

# Capitolo 1

## Teoria dei campi

### 1.1 De Curtis - B

#### 1.1.1 Rinormalizzazione in QED

Per il calcolo della funzione  $\beta$  siamo interessati soltanto ai contributi infiniti dei loop; i contributi finiti, viceversa, daranno effetti osservabili come il Lamb shift. Se consideriamo ad esempio il grafico di self-energia del fermione:

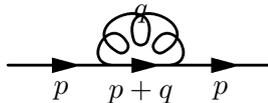
#### 1.1.2 Rinormalizzazione in teoria di gauge non abeliana

Nel caso di una teoria di gauge non abeliana, assegnando a  $Z_1$ ,  $Z_2$  e  $Z_3$  lo stesso significato della QED, la relazione tra la costante di accoppiamento bare e quella rinormalizzata è sempre

$$g_B = \mu^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{Z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}} g$$

dove  $\mu$  è un fattore di scala dovuto al fatto che in regolarizzazione dimensionale  $[\Psi] = \frac{3}{2}$ ,  $[A_\mu^A] = 1 - \frac{\epsilon}{2}$ , dunque affinché il termine  $g \bar{\Psi} \gamma^\mu T^A \Psi A_\mu^A$  sia adimensionale, è necessario che  $g$  abbia dimensione di massa  $\frac{\epsilon}{2}$ . La simmetria  $BRST$  infatti ci assicura che per la rinormalizzazione della carica  $g$  abbiamo libertà di scelta tra il vertice quadrilineare, trilineare e la funzione a tre punti  $\langle A_\mu^A \psi_a \bar{\psi}_b \rangle_{1PI}$ . Sceglieremo quest'ultima in modo da poter sfruttare il più possibile le somiglianze con la QED.

A 1 loop, la correzione alla propagazione del fermione consiste anche stavolta di un solo grafico:



Anche il risultato è praticamente lo stesso, a parte il fatto un termine aggiuntivo dovuto ai generatori dell'algebra, e gli indici del multipletto:

$$\Sigma_{ab}(p) = \left( \sum_A T^A T^A \right)_{ab} \Sigma_{QED}(p)$$

Infatti il gluone scambiato può essere di uno qualunque degli 8 tipi, e per ognuno di essi si ha un prodotto  $T_A T_A$ . Tuttavia riconosciamo nella somma  $\sum_A T^A T^A$  l'operatore di Casimir dell'algebra  $SU(N)$ , che per il lemma di Schur sarà un oggetto proporzionale all'identità:

$$\sum_A T^A T^A = C_2(F) \delta_{ab}$$

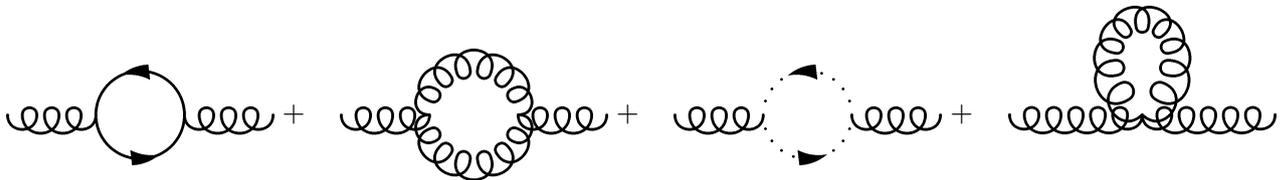
$C_2(F)$  è un numero dipendente dalla rappresentazione: per la fondamentale di  $SU(N)$  si ha  $C_2(F) = \frac{N^2-1}{2N}$ . Scriveremo infine

$$\Sigma(p) = C_2(F) \delta_{ab} \left( \frac{1}{8\pi^2 \epsilon} (\not{p} - 4m) + \text{termini finiti} \right)$$

$Z_2$ , il coefficiente associato al controtermine  $i\bar{\Psi} \not{\partial} \Psi$ , verrà fissato di conseguenza in questo modo:

$$Z_2 = 1 + B = 1 - C_2(F) \frac{g^2}{8\pi^2 \epsilon}$$

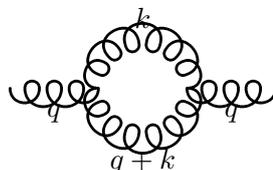
Il calcolo di  $Z_3$  è più complesso, perchè più grafici contribuiscono alla polarizzazione del vuoto:



Se dio vuole l'ultimo è un tadpole, e si annulla in regolarizzazione dimensionale:

$$\text{tadpole diagram} = \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{k^2 - m^2} = -i\pi^\omega \Gamma(1 + \omega) (m^2)^{\omega-1}$$

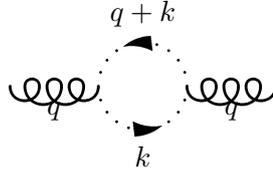
ma la massa del gluone è nulla per cui l'integrale fa zero. Veniamo a considerare il loop gluonico:



Il risultato del diagramma è

$$\Pi_{\mu\nu}^{AB(a)} = \frac{g^2}{8\pi^2} C_2(G) \delta^{AB} \left[ \frac{19}{12} g_{\mu\nu} q^2 - \frac{11}{6} q_\mu q_\nu \right]$$

dove  $C_2(G) = \sum_C f^{ABC} f^{BCE}$  è l'operatore di Casimir nella rappresentazione aggiunta, e vale  $N$ . Vediamo subito che se ci limitassimo a questo grafico, avremmo una correzione al propagatore che lo rende non trasverso; ma dalla simmetria  $BRST$  abbiamo imparato che i gradi di libertà dei ghost e quelli dei campi di gauge sono collegati, dunque possiamo sempre sperare che qualcosa cambi considerando anche gli altri grafici. Infatti il grafico dei ghost:



dà come risultato

$$\Pi_{\mu\nu}^{AB(b)} = \frac{ig^2}{8\pi^2\epsilon} C_2(G) \left[ \frac{1}{12} q_{\mu\nu} + \frac{1}{6} q_\mu q_\nu \right]$$

Sommando questo risultato a quello precedente otteniamo:

$$\Pi_{\mu\nu}^{AB(a+b)} = \frac{ig^2}{8\pi^2\epsilon} C_2(G) \left[ \left( \frac{19}{12} + \frac{1}{12} \right) g_{\mu\nu} q^2 + \left( \frac{1}{6} - \frac{11}{6} \right) q_\mu q_\nu \right] = \frac{ig^2}{8\pi^2\epsilon} C_2(G) \delta^{AB} \frac{10}{6} [q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu]$$

che è di nuovo una correzione trasversa. L'ultimo grafico, con il loop fermionico, ha come risultato:

$$= -n_F \text{Tr}[T^A T^B] \frac{ig^2}{6\pi^2\epsilon} [q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu] = -n_F \frac{ig^2}{6\pi^2\epsilon} \frac{1}{2} n_F [q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu]$$

Per la normalizzazione, si ha che  $\text{Tr}[T^A T^B] = \frac{1}{2} \delta^{AB}$ , mentre il coefficiente  $n_F$  è il numero di tipi fermioni che possono partecipare al loop. In definitiva si ha

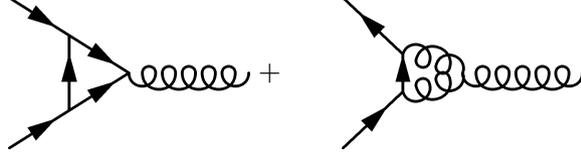
$$ig^2 \Pi_{\mu\nu}^{AB(a+b)} = \frac{ig^2}{8\pi^2\epsilon} \delta^{AB} \left[ \frac{10}{6} C_2(G) - \frac{2}{3} n_F \right] [q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu] = \frac{ig^2}{8\pi^2\epsilon} \delta^{AB} \left[ \frac{5}{3} C_2(G) - \frac{2}{3} n_F \right] [q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu]$$

per cui

$$Z_3 = 1 + C = 1 + \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \left[ \frac{5}{3} C_2(G) - \frac{2}{3} n_F \right]$$

Questo risultato è stato ottenuto nel gauge di Feynman: in un gauge generico al posto del fattore  $\frac{5}{3} C_2(G)$  avremmo avuto  $\left( \frac{5}{3} - \frac{\xi}{2} \right) C_2(G)$ ; in ogni caso le ampiezze fisiche saranno indipendenti dalla scelta di gauge.

Adesso dobbiamo calcolare le correzioni del vertice; a differenza del caso della QED abbiamo due grafici da tenere in conto:



Per il primo, abbiamo lo stesso risultato dello QED a meno di un fattore di gruppo:

$$-ig\Lambda_{(b)}^{\mu,A} = \frac{-ig^3}{8\pi^2\epsilon} \gamma^\mu (T^B T^A T^B)$$

Ma

$$T^A T^B = T^B T^A + if^{ABC} T^C$$

$$\begin{aligned} T^B T^A T^B &= T^A T^B T^B + f^{BAC} T^C T^B = C_2(F) T^A + \frac{i}{2} f^{BAC} (T^C T^B - T^B T^C) = C_2(F) T^B + \frac{i}{2} f^{BAC} f^{CBD} T^D = \\ &= C_2(F) T^A - \frac{1}{2} f^{ABC} f^{BCD} T^D = C_2(F) T^A - \frac{i}{2} \sum_C f^{CAB} f^{CBD} T^D = C_2(F) T^A - \frac{i}{2} C_2(G) T^A \end{aligned}$$

Dunque

$$-ig\Lambda_{(b)}^{\mu,A} = \left( C_2(F) - \frac{i}{2} C_2(G) \right) T^A \frac{-ig^3}{8\pi^2\epsilon} \gamma^\mu$$

Per l'ultimo grafico si ha

$$\frac{-ig^3}{8\pi^2\epsilon} \Lambda_{(b)}^{\mu,A} = -\frac{3}{2} \frac{ig^3}{8\pi^2\epsilon} C_2(G) T^A$$

Il risultato finale è

$$-ig\Lambda_{(a+b)}^{\mu,A} = \left( C_2(F) - \frac{i}{2} C_2(G) \right) T^A \frac{-ig^3}{8\pi^2\epsilon} \gamma^\mu - \frac{3}{2} \frac{ig^3}{8\pi^2\epsilon} C_2(G) T^A = \frac{-ig^3}{8\pi^2\epsilon} (C_2(F) + C_2(G)) \gamma^\mu T^A$$

Per cui

$$Z_1 = 1 + D = 1 - \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} (C_2(F) + C_2(G))$$

Riassumendo:

$$Z_1 = 1 + D = 1 - \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} (C_2(F) + C_2(G))$$

$$Z_2 = 1 + B = 1 - C_2(F) \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon}$$

$$Z_3 = 1 + C = 1 + \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \left[ \frac{5}{3} C_2(G) - \frac{2}{3} n_F \right]$$

Espandendo al prim'ordine nelle correzioni la costante bare:

$$g_B = \mu^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{Z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}} g \sim \mu^{\frac{\epsilon}{2}} g \left( 1 + \Delta Z_1 - \Delta Z_2 - \frac{1}{2} \Delta Z_3 \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \mu^{\frac{\epsilon}{2}} g \left( 1 - \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} (C_2(F) + C_2(G)) + C_2(F) \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} - \frac{1}{2} \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \left[ \frac{5}{3} C_2(G) - \frac{2}{3} n_F \right] \right) = \\
&= \mu^{\frac{\epsilon}{2}} g \left( 1 - \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} C_2(G) - \frac{1}{2} \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \left[ \frac{5}{3} C_2(G) - \frac{2}{3} n_F \right] \right) = \mu^{\frac{\epsilon}{2}} g \left( 1 - \frac{g^2}{16\pi^2\epsilon} \left[ \frac{11}{3} C_2(G) - \frac{2}{3} n_F \right] \right)
\end{aligned}$$

Ricordando che anche  $g_B$  ha un suo sviluppo in serie di  $\frac{1}{\epsilon}$ :

$$g_B = \mu^{\frac{\epsilon}{2}} \left( g + \frac{a_1}{\epsilon} \right)$$

si ottiene che

$$a_1 = -\frac{g^3}{16\pi^2\epsilon} \left[ \frac{11}{3} C_2(G) - \frac{2}{3} n_F \right]$$

La funzione  $\beta$  è definita dalla relazione

$$\beta(g) = -\frac{1}{2} \left( 1 - g \frac{d}{dg} \right) a_1 = -\frac{1}{2} (a_1 - 3a_1) = a_1$$

quindi

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2\epsilon} \left[ \frac{11}{3} C_2(G) - \frac{2}{3} n_F \right]$$

Nel caso della QCD, in cui  $C_2(G) = N = 3$  e  $n_F = 6$  si ha

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2\epsilon} [11 - 4] = -\frac{7g^3}{16\pi^2\epsilon}$$

dunque la funzione  $\beta$  è negativa: poichè essa descrive l'andamento della costante di accoppiamento running con la scala di energia, questo significa che la costante di accoppiamento della QCD decresce all'aumentare dell'energia. Questa proprietà prende il nome di *libertà asintotica*.

L'espressione per il running della costante d'accoppiamento è

$$g^2(\mu) = \frac{g^2(\mu_0)}{1 + \frac{(g^2(\mu_0))}{(4\pi)^2} \left[ \frac{11}{3} C_2(G) - \frac{2}{3} n_F \right] \log \frac{\mu^2}{\mu_0^2}}$$

Per scale maggiori di  $\mu_0$  siamo in regime perturbativo, e possiamo scrivere

$$g^2(\mu) = g^2(\mu_0) \left( 1 - \frac{(g^2(\mu_0))}{(4\pi)^2} \left[ \frac{11}{3} C_2(G) - \frac{2}{3} n_F \right] \log \frac{\mu^2}{\mu_0^2} \right)$$

In queste condizioni (in pratica per distanze inferiori al fermio) è possibile considerare i componenti della teoria (quark e gluoni) come quasi liberi, in quanto debolmente interagenti.

Viceversa, quello che accade per scale di energia minori di  $\mu_0$  non è investigabile mediante l'approccio perturbativo: la costante di accoppiamento aumenta dunque l'interazione tra i quark diventa più intensa, e gli stati asintotici della teoria non saranno più rappresentati dai quark ma dai loro stati legati, gli adroni.