a causa del termine lineare, il risultato non dipende da b . In termini di una teoria di campo, l'azione in generale potrà non essere invariante sotto una certa trasformazione di coordinate, ma l'integrale funzionale può comunque esserlo; questo come vedremo porterà alla generalizzazione delle simmetrie e delle leggi di conservazione a livello classico. Consideriamo ad esempio una teoria scalare (nel formalismo euclideo):

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] + \int J\phi}$$

Se supponiamo di fare un cambio di variabili della forma

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \epsilon(x)$$

dove $\epsilon(x)$ è una qualunque funzione delle coordinate, tale variazione influenzerà in linea di principio $\mathcal{D}\phi$, $S[\phi]$ e $\int J\phi$. Poichè la trasformazione è una semplice traslazione, la misura è invariante, mentre la variazione del termine di sorgente è facilmente controllabile:

$$\int J\phi \rightarrow \int J\phi + \delta\phi J$$

Anche l'azione in generale avrà un termine invariante e uno non invariante:

$$\begin{aligned} S[\phi] &= S[\phi]_{inv} + \tilde{S}[\phi] \\ \Rightarrow S[\phi] &\rightarrow S[\phi]_{inv} + \tilde{S}[\phi] + \delta\tilde{S}[\phi] = S[\phi] + \delta\tilde{S}[\phi] \end{aligned}$$

Il risultato dell'integrale funzionale, tuttavia, non è influenzato dal cambio di variabile, e in definitiva si dovrà avere

$$\delta_\epsilon Z[J] = 0$$

ma al prim'ordine in $\epsilon(x)$ si ha

$$0 = \delta_\epsilon Z[J] = \int d^4x \epsilon(x) \frac{\delta}{\delta\phi(x)} Z[J] = \int d^4x \epsilon(x) \int \mathcal{D}\phi \left(-\frac{\delta}{\delta\phi(x)} S[\phi] + J(x) \right)$$

Dividendo per $Z[0]$ otteniamo

$$0 = \int d^4x \epsilon(x) \left\langle \frac{\delta}{\delta\phi(x)} S[\phi] \right\rangle + \langle J(x) \rangle$$

Poichè $\epsilon(x)$ è arbitrario, è necessario che sia nulla la somma dei termini tra parentesi angolate:

$$\left\langle \frac{\delta}{\delta\phi(x)} S[\phi] \right\rangle + \langle J(x) \rangle$$

Se consideriamo le derivate rispetto a $J(x_1), \dots, J(x_n)$ (dell'espressione iniziale), otteniamo

$$0 = -\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)} \rangle + \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) J(x) \rangle$$

Quando queste relazioni vengono derivate da simmetrie di gauge, prendono il nome di *identità di Ward*, per simmetrie che hanno a che fare con le equazioni del moto si parla invece di *equazioni di Schwinger-Dyson*. Vediamo un'applicazione di queste tecniche al caso della QED:

$$Z_{QED}[J, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A^\mu \exp \left\{ i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i \not{D} - m) \psi - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right) + \int d^4x J_\mu(x) A^\mu(x) + \bar{\eta}(x) \psi(x) \bar{\psi}(x) \eta(x) \right\}$$

Se consideriamo una trasformazione di gauge infinitesima:

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A_\mu + \partial_\mu \omega \\ \psi &\rightarrow (1 + ie\omega)\psi \end{aligned}$$

chiaramente la parte di lagrangiana di gauge libera (ma con la derivata covariante) è invariante. Se imponiamo che la variazione del funzionale generatore sia nulla, otteniamo:

$$\begin{aligned} \int d^4x \partial_\mu \omega(x) \frac{\delta S_{em}[A^\nu]}{\delta A_\mu(x)} &= \int d^4x \partial_\mu \omega(x) \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \int d^4y \left(-\frac{1}{2\xi} (\partial_\nu A^\nu(y))^2 \right) = \\ &= -\frac{1}{\xi} \int d^4x \partial_\mu \omega(x) \int d^4y (\partial_\lambda A^\lambda(y)) \frac{\delta(\partial_\nu A^\nu(y))}{\delta A_\mu(x)} = \\ &= \frac{1}{\xi} \int d^4x \partial_\mu \omega(x) \int d^4y \partial_\nu (\partial_\lambda A^\lambda(y)) \frac{\delta(A^\nu(y))}{\delta A_\mu(x)} = \frac{1}{\xi} \int d^4x \partial_\mu \omega(x) g^{\mu\nu} \partial_\nu (\partial_\lambda A^\lambda(x)) = \\ &= -\frac{1}{\xi} \int d^4x \omega(x) \square (\partial_\lambda A^\lambda(x)) = \end{aligned}$$

Per il termine di sorgente invece:

$$\begin{aligned} \int d^4x d^4y \partial_\mu \omega \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} J_\mu(y) A^\mu(y) + \left(\frac{\delta}{\delta \psi(x)} \bar{\eta}(y) \psi(y) \right) (ie\omega(x) \psi(x)) - (ie\omega(x) \bar{\psi}(x)) \left(\frac{\delta}{\delta \bar{\psi}(x)} \bar{\psi}(y) \eta(y) \right) = \\ = \int d^4x \partial_\mu \omega(x) J^\mu(x) + ie\omega(x) (\bar{\eta}(x) \psi(x) - \bar{\psi}(x) \eta(x)) = \\ = \int d^4x \omega(x) [-\partial_\mu J^\mu(x) + ie(\bar{\eta}(x) \psi(x) - \bar{\psi}(x) \eta(x))] \end{aligned}$$

Allora l'identità di Ward si può esprimere come

$$\begin{aligned} 0 = \int d^4x \omega(x) \left[-\frac{i}{\xi} \left(\square \partial_\mu \left(-i \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \right) \right) - i \partial^\mu J_\mu - e \left(\bar{\eta}(x) \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \right) - \left(i \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \right) \eta(x) \right) \right] Z_{QED}[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] \end{aligned}$$

Essendo $\omega(x)$ arbitrario, anche stavolta possiamo concludere che l'integrando deve essere identicamente nullo:

$$\left[-\frac{i}{\xi} \left(\square \partial_\mu \left(-i \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \right) \right) - i \partial^\mu J_\mu - e \left(\bar{\eta}(x) \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \right) - \left(i \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \right) \eta(x) \right) \right] Z_{QED}[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = 0$$

Applicazioni importanti di questo risultato si hanno per il propagatore esatto del fotone, e per il vertice esatto.

Il propagatore esatto del fotone

Il propagatore del fotone è dato da

$$G_{\mu\nu}(x-y) = \frac{1}{Z[0]} \left(-i \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \right) \frac{\delta}{\delta J_\nu(x)} Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] \Big|_{J=\eta=\bar{\eta}=0}$$

Nell'identità di Ward abbiamo già una derivata rispetto a $J_\mu(x)$, dunque basterà derivare una volta rispetto a $J_\nu(x_2)$ l'espressione completa:

$$\begin{aligned} & \left(-i \frac{\delta}{\delta J_\nu(x_2)} \right) \int d^4x \omega(x) \left[-\frac{i}{\xi} \left(\square \partial_\mu \left(-i \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \right) \right) - i \partial^\mu J_\mu - e \left(\bar{\eta}(x) \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \right) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \left(i \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \right) \eta(x) \right) \right] Z_{QED} = \\ & = \int d^4x \omega(x) \left(-\frac{i}{\xi} \left(\square \partial_\mu \left(-i \frac{\delta}{\delta J_\nu(x_2)} \right) \left(-i \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \right) \right) - \frac{\delta}{\delta J_\nu(x_2)} (\partial^\mu J_\mu(x)) - \right. \\ & \quad \left. - i \partial^\mu J_\mu(x) \left(-i \frac{\delta}{\delta J_\nu(x_2)} \right) - e \left(\bar{\eta}(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} - \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \eta(x) \right) \left(-i \frac{\delta}{\delta J_\nu(x_2)} \right) \right) Z_{QED} \end{aligned}$$

I termini della seconda riga spariscono quando mandiamo le sorgenti a zero, dunque:

$$\left(-\frac{i}{\xi} \square \partial_\mu \right) G^{\nu\mu}(x_2, x) - \delta(x_2 - x) \partial^\nu = 0$$

In trasformata di Fourier si trova:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\xi} q^2 q_\mu G^{\mu\nu}(q) + i q^\nu = 0 \\ & \Rightarrow q_\mu G^{\mu\nu}(q) = -i \xi \frac{q^\nu}{q^2} \end{aligned}$$

Ricordiamo la forma del propagatore libero:

$$D_{\mu\nu}(q) = \frac{-i}{q^2 + i\epsilon} \left(\eta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right)$$

Si ha che

$$q_\mu D^{\mu\nu} = \frac{-i}{q^2 + i\epsilon} (q^\nu - q^\nu + \xi q^\nu) = -i \xi \frac{q^\nu}{q^2 + i\epsilon}$$

ovvero la parte longitudinale del propagatore esatto è la stessa di quella del propagatore libero: questo significa che le correzioni radiative non possono creare una componente longitudinale del propagatore, in altre parole il fotone è senza massa a tutti gli ordini perturbativi.

Il vertice esatto

Il vertice esatto è dato da

$$\langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) A^\mu(x_3) \rangle = \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x_1)} \right) \left(i \frac{\delta}{\delta \eta(x_2)} \right) \left(-i \frac{\delta}{\delta J_\mu(x_3)} \right) Z_{QED}[J^\mu, \eta, \bar{\eta}] \Big|_{J_\mu = \eta = \bar{\eta} = 0}$$

La derivata rispetto a J_μ è già presente dunque dobbiamo aggiungere quelle rispetto a η e $\bar{\eta}$:

$$\begin{aligned} & \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x_1)} \right) \left(i \frac{\delta}{\delta \eta(x_2)} \right) \int d^4 x \omega(x) \left[-\frac{i}{\xi} \left(\square \partial_\mu \left(-i \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \right) \right) - \right. \\ & \left. - e \left(\bar{\eta}(x) \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \right) - \left(i \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \right) \eta(x) \right) \right] Z_{QED} \end{aligned}$$

dove abbiamo sistematicamente eliminato il termine $\partial_\mu J^\mu$ poichè non dipende da η e $\bar{\eta}$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} & \int d^4 x \omega(x) \left[-\frac{i}{\xi} \left(\square \partial_\mu \left(-i \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \right) \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x_1)} \right) \left(i \frac{\delta}{\delta \eta(x_2)} \right) \right) - \right. \\ & \left. e \left((-1)(-i) \delta^4(x - x_1) \left(i \frac{\delta}{\delta \eta(x_2)} \right) \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \right) + i \delta^4(x - x_2) \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x_1)} \right) \left(i \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \right) \right) \right] Z_{QED} = 0 \end{aligned}$$

Dividendo per $Z[0]$ otteniamo

$$\int d^4 x \omega(x) \left[-\frac{i}{\xi} \square \partial_\mu \langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) A^\mu(x) \rangle + i e (\delta^4(x - x_1) \langle \psi(x) \bar{\psi}(x_2) \rangle - \delta^4(x - x_2) \langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x) \rangle) \right] = 0$$

da cui

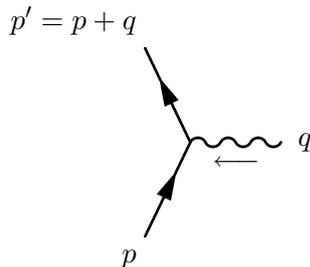
$$-\frac{i}{\xi} \square \partial_\mu \langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) A^\mu(x_3) \rangle + i e (\delta^4(x_3 - x_1) \langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle - \delta^4(x_3 - x_2) \langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle) = 0$$

Integrando in x_1, x_2, x_3 abbiamo

$$-\frac{i}{\xi} \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 e^{-ipx_1} e^{ip'x_2} \square \partial_\mu e^{-iqx_3} \langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) A^\mu(x) \rangle = -\frac{i}{\xi} (-q^2) (-iq_\mu) \langle \psi(p) \bar{\psi}(p') A^\mu(q) \rangle$$

$$\begin{aligned} & i e \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 e^{-ipx_1} e^{ip'x_2} e^{-iqx_3} (\delta^4(x_3 - x_1) \langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle - \delta^4(x_3 - x_2) \langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle) = \\ & = i e \int d^4 x_1 d^4 x_2 \left(e^{-i(p+q)x_1} e^{ip'x_2} \langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle - e^{-ipx_1} e^{i(p'-q)x_2} \langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle \right) = \\ & i e (\langle \psi(p+q) \bar{\psi}(p') \rangle - \langle \psi(p) \bar{\psi}(p'-q) \rangle) \end{aligned}$$

Per la conservazione dell'impulso al vertice, se prendiamo come diagramma



possiamo scrivere

$$\frac{1}{\xi}(q^2)(q_\mu)G_{(3)}^\mu(p, p'; q = p' - p) = ie(S(p') - S(p))$$

dove $S(p')$ e $S(p)$ sono i propagatori fermionici esatti, e $G_{(3)}^\mu(p, p')$ è la funzione a tre punti esatta. Scomponiamo ora la funzione a tre punti nelle sue componenti one particle irreducible:

$$G_{(3)}^\mu(p, p'; q) = G^{\mu\nu}(q)S(p)\Gamma_\nu(p, p')S(p')$$

dove $G^{\mu\nu}(q)$ è il propagatore esatto del fotone. Ricordando il risultato precedente, $q_\mu G^{\mu\nu}(q) = -i\xi\frac{q^\nu}{q^2}$ e si ha

$$-iq^\nu S(p)\Gamma_\nu(p, p')S(p') = ie(S(p') - S(p))$$

Moltiplicando a destra per $S^{-1}(p')$ e a sinistra per $S^{-1}(p)$ otteniamo

$$q^\nu\Gamma_\nu(p, p') = e(S^{-1}(p') - S^{-1}(p))$$

Questa è la relazione che intercorre ad ogni ordine tra il vertice esatto e i propagatori fermionici esatti; verificiamola almeno a ordine albero, dove

$$\Gamma^\nu = -ie\gamma^\nu$$

$$S^{-1}(p) = -i(\not{p} - m)$$

$$-ie\not{q} = -ie(\not{p}' - m - \not{p} + m)$$

$$\Rightarrow \not{q} = \not{p}' - \not{p}$$

ma questo è verificato per la conservazione dell'impulso. L'importanza di questa identità è legata all'universalità della rinormalizzazione della carica, possiamo infatti considerare il seguente problema: supponiamo di avere, oltre al campo fermionico, un campo scalare carico interagente con il campo fotonico con una certa carica e . Un loop fermionico e un loop bosonico danno risultati differenti, e ci possiamo chiedere se in linea di principio dovremmo definire due cariche diverse; tuttavia le identità di Ward ci assicurano che per anche nel caso bosonico abbiamo delle identità analoghe anche per il vertice fotone-campo bosonico, dunque il modo in cui la carica si rinormalizza in termini del propagatore A_μ sarà lo stesso del caso fermionico.

1.2.8 La rinormalizzazione della QED a 1 loop

Nella serie perturbativa della QED come sappiamo si trovano degli infiniti, dovuti ad integrazione su un numero infinito di gradi di libertà, e a uno spazio-tempo continuo. Se la teoria di campo descrive un sistema di meccanica statistica o di struttura della materia (ad esempio un reticolo), esistono un cutoff naturale ultravioletto, dato dal passo del reticolo, e un cutoff infrarosso, dato dalle dimensioni del sistema. Parlando invece di campi come quello elettromagnetico, oppure un campo fondamentale, risulta meno immediato stabilire se esistano cutoff naturali: anche se in maniera più subdola, è possibile mostrare che anche in teorie di campo esiste una scala massima di energie, oltre cui la teoria non dà risultati sensati. La rinormalizzazione si inserisce quindi in un contesto in cui vogliamo integrare su infiniti gradi di libertà un sistema che invece

ne presenta un numero finito: dal punto di vista matematico abbiamo delle quantità, i propagatori, che sono delle distribuzioni, e che sviluppano delle somme sui gradi di libertà intermedi che hanno in generale un risultato mal definito, in quanto divergono. Dovremo quindi introdurre un cutoff e limitare le somme in modo da ottenere un risultato finito. Inoltre dovremo ridefinire le variabili in modo che le variabili rinormalizzate siano finite e collegate a quantità osservabili. La rinormalizzazione quindi è un cambio di parametri della teoria, volto ad eliminare, o perlomeno controllare, gli infiniti che vi compaiono.

Definiremo le variabili iniziali come variabili *bare*, le quali conterranno gli infiniti, in modo tale che le variabili rinormalizzate siano finite. Nelle quantità fisiche come valori di aspettazione e correlatori compariranno pertanto le variabili rinormalizzate, mentre nella lagrangiana, che non è direttamente osservabile, compariranno dei termini aggiuntivi (i controtermini) che hanno il compito di cancellare gli infiniti della teoria.

Le singolarità possibili nella QED a 1 loop sono:

1. polarizzazione del fotone;
2. correzioni alla propagazione dell'elettrone;
3. correzioni proprie di vertice.

Limitandoci ai diagrammi irriducibili a una particella, per il propagatore del fotone possiamo scrivere

$$G_{\mu\nu} :$$


Il grado di divergenza di un diagramma è dato dall'andamento a grandi impulsi dell'integrando, ad esempio per il grafico di polarizzazione di vuoto si ha

$$\int^{\Lambda} \frac{d^4k}{k^2} \sim k^2 \sim \Lambda^2$$

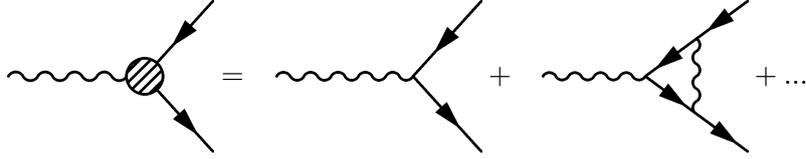
anche se per l'invarianza di gauge è possibile mostrare che l'andamento è soltanto logaritmico. Per il propagatore fermionico si ha

$$S(p) :$$


In questo caso la prima correzione ha un andamento

$$\int \frac{d^4k}{k^3} \sim \Lambda + \log \Lambda$$

Stavolta oltre al termine leading c'è anche un termine subleading e questo porta a dover introdurre non una ma due costanti di rinormalizzazione. Il vertice si corregge in questo modo:



Poichè ci sono due propagatori fermionici e uno fotonico si ha

$$\int \frac{d^4 k}{k^4} \sim \log \Lambda$$

In tutto abbiamo bisogno quindi di quattro costanti di rinormalizzazione, una per ogni grado di divergenza che incontriamo. Si parla di teoria *rinormalizzabile* quando le correzioni radiative possono essere regolarizzate con i termini già presenti nella lagrangiana; per una teoria non rinormalizzabile abbiamo bisogno di introdurre termini aggiuntivi che ad ordini successivi produrranno nuovi termini divergenti. Ci sono vari modi per capire se una teoria è rinormalizzabile o meno, uno di questi è osservare la dimensionalità della costante di accoppiamento: ad esempio, se la costante di accoppiamento ha dimensione di massa nulla (come nel caso della QED), il numero di costanti da rinormalizzare coincide col numero di parametri della lagrangiana, e la teoria è rinormalizzabile. La lagrangiana della QED è la seguente

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial^\mu A_0^\nu - \partial^\nu A_0^\mu)^2 + \bar{\psi}_0(i \not{\partial} - m_0)\psi - e\bar{\psi}_0\gamma^\mu\psi_0 A_{0\mu} + \text{gauge fixing}$$

quindi, dati i parametri *bare* A_0, ψ_0, e_0, m_0 , che possono contenere delle divergenze, definiremo parallelamente i rispettivi parametri rinormalizzati mediante le loro relazioni con le costanti di rinormalizzazione:

$$\begin{aligned} A_0 &= \sqrt{A_3}A \\ \psi_0 &= \sqrt{Z_2}\psi \\ e &= e_0\sqrt{Z_3}\frac{Z_2}{Z_1} \\ m &= m_0 - \delta m_0 \end{aligned}$$

Dopo il primo passo (l'introduzione del cutoff) e il secondo (l'introduzione delle costanti di rinormalizzazione), il terzo passo sarà imporre che le quantità fisiche, cioè i correlatori, in termini delle variabili rinormalizzate A, ψ, e, m siano finite. Innanzitutto dobbiamo specificare il *punto di rinormalizzazione*, ovvero un punto particolare e arbitrario in cui valutiamo la funzione da sottrarre ai vari diagrammi divergenti per ottenere risultati finiti.

Consideriamo innanzitutto il propagatore bare del fotone:

$$G_{\mu\nu}^0 = \langle A_\mu^0 A_\nu^0 \rangle = -i \frac{Z_3}{q^2 + i\epsilon} \left(\frac{\eta_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu}{q^2} \right) (1 + \text{termini regolari per } \Lambda \rightarrow \infty)$$

dove abbiamo concentrato le divergenze nella costante Z_3 ; questo significa che

$$G_{\mu\nu} = \frac{G_{\mu\nu}^0}{Z_3} = \langle A_\mu A_\nu \rangle = \frac{-i}{q^2 + i\epsilon} \left(\frac{\eta_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu}{q^2} \right) (1 + \text{termini regolari per } \Lambda \rightarrow \infty)$$

è una quantità finita. Poichè Z_3 è collegata alla propagazione del fotone, avrà una divergenza di ordine $\log \Lambda$, come abbiamo visto. Analogamente per il propagatore del fermione:

$$S_0 = \langle \psi_0 \bar{\psi}_0 \rangle = \frac{iZ_2}{\not{p} - m} (1 + \text{termini regolari per } \Lambda \rightarrow \infty)$$

$$\Rightarrow S = \frac{S_0}{Z_2} = \frac{i}{\not{p} - m} (1 + \text{termini regolari per } \Lambda \rightarrow \infty)$$

Stavolta abbiamo due costanti di rinormalizzazione a causa delle due singolarità da curare: quella lineare (curata da δm_0) e quella logaritmica (curata da Z_2). Infine per il vertice esatto:

$$\Gamma_\mu^0 = \langle A_\mu^0 \psi_0 \bar{\psi}_0 \rangle_{1PI} = \frac{\langle A_\mu^0 \psi_0 \bar{\psi}_0 \rangle}{\langle A^0 A^0 \rangle \langle \psi_0 \bar{\psi}_0 \rangle^2} = \frac{1}{\sqrt{Z_3} Z_2} \langle A_\mu \psi \bar{\psi} \rangle_{1PI} = \frac{-ie}{\sqrt{Z_3} Z_2} \gamma_\mu (1 + \text{termini regolari per } \Lambda \rightarrow \infty)$$

Come condizioni di rinormalizzazione in QED sceglieremo le condizioni di rinormalizzazione on shell:

$$p_1^2 = p_2^2 = m^2$$

$$q^2 = 0$$

Sceglieremo come condizione di rinormalizzazione per il vertice

$$\Gamma_\mu(q, p_1, p_2) \Big|_{\substack{q^2=0 \\ p_1^2=p_2^2=m^2}} = -ie\gamma_\mu$$

Propagatore del fotone

Come abbiamo visto dall'identità di Ward, il propagatore esatto del fotone ha una parte longitudinale che non risente delle correzioni radiative, dunque non sarà influenzata alla rinormalizzazione; possiamo scrivere

$$G_{\mu\nu}^0 = G_{\mu\nu}^{0(L)} + G_{\mu\nu}^{0(T)}$$

Il propagatore esatto, sarà la somma della seguente serie, al secondo ordine nella carica elettrica per la correzione principale:

$$\text{wavy line with circle} = \text{wavy line} + \text{wavy line with one loop} + \text{wavy line with two loops} + \dots$$

Se indichiamo il loop fermionico con $i\Pi^{\alpha\beta}(q)$, la serie si scrive in forma analitica come

$$-i \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} + \left(-i \frac{\eta_{\mu\alpha}}{q^2 + i\epsilon} \right) \left(i\Pi^{\alpha\beta}(q) \right) \left(-i \frac{\eta_{\beta\nu}}{q^2 + i\epsilon} \right) + \left(-i \frac{\eta_{\mu\alpha}}{q^2 + i\epsilon} \right) \left(i\Pi^{\alpha\beta}(q) \right) \left(-i \frac{\eta_{\beta\gamma}}{q^2 + i\epsilon} \right) \left(i\Pi^{\gamma\sigma}(q) \right) \left(-i \frac{\eta_{\sigma\nu}}{q^2 + i\epsilon} \right) + \dots$$

Vediamo che il primo termine riproduce da solo il risultato dell'identità di Ward, dunque gli altri termini non possono dare contributo; da questo concludiamo che $\Pi^{\alpha\beta}$ deve essere trasverso:

$$q_\alpha \Pi^{\alpha\beta}(q)$$

Se $\Pi^{\alpha\beta}$ è trasverso, è necessariamente della forma

$$\Pi^{\alpha\beta}(q) = (q^2 \eta^{\alpha\beta} - q^\alpha q^\beta) \Pi(q^2)$$

dove $\Pi(q^2)$ è una funzione scalare, che non può avere un polo in $q^2 = 0$: l'unica causa di un polo del genere è uno stato intermedio di singola particella senza massa, ma poichè stiamo considerando solo i contributi irriducibili a una particella questa eventualità è esclusa (almeno in dimensioni maggiori di 2, nel qual caso Schwinger ha dimostrato la possibilità di stati a due particelle massless, la cui singolarità è un polo piuttosto che un branch cut). Il fatto che il polo del propagatore resti a $q^2 = 0$ implica che il fotone rimanga a massa nulla a tutti gli ordini perturbativi.

Dunque il loop fermionico ha una struttura proporzionale a quella di un proiettore, in particolare a quella di un operatore idempotente:

$$\Pi_{\alpha\beta}\eta^{\beta\gamma}\Pi_{\gamma\delta} = \Pi_{\alpha\delta} \cdot \Pi(q^2)$$

e la serie si riscrive:

$$\begin{aligned} & -i\frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2+i\epsilon} + \left(-i\frac{\eta_{\mu\alpha}}{q^2+i\epsilon}\right) \left(\eta^{\alpha\nu} - \frac{q^\alpha q_\nu}{q^2}\right) (\Pi(q^2) + \Pi^2(q^2) + \dots) = \\ & = \frac{-i}{q^2+i\epsilon} \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} + \left(-i\frac{\eta_{\mu\alpha}}{q^2+i\epsilon}\right) \left(\eta_\nu^\alpha - \frac{q^\alpha q_\nu}{q^2}\right) + \left(-i\frac{\eta_{\mu\alpha}}{q^2+i\epsilon}\right) \left(\eta^{\alpha\nu} - \frac{q^\alpha q_\nu}{q^2}\right) (\Pi(q^2) + \Pi^2(q^2) + \dots) = \end{aligned}$$

ma il secondo e il terzo termine ricostruiscono una serie geometrica:

$$= \frac{-i}{q^2+i\epsilon} \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} + \left(-i\frac{\eta_{\mu\alpha}}{q^2+i\epsilon}\right) \left(\eta_\nu^\alpha - \frac{q^\alpha q_\nu}{q^2}\right) \frac{1}{1-\Pi(q)}$$

Ancora, in termini del propagatore trasverso e di quello longitudinale:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^{0(L)} &= \frac{-i}{q^2+i\epsilon} \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \\ G_{\mu\nu}^{0(T)} &= \frac{-i}{q^2+i\epsilon} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) \frac{1}{1-\Pi(q^2)} \end{aligned}$$

La condizione di rinormalizzazione sul propagatore esatto (quindi su quello trasverso) è che per $q^2 = 0$ il propagatore completo sia quello libero; per far questo dobbiamo definire la costante Z_3 in questo modo:

$$\begin{aligned} Z_3 &= \frac{1}{1+\Pi(0)} \\ \Rightarrow G_{\mu\nu}^{(T)} &= \frac{G_{\mu\nu}^{0(T)}}{Z_3} = \frac{-i}{q^2+i\epsilon} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) \frac{1-\Pi(0)}{1-\Pi(q^2)} \end{aligned}$$

Al primo ordine perturbativo in α , $\Pi(0) \sim \alpha \log \Lambda + O(\alpha^2)$, dunque possiamo scrivere

$$\begin{aligned} 1 - \Pi(0) &\sim \frac{1}{1 + \Pi(0)} \\ G_{\mu\nu}^{(T)} &= \frac{-i}{q^2+i\epsilon} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) \frac{1}{1 - \Pi(q^2) + \Pi(0)} \end{aligned}$$

Definendo la nuova quantità

$$\tilde{\Pi}(q^2) = \Pi(q^2) - \Pi(0)$$

si ha finalmente

$$G_{\mu\nu}^{(T)} = \frac{-i}{q^2+i\epsilon} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) \frac{1}{1 - \tilde{\Pi}(q^2)}$$

Il propagatore del fermione

La serie per il propagatore del fermione, indicando il loop come $-i\Sigma(p)$, si può esprimere come

$$S^0(p) = \frac{i}{\not{p} - m_0} + \frac{i}{\not{p} - m_0}(-i\Sigma(p))\frac{i}{\not{p} - m_0} + \dots$$

Raccogliendo $\frac{i}{\not{p} - m_0}$, e osservando che $\Sigma(p) \equiv \Sigma(\not{p}^2)$ commuta con $\frac{i}{\not{p} - m_0}$, otteniamo di nuovo una serie geometrica:

$$S^0(p) = \frac{i}{\not{p} - m_0} \left(1 + \Sigma(p)\frac{1}{\not{p} - m_0} + \left(\Sigma(p)\frac{1}{\not{p} - m_0} \right)^2 + \dots \right) = \frac{i}{(\not{p} - m_0) \cdot \left(1 - \frac{\Sigma(p)}{\not{p} - m_0} \right)} = \frac{i}{\not{p} - m_0 - \Sigma(p)}$$

Le condizioni di rinormalizzazione saranno due, essendo due le costanti da rinormalizzare. Innanzitutto imporremo che al punto di rinormalizzazione ($p^2 = m^2$) il propagatore abbia un polo; per far questo è necessario che

$$\Sigma(p^2 = m^2) = m - m_0 = \delta m \simeq \Sigma(p^2 = m_0^2)$$

dove m è la massa fisica. Per valori dell'impulso vicini alla massa fisica possiamo sviluppare in serie $\Sigma(\not{p})$ e vedere come si comporta:

$$\Sigma(\not{p}) = \Sigma(m) + (\not{p} - m) \left. \frac{d\Sigma(\not{p})}{d\not{p}} \right|_{p=m} + O((\not{p} - m)^2) = \delta m_0 + (\not{p} - m) \left. \frac{d\Sigma(\not{p})}{d\not{p}} \right|_{p=m} + O((\not{p} - m)^2)$$

dove $\Sigma_e(p)$ è una funzione regolare di p .

Da cui il propagatore nelle vicinanze del polo ha la forma

$$\frac{i}{\not{p} - m_0 - \Sigma(p)} \sim \frac{i}{(\not{p} - m) \left(1 - \left. \frac{d\Sigma(\not{p})}{d\not{p}} \right|_{p=m} \right)}$$

Poichè $S(p) = \frac{S_0(p)}{Z_2}$, risulta naturale definire

$$Z_2 = \frac{1}{1 - \left. \frac{d\Sigma(\not{p})}{d\not{p}} \right|_{p=m}}$$

in modo tale che nelle vicinanze di $p^2 \sim m^2$ otteniamo il propagatore libero. Osserviamo che al prim'ordine $Z_2 = 1$ e $\delta m_0 = 0$ e le condizioni di rinormalizzazione si scrivono semplicemente

$$\Sigma(p^2 = m^2) = 0$$

$$\left. \frac{d\Sigma(p)}{d\not{p}} \right|_{p=m} = 0$$

Identità di Ward e universalità della carica

L'identità di Ward relativa al vertice ha come conseguenza sulla rinormalizzazione il fatto che $Z_1 = Z_2$. Infatti se imponiamo che la condizione

$$q_\mu \Gamma_0^\mu = e_0(S_0^{-1}(p') - S_0^{-1}(p))$$

valga non solo per variabili bare ma anche per variabili rinormalizzate (in modo da mantenere l'invarianza di gauge anche dopo la rinormalizzazione), abbiamo

$$q_\mu \Gamma^\mu = e(S^{-1}(p') - S^{-1}(p))$$

Ma dalle nostre definizioni delle costanti di rinormalizzazione

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu &= \sqrt{Z_3} Z_2 \Gamma_0^\mu \\ e &= \frac{\sqrt{Z_3} Z_2}{Z_1} e_0 \\ S^{-1}(p) &= Z_2 S_0^{-1}(p) \\ \Rightarrow q_\mu \sqrt{Z_3} Z_2 \Gamma_0^\mu &= \frac{\sqrt{Z_3} Z_2}{Z_1} Z_2 e_0 (S_0^{-1}(p') - S_0^{-1}(p)) \\ \Rightarrow q_\mu \Gamma_0^\mu &= \frac{Z_2}{Z_1} e_0 (S_0^{-1}(p') - S_0^{-1}(p))\end{aligned}$$

che confrontata con la relazione di partenza impone $Z_2 = Z_1$.

La polarizzazione del vuoto

Consideriamo in dettaglio il diagramma

$$i\Pi_{\mu\nu}(q) = \text{diagramma}$$

dove i propagatori fotonici esterni sono amputati. Il loop dà il seguente contributo

$$\begin{aligned}i\Pi(k^2) &= (-1)(-ie_0)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m + i\epsilon} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} - m + i\epsilon} \right] = \\ &= -ie_0^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} [\gamma^\mu (\not{k} + \not{q} + m) \gamma^\nu (\not{k} + m)]}{[(k+q)^2 - m^2 + i\epsilon][(k^2 - m^2 + i\epsilon)]}\end{aligned}$$

Possiamo risolvere questo integrale sfruttando l'unitarietà della matrice di scattering, cioè il fatto che i suoi elementi di matrice soddisfino a

$$(SS^\dagger)_{fi} = \sum_n S_{fn} S_{ni}^\dagger = \delta_{fi}$$

Scrivendo la matrice di scattering nella forma

$$S = I + i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) T$$

la relazione diventa

$$\begin{aligned} \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) (T_{fi} - T_{if}^*) + (2\pi)^8 \sum_n \delta^4(p_f - p_n) \delta^4(p_n - p_i) T_{fn} T_{in}^* &= \delta_{fi} \\ \Rightarrow T_{fi} - T_{if}^* &= i(2\pi)^4 \sum_n \delta^4(p_f - p_n) T_{fn} T_{in}^* \end{aligned}$$

Osserviamo che la parte di sinistra è lineare negli elementi di matrice di T mentre quella di destra è quadratica, dunque se l'interazione contiene un parametro piccolo la parte sinistra sarà del prim'ordine mentre quella di destra sarà del secondo: al prim'ordine potremo scrivere

$$T_{fi} = T_{if}^*$$

ovvero al prim'ordine T è un operatore hermitiano.

Tornando al diagramma di polarizzazione del vuoto, possiamo considerarlo come un'ampiezza di transizione di un fotone in se stesso (quindi un elemento diagonale della matrice di scattering) attraverso la disintegrazione di una coppia elettrone-positrone. Lo stato intermedio contiene un elettrone di quadrimpulso $k + q$ e un positrone di quadrimpulso k , e la relazione di unitarietà ci dà

$$2Im[M_{ii}] = \frac{|\vec{k}|}{(4\pi)^2 E_{cm}} \sum_{pol} \int |M_{ni}|^2 d\Omega$$

dove $d\Omega$ è l'elemento di angolo solido relativo alla direzione dei quadrimpulsi dei fermioni, e la sommatoria è sulle polarizzazioni del fotone. M_{ii} è data da

$$iM_{ii} = \sqrt{4\pi} \epsilon_\mu^*(q) \sqrt{4\pi} \epsilon_\nu(q) \frac{i\Pi^{\mu\nu}}{4\pi}$$

mentre M_{ni} è data dal diagramma di disintegrazione del fotone in una coppia:

$$M_{ni} = \text{diagramma}$$

The diagram shows a wavy line on the left labeled with momentum q . It splits into two straight lines on the right. The upper straight line is labeled with momentum k and the lower straight line is labeled with momentum $q+k$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow M_{ni} &= -e_0 \sqrt{4\pi} \epsilon_\mu(q) j^\mu \\ j^\mu &= \bar{u}(k+q) \gamma^\mu v(k) \end{aligned}$$

Si ha allora

$$2\epsilon_\mu^*(q) \epsilon_\nu(q) Im[\Pi^{\mu\nu}] = \frac{e^2}{4\pi} \frac{|\vec{k}|}{E_{cm}} \sum_{pol} \int j^{\mu*} j^\nu \epsilon_\mu^*(q) \epsilon_\nu(q)$$

Possiamo utilizzare la formula

$$\overline{\epsilon^{\mu*}(q)\epsilon^\nu(q)} = -\frac{1}{3} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right)$$

che si dimostra facilmente ricordando che $\epsilon \cdot q = 0$, $\epsilon_\mu \epsilon^{\mu*} = -1$, e che il generico tensore di rango 2 si scrive come $ag_{\mu\nu} + bk_\mu k_\nu$. Prendiamo quindi la media del prodotto $\epsilon_\mu^*(q)\epsilon_\nu(q)$ a destra e a sinistra; ricordando che $\Pi^{\mu\nu}(q)$ è trasverso, che $k_\mu j^\mu = 0$, e che $\Pi_\mu^\mu = 3q^2\Pi(q^2)$, si ha

$$2Im[q^2\Pi(q^2)] = \frac{e_0^2}{12\pi} \frac{|\vec{k}|}{E_{cm}} \sum_{pol} \int j^{*\mu} j_\mu d\Omega$$

Poichè $j^{*\mu} j_\mu$ non dipende dall'orientazione degli impulsi, l'integrale angolare restituisce 4π , mentre la somma sulle polarizzazioni dei fermioni porta come al solito a una traccia

$$2Im[q^2\Pi(q^2)] = e_0^2 \frac{|\vec{k}|}{3E_{cm}} Tr [\gamma_\mu (\not{k} + \not{q} - m) \gamma^\mu (m - \not{k})] = \frac{8e_0^2 |\vec{k}|}{3E_{cm}} ((q+k) \cdot k - 2m^2)$$

Introduciamo la variabile

$$s = q^2 = ((k+q) - k)^2 = 2m^2 - 2k \cdot (k+q)$$

É chiaro che l'energia nel centro di massa è proprio

$$E_{cm}^2 = q^2 = s$$

e dunque

$$|\vec{k}|^2 = \frac{s}{4} - m^2$$

Si ha infine

$$Im[\Pi(s)] = -\frac{\alpha_0}{3} \sqrt{\frac{s-4m^2}{s}} \left(1 + \frac{2m^2}{s}\right)$$

per $t \geq 4m^2$. Osserviamo che il valore $s = 4m^2$ è il valore di soglia per la creazione da parte di un fotone virtuale di una coppia elettrone-positrone, e a quest'ordine (e^2) questo è l'unico stato intermedio che può figurare nella condizione di unitarietà. Sempre in questa approssimazione, per $s < 4m^2$ non si può avere tale stato intermedio, dunque l'ampiezza di transizione è nulla, e $Im[\Pi(s)] = 0$. Si può mostrare che vale la seguente formula integrale di Cauchy:

$$\begin{aligned} \Pi(s) &= \int_0^\infty \frac{ds'}{s'-s} Im[\Pi(s')] \\ \Rightarrow \Pi(q^2) &= -\frac{\alpha_0}{3\pi} \int_{4m^2}^{\Lambda^2} \frac{ds}{s-q^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \left(1 + \frac{2m^2}{s}\right) \end{aligned}$$

dove Λ è il cutoff che abbiamo introdotto a mano. Possiamo valutare questo integrale per $q^2 = 0$, nel limite $\Lambda \rightarrow \infty$:

$$\Pi(0) = -\frac{\alpha_0}{3\pi} \int_{4m^2}^{\Lambda^2} \frac{ds}{s} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \left(1 + \frac{2m^2}{s}\right) \sim -\frac{\alpha_0}{3\pi} \log \frac{\Lambda^2}{4m^2}$$

Ricordando che avevamo definito $Z_3 = \frac{1}{1-\Pi(0)}$, e che $e = \sqrt{Z_3}e_0$, possiamo scrivere:

$$Z_3 = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \log \frac{\Lambda^2}{4m^2}}$$

$$\alpha = Z_3 \alpha_0 = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \log \frac{\Lambda^2}{4m^2}}$$

α è rinormalizzata fissando un certo punto di rinormalizzazione, che compare nella sua espressione come un argomento m :

$$\alpha(m) = \frac{1}{137}$$

Poichè è α_0 a contenere le divergenze, mentre $\alpha(m)$ è finita, è più conveniente ribaltare la relazione

$$\alpha_0 = \frac{\alpha(m)}{1 - \frac{\alpha(m)}{3\pi} \log \frac{\Lambda^2}{4m^2}}$$

Il propagatore trasverso è invece corretto nel seguente modo:

$$G_{\mu\nu}^{(T)} = -i \frac{\eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}}{q^2 + i\epsilon} \frac{1}{1 - \Pi(q^2) - \Pi(0)} = -i \frac{\eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}}{q^2 + i\epsilon} \frac{1}{1 - \tilde{\Pi}(q^2)}$$

L'effetto finale della rinormalizzazione a un loop è quello di modificare la propagazione di un fattore $\frac{1}{1 - \tilde{\Pi}(q^2)}$, che possiamo valutare in questo modo:

$$\tilde{\Pi}(q^2) = \Pi(q^2) - \Pi(0) = \frac{\alpha_0}{3\pi} \int_{4m^2}^{\Lambda^2} ds \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \left(1 + \frac{2m^2}{s}\right) \frac{s - s + q^2}{(s - q^2)s} = q^2 \frac{\alpha_0}{3\pi} \int_{4m^2}^{\Lambda^2} \frac{ds}{(s - q^2)s} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \left(1 + \frac{2m^2}{s}\right)$$

Questo integrale non è più divergente, dunque possiamo pensare di mandare il cutoff all'infinito, dopo aver avuto l'accortezza di sostituire α_0 con $\alpha(m)$ (cosa consentita a quest'ordine perturbativo). Osserviamo infatti che l'espressione per α_0 contiene un polo per

$$\frac{\Lambda^2}{4m^2} = e^{\frac{3\pi}{\alpha(m)}} \sim e^{1291}$$

detto *polo di Landau*. In questo modo si ha un cutoff naturale della teoria, nel quale la costante di accoppiamento diventa infinita, e la teoria perde quindi di significato.

Da questi ragionamenti appare naturale introdurre una costante di accoppiamento effettiva

$$\alpha_{eff}(q^2) = \frac{\alpha(m)}{1 + \tilde{\Pi}(q^2)}$$

o *running coupling constant*. Se consideriamo una situazione di scattering, in cui $q^2 < 0$, per $-q^2 \gg m^2$ (cioè a piccole distanze) abbiamo

$$\tilde{\Pi}(q^2) \sim \frac{\alpha(m)}{3\pi} \log \frac{-q^2}{4m^2}$$

da cui

$$\alpha_{eff}(q^2) \sim \frac{\alpha(m)}{1 - \frac{\alpha(m)}{3\pi} \log \frac{-q^2}{4m^2}}$$

Vediamo che questa funzione cresce a piccole distanze (grandi q^2), e questo ha una interpretazione come costante dielettrica effettiva: in un mezzo, come l'acqua ad esempio, possiamo definire una costante dielettrica effettiva come quella costante sentita da particelle test a dimensioni macroscopiche. Un modo per definirla è dato dalla legge di Gauss:

$$e(R) = \int_R \vec{E} \cdot d\vec{S} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{e}{\epsilon}$$

La costante dielettrica risulta essere positiva e maggiore di 1, ad esempio per lacqua è circa 60; questo avviene perchè ci sono effetti di polarizzazione del mezzo che schermano le cariche (ad esempio molecole dipolari intorno alla carica nuda), che da lontano sembrano più piccole. In elettrodinamica accade la stessa cosa, infatti il vuoto non è un oggetto inerte, bensì si ha continuamente una creazione di coppie e^+e^- virtuali che schermano la carica, la quale cresce al diminuire della distanza: ad energie dell'ordine della massa dei bosoni W^\pm, Z_0 risulta infatti una costante di accoppiamento $\alpha \sim \frac{1}{120}$ (misure di LEP).

L'equazione di Wilson

Una volta introdotta la costante di accoppiamento effettiva, possiamo scrivere un'equazione differenziale, che descrive l'andamento di tale costante con la scala:

$$t = \log \frac{-q^2}{4m^2}$$

$$\alpha_{eff}(t) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha t}{3\pi}}$$

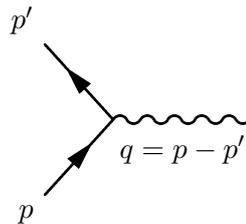
$$\frac{d}{dt} \alpha_{eff} = \frac{\alpha}{(1 - \frac{\alpha t}{3\pi})^2} \frac{\alpha}{3\pi} = \frac{\alpha_{eff}^2}{3\pi}$$

Tale equazione prende il nome di *equazione di Wilson*, e l'espressione $\frac{\alpha_{eff}^2}{3\pi}$ viene detta *funzione β* :

$$\beta(\alpha_{eff}) = \frac{\alpha_{eff}^2}{3\pi}$$

Il vertice esatto

Consideriamo il diagramma



Metteremo i fermioni on shell:

$$p^2 = p'^2 = m^2$$

ma non sarà possibile fare lo stesso anche per il fotone, per i soliti motivi cinematici. Poichè la corrente è quadrivettoriale, e gli unici quadrivettori a disposizione sono γ^μ e i due impulsi p^μ e p'^μ , Γ^μ sarà della forma

$$\Gamma^\mu = A(q^2)\gamma^\mu + B(q^2)(p + p')^\mu + C(q^2)(p - p')^\mu$$

La quadricorrente si deve conservare, cioè si deve avere

$$q_\mu J^\mu = 0$$

dunque

$$q_\mu \gamma^\mu = \not{q} = \not{p} - \not{p}' \Rightarrow \bar{u}(p')(\not{p} - \not{p}')u(p) = \bar{u}(p')(m - m)u(p) = 0$$

$$q_\mu(p + p')^\mu = (p - p')_\mu(p + p')^\mu = p^2 - p'^2 = 0$$

dunque i primi due addendi verificano l'uguaglianza, ma il terzo termine non si annulla identicamente:

$$q_\mu(p - p')^\mu = q^2 \neq 0$$

dunque dobbiamo imporre $C(q^2) = 0$, da cui

$$\Gamma^\mu = A(q^2)\gamma^\mu + B(q^2)(p + p')^\mu$$

Ricordiamo l'identità di Gordon:

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} - \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} \right] u(p)$$

che ci permette di riscrivere la corrente sostituendo il termine $(p + p')^\mu$ con un termine $\sigma^{\mu\nu}q_\nu$:

$$\bar{u}(p')\Gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[A(q^2)\gamma^\mu + B(q^2)\gamma^\mu + B(q^2)\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} \right] u(p) \equiv \bar{u}(p') \left[F_1(q^2)\gamma^\mu + F_2(q^2)\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} \right] u(p)$$

dove F_1 e F_2 sono due funzioni ignote di q^2 , che vengono chiamate *fattori di forma*: la rinormalizzazione produrrà degli effetti fisici su di esse. Consideriamo a questo proposito un potenziale scalare indipendente dal tempo. Risulta che $q^2 = p^2 + p'^2 - 2p \cdot p' = 1(m^2 - p \cdot p')$; vogliamo conoscere questa quantità nel limite non relativistico, cioè quando gli impulsi sono piccoli rispetto alle masse:

$$q^2 < m^2$$

In questo caso, poichè $q = (E - E', \vec{p} - \vec{p}')$, si ha $q^2 \sim -|\vec{q}|^2$. La corrente quindi è data da:

$$J^\mu = e\bar{u}(p') \left[F_1(q^2)\gamma^\mu + F_2(q^2)\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} \right] u(p)$$

Se consideriamo

$$A_0 J^0 = eA_0\bar{u}(p') \left[F_1(q^2)\gamma^0 + F_2(q^2)\frac{i\sigma^{0\nu}q_\nu}{2m} \right] u(p)$$

per piccoli q^2 (e assumendo che F_1 ed F_2 siano polinomiali in 1^2) il termine dominante è quello relativo a γ^μ , e si ha

$$A_0 J^0 \rightarrow A^0\bar{u}(p')\gamma_0 u(p)F_1(q^2)$$

Dunque il fattore di forma $F_1(q^2)$ ha l'interpretazione fisica di distribuzione di carica: la rinormalizzazione si concretizza quindi in un effetto di nube virtuale attorno all'elettrone, che genera una dipendenza da q^2 della carica. Le condizioni di rinormalizzazione sono:

$$F_1(0) = 1$$

ovvero le correzioni radiative alla carica (unitaria) dell'elettrone devono svanire a $q^2 = 0$, inoltre

$$F_1(q^2) = 1 - b(|\vec{q}|^2)$$

Il momento magnetico anomalo

Per la parte magnetica viceversa si ha una correzione al momento magnetico; in questo caso però è più utile usare la base $\gamma^\mu, (p + p')^\mu$:

$$\begin{aligned} J^\mu &= e\bar{u}(p') \left[F_1(q^2) \frac{(p + p')^\mu}{2m} + i(F_2(q^2) - F_1(q^2)) \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p) \\ \Rightarrow A_i J^i &= eA_i \bar{u}(p') \left(\frac{1}{2m} (p + p')^i F_1 + \frac{i\sigma^{i\nu} q_\nu}{2m} (F_1 - F_2) \right) u(p) \end{aligned}$$

Il primo termine dà l'accoppiamento $\vec{v} \cdot \vec{A}$ della particella in moto in campo esterno, e contribuisce al fattore di forma di carica, mentre il secondo termine come vedremo è collegato all'accoppiamento di momento magnetico. Nel limite non relativistico, infatti, possiamo espandere gli spinori al prim'ordine negli impulsi:

$$\begin{aligned} u(p) &= \left(\begin{array}{l} \left(\sqrt{E + |\vec{p}|} \left(\frac{1 - \vec{\sigma} \cdot \vec{n}}{2} \right) + \sqrt{E - |\vec{p}|} \left(\frac{1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{n}}{2} \right) \right) \phi \\ \left(\sqrt{E + |\vec{p}|} \left(\frac{1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{n}}{2} \right) + \sqrt{E - |\vec{p}|} \left(\frac{1 - \vec{\sigma} \cdot \vec{n}}{2} \right) \right) \phi \end{array} \right) = \\ &\sim \left(\begin{array}{l} \left(\sqrt{m + \frac{p^2}{2m} + |\vec{p}|} \left(\frac{1 - \vec{\sigma} \cdot \vec{n}}{2} \right) + \sqrt{m + \frac{p^2}{2m} - |\vec{p}|} \left(\frac{1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{n}}{2} \right) \right) \phi \\ \left(\sqrt{m + \frac{p^2}{2m} + |\vec{p}|} \left(\frac{1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{n}}{2} \right) + \sqrt{m + \frac{p^2}{2m} - |\vec{p}|} \left(\frac{1 - \vec{\sigma} \cdot \vec{n}}{2} \right) \right) \phi \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{l} \left(\sqrt{m} \left(1 + \frac{|\vec{p}|}{2m} \right) \left(\frac{1 - \vec{\sigma} \cdot \vec{n}}{2} \right) + \sqrt{m} \left(1 - \frac{|\vec{p}|}{2m} \right) \left(\frac{1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{n}}{2} \right) \right) \phi \\ \left(\sqrt{m} \left(1 + \frac{|\vec{p}|}{2m} \right) \left(\frac{1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{n}}{2} \right) + \sqrt{m} \left(1 - \frac{|\vec{p}|}{2m} \right) \left(\frac{1 - \vec{\sigma} \cdot \vec{n}}{2} \right) \right) \phi \end{array} \right) = \\ &= \sqrt{m} \left(\begin{array}{l} \left(1 - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2m} \right) \phi \\ \left(1 + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2m} \right) \phi \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ricordando la definizione di $\sigma^{\mu\nu}$:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

si ha che

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &= \frac{i}{2} [\gamma^i, \gamma^j] = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} [\sigma^i, \sigma^j] & 0 \\ 0 & [\sigma^i, \sigma^j] \end{pmatrix} = \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \\ \sigma^{i,0} &= \frac{i}{2} [\gamma^i, \gamma^0] = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Allora per il termine contenente F_2 abbiamo:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \left[\frac{i\sigma^{l\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p) &= \bar{u}(p') \left[\frac{i\sigma^{lm} q_m}{2m} \right] u(p) + \bar{u}(p') \left[\frac{i\sigma^{l0} q_0}{2m} \right] u(p) = \\ &= \bar{u}(p') \left[\frac{iq_m}{2m} \epsilon^{lmn} \begin{pmatrix} \sigma^n & 0 \\ 0 & \sigma^n \end{pmatrix} \right] u(p) + \bar{u}(p') \left[\frac{iq_0}{2m} \left(-\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^l \\ \sigma^l & 0 \end{pmatrix} \right) \right] u(p) \end{aligned}$$

Il secondo addendo si può trascurare, poichè la matrice off-diagonal mescola grandi e piccole componenti, e queste ultime sono trascurabili nel limite non relativistico. Per il primo addendo, viceversa, poichè contiene già un termine lineare nei q^i , possiamo considerare lo sviluppo all'ordine leading per gli spinori:

$$A_l \bar{u}(p') \left[\frac{i\sigma^{l\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p) = A_l \cdot 2m \phi^\dagger(p') \left(\frac{i q_m}{2m} \epsilon^{lmn} \sigma^n \right) \phi(p)$$

N.B.: il segno viene opposto a quello del Peskin perchè definisce l'impulso q^ν entrante anzichè uscente; ad esempio in trasformata di Fourier $\partial_i \rightarrow iq_i$ e non $-iq_i$.

Possiamo definire a questo punto il fattore giromagnetico g : se abbiamo un'interazione di tipo dipolo in campo magnetico

$$V = -\langle \vec{\mu} \rangle \cdot \vec{B}$$

e identifichiamo

$$\begin{aligned} V &= A_i J^i \\ \epsilon^{lmn} A_l q_m &= \epsilon^{lmn} A^l q^m = -\epsilon^{mln} q^m A^l = iB^n \\ &\Rightarrow \phi^\dagger(p') \left(-\frac{\vec{B} \cdot \vec{\sigma}}{2m} \right) \phi(p) \end{aligned}$$

e reintroducendo la carica elettrica e i fattori di forma:

$$V = -\phi^\dagger(p') \left((F_2(q^2) - F_1(q^2)) \frac{e}{2m} \vec{\sigma} \right) \phi(p) \cdot \vec{B} = -\phi^\dagger(p') \left(\frac{e}{2m} g \vec{S} \right) \phi(p) \cdot \vec{B}$$

dove $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$. Allora

$$\begin{aligned} \langle \vec{\mu} \rangle &= \frac{e}{2m} g \phi^\dagger(p') \left(\vec{S} \right) \phi(p) \\ g &= 2(F_1(0) - F_2(0)) \end{aligned}$$

e poichè $F(0) = 1$, il primo termine restituisce la predizione di Dirac del momento magnetico dell'elettrone; il secondo termine invece dà un contributo nuovo, detto *momento magnetico anomalo* dell'elettrone, ed è una conseguenza fisica della rinormalizzazione del vertice, trovata per la prima volta da Schwinger. Il diagramma di loop del vertice come sappiamo è divergente logaritmico, ma il contributo al momento magnetico anomalo è finito, e tale che

$$g - 2 = \frac{\alpha}{\pi} + O(\alpha^2)$$

Questo è un risultato importantissimo, e verificato sperimentalmente con un errore di 10^{-11} ; per la misura di $g - 2$ si mette l'elettrone all'interno di un campo magnetico, e si misura lo sfasamento tra il moto circolare dell'elettrone e la frequenza di precessione.

Il Lamb shift

Gli effetti della rinormalizzazione sulla distribuzione di carica producono uno spostamento dei livelli energetici negli spettri atomici che prende il nome di Lamb shift; tale effetto fu determinato da Wheeler, Feynman, Bethe ed altri. Nell'equazione di Dirac, pur rompendosi la degenerazione sul momento angolare orbitale, permane la degenerazione rispetto al momento angolare totale, e ad esempio risulta che gli stati $2s_{\frac{1}{2}}$

e $2p_{1/2}$ sono degeneri; tuttavia sperimentalmente la separazione tra i due livelli è misurata e vale circa $1GHz$ ($10^{-6}eV$), dunque ci aspettiamo che nella teoria sia descritta da correzioni di ordine α^3 . In realtà si scopre che la correzione è di ordine relativo $\alpha^3 \log \alpha$, ed è possibile ottenere un risultato in maniera semiclassica utilizzando un argomento euristico dovuto a Bethe. Infatti il Lamb shift è legato al coefficiente $b(|\vec{q}|^2)$, che determina la distribuzione di carica in funzione di $|\vec{q}|^2$: tale distribuzione sarà dovuta ad una fluttuazione dell'elettrone nel campo elettromagnetico del vuoto, per cui la sua densità di carica non avrà in generale la forma di una delta di Dirac ma avrà un certo allargamento spaziale. Una prima osservazione di stampo quantistico è che il campo elettromagnetico del vuoto non è nullo, bensì per ogni modo abbiamo

$$\langle \tilde{E}_i(\omega) \rangle = \frac{1}{2}\omega \quad (\hbar = 1)$$

Tale campo elettromagnetico interagirà con l'elettrone, che si muoverà secondo la legge di Newton:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{m}\vec{E}$$

In trasformata di Fourier si ha

$$\omega^2 \tilde{r}_i(\omega) = \frac{e}{m} \tilde{E}_i(\omega)$$

dove $\omega^2 = \omega_{(1)}^2 + \omega_{(2)}^2 + \omega_{(3)}^2$, perchè si ha un modo per ognuna delle tre direzioni spaziali.

$$\Rightarrow \tilde{r}_i^2 = \frac{e^2}{m^2} \frac{1}{\omega^4} \tilde{E}_i^2(\omega)$$

Prendendo la media di questa espressione e sommando sulle tre direzioni spaziali:

$$\langle \tilde{r}^2(\omega) \rangle = 4\pi \frac{\alpha}{m^2} \frac{\hbar}{\omega^3}$$

Antitrasformando si ottiene

$$\langle r^2(\vec{x}) \rangle = 4\pi \frac{\alpha}{m^2} \int \frac{d^3\omega}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega^3}$$

Integrato su \mathbb{R}^3 , l'integrale diverge logaritmicamente, dunque passiamo agli impulsi secondo la regola di dispersione $\omega = kc$ e imponiamo due cutoff: per quello ultravioletto possiamo utilizzare la lunghezza Compton dell'elettrone, essendo un caso non relativistico, mentre per quello infrarosso utilizziamo il raggio di Bohr:

$$\langle r^2(\vec{x}) \rangle = \frac{\alpha}{m^2} \int_{m\alpha}^m \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^3} \sim -\frac{(4\pi)^2}{(2\pi)^3} \frac{\alpha}{m^2} \log \alpha = -\frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{m^2} \log \alpha$$

Possiamo quindi stimare la forma di F_1 :

$$F_1(|\vec{q}|^2) = \int d^3x \rho(|\vec{x}|) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}$$

dove abbiamo fatto l'ipotesi di distribuzione isotropa. Per piccoli \vec{q} si può sviluppare l'esponenziale e si ha:

$$F_1(|\vec{q}|^2) \sim 1 - i\vec{q}\cdot \int d^3x \vec{x} \rho(|\vec{x}|) + \frac{1}{2}(-i)^2 \int d^3x \rho(|\vec{x}|) (\vec{q}\cdot\vec{x})^2 = 1 - \frac{1}{6}|\vec{q}|^2 \int d^3x \rho(|\vec{x}|) |\vec{x}|^2 = 1 - \frac{1}{6}|\vec{q}|^2 \langle r^2 \rangle$$

avendo utilizzato la relazione

$$\int d^3x \rho(|\vec{x}|) x^i x^j = \frac{1}{3} \delta^{ij} \int d^3x \rho(|\vec{x}|) x^2$$

Allora

$$F_1(|\vec{q}|^2) = \rho(|\vec{q}|^2) = 1 + \frac{1}{6}|\vec{q}|^2 \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{m^2} \log \alpha$$

Dunque l'energia coulombiana si scrive

$$\begin{aligned} V(x) &= -eA_0(x) = -e^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} A(q) \\ A(q) &= \frac{\rho(q)}{q^2} \\ \Rightarrow V(x) &= -e^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \frac{1}{q^2} \left(1 + \frac{1}{6}|\vec{q}|^2 \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{m^2} \log \alpha \right) \end{aligned}$$

Il primo termine ricostruisce l'energia coulombiana usuale $-\frac{e^2}{r}$, mentre il secondo dà un contributo proporzionale a una delta di Dirac:

$$\Delta V(x) = -e^2 \frac{1}{6} \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{m^2} \log \alpha \delta^3(\vec{x})$$

Questa variazione di energia è sentita in quegli stati la cui funzione d'onda ha probabilità non nulla di trovarsi nell'origine, ovvero gli stati in onda s . Ad esempio per lo stato $\psi_{100}(\vec{x})$ dell'idrogeno abbiamo:

$$\begin{aligned} \psi_{100}(\vec{x}) &= \frac{2}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{1}{r_0^3}} e^{-\frac{r}{r_0}} \\ \Delta E_{100} &= \int d^3x \psi_{100}^*(\vec{x}) \Delta V(x) \psi_{100}(\vec{x}) = -e^2 \frac{1}{6} \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{m^2} \log \alpha |\psi_{100}(0)|^2 = \\ &= -e^2 \frac{1}{6} \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{m^2} \log \alpha \frac{1}{\pi} \frac{1}{r_0^3} = -\frac{4m}{3\pi} \alpha^5 \log \alpha = 9.39 \cdot 10^{-6} eV \sim 14GHz \end{aligned}$$

che è approssimativamente vicino al valore sperimentale di $4.2GHz$. Abbiamo trovato quindi un risultato consistente con gli esperimenti, secondo i quali gli stati in onda s hanno un'energia leggermente più elevata dei corrispondenti stati degeneri in onda p nella teoria di Dirac: i fenomeni di scambio di fotoni virtuali tra l'elettrone e il campo elettromagnetico del vuoto danno un effetto a basse energie.

1.2.9 Il gruppo di rinormalizzazione

Abbiamo visto che con la rinormalizzazione entrano in gioco delle costanti di accoppiamento che dipendono dalla scala di energie a cui ci troviamo, ossia da q^2 , ed è possibile scrivere esplicitamente questa dipendenza. Nel primo step, quello di regolarizzazione, abbiamo introdotto le quantità bare e il cutoff:

$$\Lambda, \alpha_0, \psi_0, A_0^\mu$$

dopodichè abbiamo definito la loro relazione con le rispettive quantità regolarizzate

$$\Lambda, \alpha(m), \psi, A^\mu$$

dove osserviamo che a questo punto la costante α è funzione del punto di rinormalizzazione, il quale è stato fissato alla massa dei fermioni: $p^2 = p'^2 = m^2$, e quando possibile, anche $q^2 = 0$. Dal punto di vista tecnico, avremmo potuto definire le stesse quantità in un qualunque altro punto di rinormalizzazione, ottenendo quantità equivalenti; ci possiamo quindi chiedere quale sia la relazione tra due quantità calcolate in punti di rinormalizzazione diversi, o a scale diverse, in quanto cambiare il punto di rinormalizzazione equivale a cambiare la scala di energia su cui osserviamo il sistema.

Trasformazioni di scala

Si dice trasformazione di scala un riscalamento delle coordinate spaziali e del tempo secondo un parametro Λ :

$$\begin{cases} t \\ x \\ y \\ z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda t \\ \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{cases}$$

Ad esempio possiamo pensare ai nostri occhi, che ci permettono di osservare le cose con una risoluzione costante: se decolliamo con un elicottero guardando in basso, ci accorgiamo che l'immagine non è stabile, infatti via via che saliamo di quota cancelliamo i piccoli dettagli (operazione detta di *coarse graining*), dunque l'immagine che vediamo su diverse scale non è invariante. Ogni sistema fisico ha una sua scala caratteristica, poichè la fisica seleziona gli effetti più importanti in base alla scala stessa: ad esempio per calcolare la dinamica del moto di un tir si possono in prima istanza trascurare i moscerini che sbattono sul vetro. In generale non è possibile quindi collegare tra loro scale diverse, ed è difficile immaginare un sistema anche approssimativamente invariante di scala, tuttavia se consideriamo una teoria di campo senza massa, ad esempio una teoria di tipo $\lambda\phi^4$ in 4 dimensioni:

$$\int d^4x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + g\phi^4$$

Il campo scalare ha dimensione di massa 1, dunque ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza: se scaliamo le lunghezze come

$$x \rightarrow \lambda x$$

il campo scala corrispondentemente come

$$\phi \rightarrow \frac{1}{\lambda} \phi$$

dunque l'azione complessivamente risulta invariante di scala:

$$S \rightarrow S$$

Siamo davanti ad una situazione apparentemente paradossale: una teoria di campo senza massa è invariante di scala. Possiamo considerare equivalentemente una teoria di campo ad energie molto alte, in modo quindi che anche se ci sono delle masse, esse siano trascurabili: ad esempio l'elettrodinamica ad alte energie è invariante di scala, infatti avendo i campi spinoriali dimensione $\frac{3}{2}$, e il campo del fotone A_μ dimensione 1, l'azione è complessivamente insensibile al riscalamento delle coordinate. Da un punto di vista canonico, questa invarianza di scala è possibile perchè il campo contiene modi di vibrazione di lunghezza d'onda arbitrariamente piccola, almeno dal punto di vista classico; dal punto di vista quantistico, viceversa, dobbiamo introdurre un cutoff che limita dal basso le lunghezze e così rompe l'invarianza di scala. Le fluttuazioni quantistiche infatti sono espresse da una somma su tutti i modi:

$$\langle \Omega | \phi^2 | \Omega \rangle = \langle \Omega | \sum_k a_k a_k^\dagger | \Omega \rangle = \infty$$

ma se introduciamo un cutoff Λ_0 si ottiene un risultato finito:

$$\langle \Omega | \sum_{-\Lambda_0}^{\Lambda_0} a_k a_k^\dagger | \Omega \rangle \sim \Lambda_0^4 < \infty$$

La rinormalizzazione, a questo punto, consiste nella ridefinizione dei parametri della teoria, che inizialmente dipendono sia dalla scala di rinormalizzazione Λ che dal cutoff Λ_0 , in modo da eliminare la dipendenza dal cutoff (che quindi potrà essere mandato all'infinito) in favore della unica dipendenza dalla scala di rinormalizzazione. In una teoria come l'elettrodinamica, appare naturale fissare come scala di rinormalizzazione la massa dell'elettrone, ma già per l'elettrodinamica nel limite relativistico, o per una teoria massless, l'assegnazione della scala Λ risulta arbitraria.

Abbiamo detto che dopo l'introduzione del cutoff, la teoria perde (se ce l'ha) la sua invarianza di scala; tuttavia, permane comunque un residuo di invarianza, e la teoria resta comunque invariante sotto un cambiamento di scala e un opportuno riscalamento della costante di accoppiamento. Questa affermazione si basa sul fatto che per ogni scala Λ che scegliamo abbiamo una corrispondente costante di accoppiamento $g(\Lambda)$ (costante di accoppiamento running), e ogni coppia $\Lambda, g(\Lambda)$ deve essere equivalente ad un'altra. La parziale rottura di scala a livello quantistico può quindi essere sfruttata per ottenere risultati predittivi, studiando il gruppo delle trasformazioni che simultaneamente cambia la scala e la costante di accoppiamento: il cosiddetto *gruppo di rinormalizzazione*.

Il punto di partenza sarà quindi l'invarianza dell'azione rinormalizzata sotto un cambio simultaneo della scala Λ e della costante di accoppiamento. Una volta determinata l'equazione di Wilson per la costante di accoppiamento:

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} g(\Lambda) \equiv \frac{d}{d \log \Lambda} g(\Lambda) = \beta(g)$$

possiamo scrivere

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} S = \left(\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right) S(g, \Lambda)$$

e si ha

$$S(g, \Lambda) = S\left(g + \beta \frac{d\Lambda}{\Lambda}, \Lambda + d\Lambda\right)$$

Abbiamo visto che sotto una trasformazione simultanea della scala e della costante di accoppiamento l'azione è invariante, dunque recuperiamo in parte l'invarianza di scala persa con l'introduzione del cutoff di rinormalizzazione. Se conosciamo la relazione che lega la costante di accoppiamento con il cambiamento di scala:

$$\frac{dg}{dt} = -\beta(g)$$

dove la scala è $t = \log \Lambda$, siamo in grado di trarre conseguenze generali. In teoria dei campi si hanno dei segni standard per gli andamenti delle costanti di accoppiamento con la scala: poichè Λ è legato alla scala di energia, se Λ aumenta stiamo osservando il sistema per energie sempre maggiori (e quindi per distanze sempre più piccole); viceversa, se t cresce, stiamo osservando il sistema per distanze sempre più grandi. Se la funzione β è positiva (ed è il caso della QED), la costante di accoppiamento decresce all'aumentare di t , ovvero a grandi distanze, e cresce a grandi energie: infatti sappiamo che ad energie dell'ordine della massa dei bosoni vettori la costante di struttura fine vale $\frac{1}{120}$, un valore più alto di $\frac{1}{137}$ che è il valore misurato a

basse energie. Per la QCD si ha l'andamento opposto, la funzione β è negativa, e i quark risultano fortemente legati a basse energie (o grandi distanze).

L'equazione di Wilson trova una analogia meccanica nel moto pregalileiano, in cui cioè la forza è proporzionale alla velocità e non alla accelerazione. In questo caso $\beta(g)$ corrisponde al gradiente di un potenziale:

$$\beta(g) = \frac{\partial}{\partial g} V(g)$$

Definiamo *punto fisso* un valore di g per cui β (e quindi la "velocità") si annulla. Se il potenziale è fatto come in figura, l'origine è un punto fisso instabile, infatti basta una piccola perturbazione e g tende ad aumentare se andiamo a grandi distanze (β è negativa, dunque la derivata di g): si dice quindi che ci stiamo allontanando da un punto fisso *ultravioletto* (piccole distanze). Il potenziale ha un ulteriore punto stazionario (dunque un nuovo punto fisso) per $g = g^*$: quando g raggiunge tale valore si ferma, perchè con la derivata di $V(g)$ si annulla anche la velocità (in un moto galileiano sarebbe stata l'accelerazione a fermarsi, e il moto sarebbe proseguito indefinitamente). Data la forma della funzione $\beta(g)$, il nuovo punto fisso *infrarosso* (lo abbiamo ottenuto diminuendo l'energia) è un punto fisso stabile.

Ai punti fissi la costante di accoppiamento non dipende dalla scala, e si recupera esattamente l'invarianza di scala anche a livello quantistico (pensiamo ad esempio a teorie massless). Inoltre possiamo predire il comportamento di grandezze fisiche come il correlatore a grandi distanze, semplicemente prendendone il limite per la costante di accoppiamento che tende al punto fisso infrarosso, se esso esiste, oppure per $g \rightarrow \infty$. In altre parole, la forma asintotica a grandi distanze del correlatore è equivalente al correlatore in un punto x ma in cui abbiamo "regolato" la costante di accoppiamento ad un valore appropriato.

Il caso di due accoppiamenti

Più interessante è il caso di due accoppiamenti, perchè il formalismo del gruppo di rinormalizzazione ci permette di fare previsioni, una volta che conosciamo la dipendenza della costante di accoppiamento dalla scala e la disposizione dei punti fissi: l'espressione a grandi distanze di qualsiasi quantità sarà ottenuta valutando la stessa nel (o nei) punto fisso infrarosso. Consideriamo una teoria scalare a N componenti:

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \sum_{a=1}^N (\partial_\mu \phi_a)^2 + g_1 \left(\sum_{a=1}^N \phi_a^2 \right)^2 + g_2 \left(\sum_{a=1}^N \phi_a^4 \right) \right]$$

In questo caso abbiamo un accoppiamento di tipo ϕ^4 che rispetta la simmetria $O(N)$, mentre il secondo accoppiamento, con ciascuna componente elevata alla quarta potenza, rompe tale simmetria pur mantenendo una simmetria \mathbb{Z}_2 . L'equazione di Wilson diventa un sistema di due equazioni in due variabili:

$$\frac{dg^i}{dt} = -\beta^i(g_1, g_2) \quad i = 1, 2$$

ovvero un campo di velocità bidimensionale. Si può verificare che il risultato dipende dal numero di componenti del campo scalare:

- se $N < 4$ si ha un *bacino di attrazione* per $(g_1, g_2) = (g_1^*, 0)$, ovvero il punto fisso infrarosso è $O(N)$ -simmetrico (ad esempio il modello di Heisenberg);

- per $N > 4$ viceversa i punti fissi sugli assi g_1 e g_2 sono repulsivi mentre si ha un punto fisso infrarosso per un punto del piano $g_1 g_2$ con entrambe le coordinate diverse da zero.

Vediamo quindi l'importanza del quadro concettuale del gruppo di rinormalizzazione, in cui a grandi distanze conta soltanto il punto fisso stabile, detto anche bacino di attrazione. Potremmo avere ad esempio una leggera rottura a corte distanze negli accoppiamenti tra gli spin della simmetria $O(N)$: ma per $N < 4$ questo non ha importanza perchè la costante g_2 si rinormalizza comunque a zero, anche se parte da un valore non nullo.

Emerge inoltre il concetto di *universalità*: sistemi diversi (con costanti di accoppiamento iniziali g_1 e g_2 diverse, quindi teorie diverse) danno stessi risultati a grandi distanze. Questo è utile ad esempio in meccanica statistica quando si ha a che fare con diversi campioni di uno stesso materiale (i.e. un liquido) in cui non è possibile assicurare che tutti i parametri dei vari sistemi siano regolati esattamente allo stesso valore.

Il concetto di universalità si traduce anche in una caratteristica di semplicità, risolvendo il paradosso della teoria dei campi: in una teoria di campo si hanno infatti infiniti gradi di libertà, dunque in linea di principio infiniti parametri da fissare, e di conseguenza nessuna predicibilità. Per come l'abbiamo definita, la lagrangiana della QED contiene solo un termine cinetico per i fermioni e per il fotone e un accoppiamento minimale, ma nessuno ci vieta in linea di principio di introdurre ulteriori termini, a patto che essi conservino l'invarianza di gauge. Ad esempio avremmo potuto inserire un termine di tipo momento magnetico anomalo:

$$\delta\mathcal{L} = c_g \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi F_{\mu\nu}$$

che permetterebbe di modificare a mano il $g-2$. Tale termine però necessita di una costante di accoppiamento con dimensione di massa positiva ($[c_g] = [\psi]^2 [F^{\mu\nu}] - 4 = 1$) e l'introduzione di un termine del genere come sappiamo rende la teoria non rinormalizzabile. Storicamente in base a questo argomento furono estromessi dalla lagrangiana tutti i termini che la rendevano meno trattabile, ma adesso il gruppo di rinormalizzazione ci offre una nuova chiave di lettura nella giustificazione di questa eliminazione: come vedremo, infatti, i termini della lagrangiana con dimensione positiva della costante di accoppiamento scompaiono a grandi distanze, nel linguaggio del gruppo di rinormalizzazione si dicono cioè irrilevanti.

Ad ogni scala esisteranno accoppiamenti che crescono, altri che decrescono, altri che invece restano fissi: si parla rispettivamente di accoppiamenti *rilevanti*, *irrilevanti* e *marginali*. Tale denominazione dipende dalla linearizzazione intorno al punto fisso; consideriamo infatti un accoppiamento g_i (ovvero la componente i -esima di un vettore di accoppiamenti $\vec{g} = (g_1, \dots, g_n)$) nell'intorno di un punto fisso $\vec{g}^* = (g_1^*, \dots, g_n^*)$:

$$\frac{dg_i}{dt} \simeq y_i (g_i - g_i^*) + O(|g_i - g_i^*|^2)$$

- se $y_i > 0$, g^i aumenta all'aumentare della distanza, e l'accoppiamento quindi è rilevante;
- se $y_i < 0$, g^i diminuisce all'aumentare della distanza, e l'accoppiamento è irrilevante;
- se $y_i = 0$, g^i resta costante al prim'ordine, e dobbiamo andare a vedere gli ordini successivi.

Vedremo adesso come la rilevanza o meno di un accoppiamento sia legata alla sua dimensionalità, introducendo il concetto di azione effettiva: scriveremo una lagrangiana per il nostro sistema, senza però fermarsi ai soli termini contenuti nella lagrangiana classica, bensì includendo anche tutti gli altri possibili termini

polinomiali e compatibili col problema, ad esempio tutti i termini che potrebbero essere prodotti dalle correzioni radiative. Una volta scritti tutti i termini, analizzeremo le loro costanti di accoppiamento λ_i : per rendere conto delle loro dimensioni introduciamo una scala fisica

$$\lambda_i = \Lambda^{y_i} g_i$$

dove g_i è una quantità adimensionale, e su di essa baseremo le nostre considerazioni future: nel caso della QED la costante di accoppiamento è già adimensionale, ma in altri casi dovremo preoccuparci di fattorizzare le dimensioni prima di applicare le tecniche del gruppo di rinormalizzazione. Poichè l'azione deve essere a sua volta adimensionale, in d dimensioni si ha

$$\begin{aligned} S(g_i, \Lambda) &= \int d^d x \sum_i \lambda_i \theta_i \\ d^d x &= \Lambda^{-d} \\ \theta^i &\sim \Lambda^{\delta_i} \\ \lambda_i &= \Lambda^{y_i} g_i \\ \Rightarrow \delta_i + y_i - d &= 0 \Rightarrow y_i = d - \delta_i \end{aligned}$$

Per $0 < \delta_i \leq d$ $y_i \geq 0$, dunque i termini corrispondenti sono rilevanti o marginali e danno luogo ad una teoria rinormalizzabile, mentre se $\delta_i > d$ i termini sono irrilevanti e la teoria risulta essere non rinormalizzabile. Infatti derivando un accoppiamento rispetto alla scala si scopre qual'è la sua tendenza a grandi distanze: i termini rilevanti acquistano un fattore $y_i > 0$, dunque la derivata è positiva e l'accoppiamento cresce a grandi distanze, mentre i termini irrilevanti presentano derivata negativa e diventano via via sempre meno influenti.

Poichè con l'aumentare del numero di campi nei singoli termini, aumenta inesorabilmente la loro dimensione, concludiamo che ad ogni scala soltanto un numero *finito* di termini può essere rilevante, mentre il numero dei termini irrilevanti può essere arbitrariamente elevato.

È possibile effettuare la trasformazione del gruppo di rinormalizzazione anche a livello dell'azione, studiando come essa varia al variare del cutoff:

$$S(g_i, \Lambda) = \int_{|x| > \frac{1}{\Lambda}} d^d x \sum_i (g_i \Lambda^{y_i}) \theta_i$$

Data quindi una certa scala di energie Λ , tale espressione approssimata è valida per $E < \Lambda$. Se vogliamo sapere quale sia la teoria a scale di energia più basse (quindi a distanze maggiori) dobbiamo integrare su un certo range di impulsi (tecnica del coarse graining):

$$S(g - dg, \Lambda - d\Lambda) = \int_{\frac{1}{\Lambda}}^{\frac{1}{\Lambda - d\Lambda}} d^d x S(g, \Lambda) + S(g, \Lambda)$$

Questo ci spiega in termini concettuali qual'è il funzionamento della trasformazione del gruppo rinormalizzazione, e ci dice anche che tale trasformazione non può essere esatta neppure idealmente: poichè stiamo effettuando un processo di media, la trasformazione è irreversibile, e tutte le quantità eventualmente sensibili alla scala di energie su cui abbiamo integrato vanno irrimediabilmente perse.

Qui si vede la potenza del gruppo di rinormalizzazione: dai risultati che abbiamo ottenuto concludiamo che tutte le teorie di campo sono teorie effettive, valide soltanto fino ad una certa scala: quando le energie sono molto inferiori a questa scala, gli operatori irrilevanti non contano niente e solo quelli rilevanti fanno il gioco. Non possiamo salire con l'energia oltre tale scala, perchè a quel punto gli operatori irrilevanti tornerebbero a farsi sentire; questo argomento quindi giustifica il fatto di non aver incluso nella lagrangiana gli accoppiamenti a dimensione negativa: le scale più alte di energia sono precluse, a basse energie gli accoppiamenti irrilevanti sono innocui, quindi tanto vale non metterceli.

Le teorie di campo a scale più basse di energia sono idealmente derivabili da quelle ad energia più alta, integrando i gradi di libertà superflui: concettualmente l'idea è valida, ma è di difficile applicazione. Si preferisce di solito fare delle ipotesi sulla forma della lagrangiana di basse energie basandosi su considerazioni di simmetria, e siccome il numero dei termini rilevanti è finito, è sufficiente fare soltanto un numero finito di guess.

Riguardo alle teorie ad alta energia, quello di Wilson è un assunto ideologico: le teorie ad alta energia sono sconosciute, possono essere soltanto ipotizzate.

Applicazione alla QED

Consideriamo l'applicazione dell'equazione del gruppo di rinormalizzazione alla costante di accoppiamento della QED. Per coerenza con quanto detto, considereremo la teoria a massa nulla, anche se niente vieta in un secondo momento di reintrodurre le masse come perturbazioni. Tuttavia è evidente che in questo caso porre le masse dei fermioni a zero ci impedisce di scegliere m^2 come punto di rinormalizzazione, e di mandare q^2 a zero. Ricordiamo l'espressione della funzione $\Pi(q^2)$:

$$\Pi(q^2)|_{m=0} = -\frac{\alpha_0}{3\pi} \int_0^{\Lambda^2} \frac{ds}{s-q^2} = -\frac{\alpha_0}{3\pi} \log \frac{\Lambda^2 - q^2}{-q^2} \sim -\frac{\alpha_0}{3\pi} \log \frac{\Lambda^2}{-q^2}$$

Chiaramente stiamo considerando una situazione di scattering, in cui $q^2 < 0$. Il propagatore bare trasverso era espresso da

$$G_{\mu\nu}^{(0(T))} = -i \frac{\eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}}{q^2 + i\epsilon} \frac{1}{1 - \Pi(q^2)} = -i \frac{\eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}}{q^2 + i\epsilon} G_0$$

dove G_0 è una funzione scalare *adimensionale*. Introduciamo la corrispondente funzione scalare rinormalizzata come

$$G_0 = Z_3 G$$

con condizione di rinormalizzazione

$$G(q^2 = -\mu^2) = 1$$

dove $q^2 = -\mu^2$ è un punto arbitrario. In questo modo abbiamo identificato

$$Z_3 = G_0(-\mu^2) = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \log \frac{\Lambda^2}{\mu^2}} = \frac{1}{1 - \Pi(-\mu^2)}$$

Definiamo allora la funzione rinormalizzata come

$$G = \frac{G_0}{Z_3} = \frac{1 - \Pi(-\mu^2)}{1 - \Pi(q^2)} \sim \frac{1}{1 - \Pi(q^2) + \Pi(-\mu^2)} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \log \frac{\Lambda^2}{-q^2} - \frac{\alpha_0}{3\pi} \log \frac{\Lambda^2}{\mu^2}} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \log \frac{-q^2}{\mu^2}}$$

Osserviamo che questa formula è esatta, non rappresenta soltanto l'andamento asintotico come nel caso che abbiamo visto in precedenza. A questo punto possiamo definire la costante di accoppiamento rinormalizzata:

$$\alpha(\mu^2) = Z_3 \alpha_0 = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \log \frac{\Lambda^2}{\mu^2}}$$

e quella effettiva:

$$\alpha_{eff}(q^2) = \frac{\alpha(\mu)}{1 + \tilde{\Pi}(q^2)} = \frac{\alpha(\mu)}{1 - \frac{\alpha(\mu)}{3\pi} \log \frac{-q^2}{\mu^2}}$$

Fin qui abbiamo soltanto ricavato in forma più generale e non approssimata i risultati della rinormalizzazione canonica; faremo vedere adesso che gli stessi risultati si possono ottenere imponendo le condizioni del gruppo di rinormalizzazione.

Per le quantità fisiche come il correlatore, le equazioni del gruppo di rinormalizzazione prendono il nome di equazioni di Callan-Symanzik, e vengono introdotte implementando l'idea dell'invarianza di scala: avendo una teoria a massa nulla, l'unica scala del sistema è quella che abbiamo introdotto a mano, col punto di rinormalizzazione arbitrario $q^2 = -\mu^2$; pertanto le quantità bare ne saranno chiaramente indipendenti, e potremo scrivere

$$\mu \frac{d}{d\mu} G_0 = 0(+_{terms}^{mass})$$

dove con *mass terms* abbiamo incluso la possibilità di eventuali termini di massa. Viceversa, il propagatore rinormalizzato dipende dalla scala μ , così come vi dipende la costante di rinormalizzazione Z_3 :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mu \frac{d}{d\mu} \left(Z_3(\Lambda, \mu) G \left(\frac{-q^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) \right) &= 0 \\ \left(\mu \frac{d}{d\mu} Z_3(\Lambda, \mu) \right) G \left(\frac{-q^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) + Z_3(\Lambda, \mu) \mu \frac{d}{d\mu} G \left(\frac{-q^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) &= 0 \\ Z_3(\Lambda, \mu) \left(\frac{1}{Z_3} \mu \frac{d}{d\mu} Z_3(\Lambda, \mu) + \mu \frac{d}{d\mu} \right) G \left(\frac{-q^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) &= 0 \\ Z_3(\Lambda, \mu) \left(\frac{d \log Z_3}{d \log \mu} + \mu \frac{d}{d\mu} \right) G \left(\frac{-q^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) &= 0 \end{aligned}$$

Ricordiamo poi che

$$\frac{d}{d\mu} = \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \alpha}$$

Allora, introducendo le due variabili ausiliarie

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{d \log Z_3}{d \log \mu}$$

$$\beta = \mu \frac{\partial \alpha}{\partial \mu}$$

si ha

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + 2\gamma + \beta \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) G \left(\frac{-q^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right)$$

Ma poichè G è adimensionale, possiamo derivare equivalentemente rispetto a μ o rispetto a $q = \sqrt{-q^2}$, a meno di un segno:

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} G \left(\frac{-q^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) = -q \frac{\partial}{\partial q} G \left(\frac{-q^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right)$$

da cui

$$\left(-q \frac{\partial}{\partial q} + 2\gamma + \beta \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) G \left(\frac{-q^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right)$$

Questa è l'equazione di Callan-Symanzik. È possibile scrivere una equazione del genere per tutte le osservabili, con le rispettive costanti di rinormalizzazione Z_i . Il trucco per risolvere questa equazione è utilizzare i risultati ottenuti dal calcolo a 1 loop:

- γ :

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{d \log Z_3}{d \log \mu}$$

ma

$$Z_3 = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \log \frac{\Lambda^2}{\mu^2}} \Rightarrow \log Z_3 = -\log \left(1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \log \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d \log Z_3}{d \log \mu} = -\frac{1}{2} \frac{d \log \left(1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \log \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right)}{d \log \mu} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \log \frac{\Lambda^2}{\mu^2}} \left(-2 \frac{\alpha_0}{3\pi} \right) = \frac{1}{3\pi} \alpha(\mu)$$

- β :

$$\beta = \mu \frac{\partial \alpha(\mu)}{\partial \mu} = \frac{\partial \alpha(\mu)}{\partial \log \mu} = \frac{2}{3\pi} \alpha^2(\mu)$$

Osserviamo che stavolta β non dipende dalla costante di accoppiamento effettiva ma da quella rinormalizzata.

Eliminiamo adesso γ dall'equazione di Callan-Symanzik, definendo una nuova funzione \tilde{G} tale che

$$G = \exp \left\{ - \int^\alpha \frac{2\gamma}{\beta} d\alpha \right\} \tilde{G} =$$

Vediamo infatti che in questo modo

$$\beta \frac{\partial}{\partial \alpha} G = -\beta \frac{2\gamma}{\beta} \exp \left\{ - \int^\alpha \frac{2\gamma}{\beta} d\alpha \right\} \tilde{G} + \exp \left\{ - \int^\alpha \frac{2\gamma}{\beta} d\alpha \right\} \beta \frac{\partial}{\partial \alpha} \tilde{G}$$

Allora l'equazione di Callan-Symanzik per \tilde{G} diventa

$$\left(-q \frac{\partial}{\partial q} + \beta \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \tilde{G} \left(\frac{-q^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) = 0$$

L'equazione appena ottenuta corrisponde ad una condizione di invarianza da un certo parametro t :

$$\frac{d}{dt} \tilde{G} = 0$$

dove t è una variabile che elimina la dipendenza di \tilde{G} da q e α . Si ha allora

$$\tilde{G} = \tilde{G}(\tilde{q}(t), \tilde{\alpha}(t))$$

con $\tilde{q}(t)$ e $\tilde{\alpha}(t)$ variabili che dipendono da t , dunque variabili running. Tali variabili sono soluzione delle equazioni ausiliarie:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{G}(\tilde{q}(t), \tilde{\alpha}(t)) &= \left(\frac{d\tilde{q}}{dt} \frac{\partial}{\partial \tilde{q}} + \frac{d\tilde{\alpha}}{dt} \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}} \right) \tilde{G}(\tilde{q}(t), \tilde{\alpha}(t)) = 0 \\ \left(-q \frac{\partial}{\partial q} + \beta \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \tilde{G} \left(\frac{-q^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d\tilde{q}(t)}{dt} = -\tilde{q}(t) \quad ; \quad \frac{d\tilde{\alpha}(t)}{dt} = \beta \end{aligned}$$

Se esprimiamo l'equazione di Callan-Symanzik in termini delle variabili running, la funzione \tilde{G} risulta invariante sotto variazioni di t , che identificheremo con la scala: $t = \log \Lambda$. Per completare la risoluzione dell'equazione dobbiamo imporre delle condizioni al contorno appropriate, ad esempio

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tilde{q}(0) = q \\ \tilde{\alpha}(0) = \alpha(\mu) \end{cases}$$

con q generico. Ma c'è un altro punto notevole, il punto di rinormalizzazione: indicheremo la scala corrispondente a tale punto con t_1 , e definiremo

$$\begin{cases} \tilde{q}(t_1) = \mu \\ \tilde{\alpha}(t_1) \equiv \alpha(q) \end{cases}$$

Il motivo della scelta di questo punto di rinormalizzazione è ovvio, dato che per $q^2 = -\mu$ la funzione di correlazione è fissata a 1. La condizione di indipendenza dal parametro t ci permette di affermare che

$$\tilde{G}(\tilde{q}(t), \tilde{\alpha}(t)) = \tilde{G}(\tilde{q}(t'), \tilde{\alpha}(t'))$$

dunque

$$\tilde{G}(\mu, \alpha(q)) = \tilde{G}(q, \alpha(\mu))$$

Questa ultima espressione ci dice che possiamo ricordurre la funzione di correlazione ad una certa scala q alla funzione di correlazione al punto di rinormalizzazione, mettendo tutta la dipendenza da q nella costante running.

Risolviamo adesso le equazioni con le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{q}(t)}{dt} = -\tilde{q}(t) &\Rightarrow \int_q^\mu \frac{d\tilde{q}}{\tilde{q}} = - \int_0^{t_1} dt \Rightarrow \log \frac{q}{\mu} = t_1 \\ \int_{\alpha(\mu)}^{\alpha(q)} \frac{d\tilde{\alpha}}{\beta(\tilde{\alpha})} = \int_0^{t_1} dt &\Rightarrow \frac{3\pi}{2} \int_{\alpha(\mu)}^{\alpha(q)} \frac{d\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}^2} = t_1 \Rightarrow \frac{3\pi}{2} \left(\frac{1}{\alpha(\mu)} - \frac{1}{\alpha(q)} \right) = t_1 \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \log \frac{q}{\mu} &= \frac{3\pi}{2} \left(\frac{1}{\alpha(\mu)} - \frac{1}{\alpha(q)} \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{\alpha(q)} &= \frac{2}{3\pi} \log \frac{\mu}{q} + \frac{1}{\alpha(\mu)} \Rightarrow \alpha(q) = \frac{1}{\frac{2}{3\pi} \log \frac{\mu}{q} + \frac{1}{\alpha(\mu)}} = \frac{\alpha(\mu)}{1 + \frac{2\alpha(\mu)}{3\pi} \log \frac{\mu}{q}} = \frac{\alpha(\mu)}{1 + \frac{\alpha(\mu)}{3\pi} \log \frac{\mu^2}{-q^2}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha(\mu)}{1 - \frac{\alpha(\mu)}{3\pi} \log \frac{-q^2}{\mu^2}}$$

Abbiamo quindi ritrovato la forma della costante di accoppiamento running grazie alle equazioni del gruppo di rinormalizzazione. Dobbiamo però ancora finire di determinare l'espressione della funzione G :

$$\tilde{G} = \exp \left\{ \int^\alpha \frac{2\gamma}{\beta} d\alpha \right\} G$$

Poichè \tilde{G} non dipende da t , abbiamo

$$\exp \left\{ \int^{\tilde{\alpha}(t_1)} \frac{2\gamma}{\beta} d\tilde{\alpha} \right\} G(t_1) = \exp \left\{ \int^{\alpha(0)} \frac{2\gamma}{\beta} d\tilde{\alpha} \right\} G(0)$$

ma $G(t_1)$ secondo le nostre definizioni implica calcolare la funzione G al punto di rinormalizzazione, dunque $G(t_1) = 1$:

$$G(0) = \exp \left\{ \int_{\tilde{\alpha}(0)}^{\tilde{\alpha}(t_1)} \frac{2\gamma}{\beta} d\tilde{\alpha} \right\}$$

ma

$$\int_{\tilde{\alpha}(0)}^{\tilde{\alpha}(t_1)} \frac{\frac{2}{3\pi} \tilde{\alpha}}{\frac{2}{3\pi} \tilde{\alpha}^2} d\tilde{\alpha} = \log \frac{\alpha(t_1)}{\alpha(0)} = \log \frac{\alpha(q)}{\alpha(\mu)}$$

da cui

$$G(0) = \frac{\alpha(q)}{\alpha(\mu)} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha(\mu)}{3\pi} \log \frac{-q^2}{\mu^2}}$$

che è esattamente il risultato trovato nella rinormalizzazione a 1 loop. Osserviamo che abbiamo anche ritrovato l'equazione di Wilson per la costante di accoppiamento running:

$$\frac{d\tilde{\alpha}(t)}{dt} = \beta(\tilde{\alpha})$$

con l'unica differenza di un segno -, dovuto al fatto che in questo caso abbiamo definito la scala come $t = \log \Lambda$ e non come $t = -\log \Lambda$, in ogni caso la costante cresce correttamente al crescere dell'energia. In tale equazione non compare il termine lineare, dunque per determinare la rilevanza o la irrilevanza della costante di accoppiamento della QED dobbiamo andare all'ordine successivo dello sviluppo: essendo il termine del second'ordine positivo, la costante di accoppiamento della QED decresce al crescere dell'energia, dunque è *marginale irrilevante*.

I vari step per questa procedura sono stati:

- definizione della equazione di scala generalizzata;
- definizione delle condizioni al contorno e del punto di rinormalizzazione;
- spostamento di tutta la dipendenza da q^2 all'interno della costante di accoppiamento running;

Equazione di Callan-Symanzik per teoria $\lambda\phi^4$

Vedremo adesso l'applicazione dell'equazione di Callan-Symanzik al caso in cui si abbia una teoria con punto fisso infrarosso, in particolare una teoria $\lambda\phi^4$ in d dimensioni:

$$S = \int d^d x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

Vediamo che se $d = 4 - \epsilon$ il campo ϕ ha dimensione di massa $\frac{d-2}{2} = 1 - \frac{\epsilon}{2}$, di conseguenza la costante di accoppiamento Λ ha dimensione

$$[\lambda] = 4 - 2\epsilon - d = -\epsilon$$

dunque è leggermente rilevante.

1.2.10 Il modello a partoni

Capitolo 2

Appendice

2.1 Calcolo di $\Sigma(p)$

$\Sigma(p)$ è la correzione ad ordine α alla propagazione del fermione, e corrisponde al calcolo del diagramma

