



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
FIRENZE

Scuola di  
Scienze Matematiche  
Fisiche e Naturali  
Corso di Laurea Magistrale  
Scienze Fisiche e Astrofisiche

**Teoria di campo auto-duale degli isolanti  
topologici tridimensionali**

**Self-dual field theory of three-dimensional  
topological insulators**

**Candidato:**

Francesco Andreucci

**Relatore:**

Prof. Andrea Cappelli

**Anno Accademico:** 2018/2019



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione alle fasi topologiche della materia</b>	<b>11</b>
1.1	Effetto Hall quantistico . . . . .	12
1.2	L'Effetto Hall quantistico intero . . . . .	14
1.3	L'Effetto Hall frazionario . . . . .	16
1.3.1	Stati di bordo . . . . .	17
1.4	Fasi topologiche in sistemi su reticolo ed isolanti di Chern . . .	17
1.5	Isolanti topologici . . . . .	22
1.6	Classificazione delle fasi topologiche di elettroni liberi . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Teorie di campo dell'effetto Hall quantistico</b>	<b>27</b>
2.1	Teoria di Chern-Simons di bulk . . . . .	27
2.1.1	Eccitazioni di Bulk . . . . .	29
2.1.2	Quantizzazione canonica della teoria di Chern-Simons .	30
2.1.3	Corrispondenza bulk boundary . . . . .	32
2.2	Teoria del bosone chirale . . . . .	34
2.2.1	Bosonizzazione . . . . .	37
2.2.2	Anomaly Inflow ed esattezza della conduttività Hall quantistica . . . . .	38
2.3	Funzione di partizione dell'effetto Hall quantistico . . . . .	40
2.3.1	Il toro e l'invarianza modulare . . . . .	41
2.3.2	Calcolo della funzione di partizione . . . . .	42
2.3.3	Condizioni di invarianza modulare . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Isolanti topologici tridimensionali</b>	<b>47</b>
3.1	Teoria di campo effettiva degli isolanti topologici fermionici . .	47
3.1.1	L'anomalia $\mathbb{Z}_2$ e la sua cancellazione . . . . .	48
3.2	Isolanti topologici bosonici . . . . .	50
3.2.1	Teoria BF in (3+1) dimensioni . . . . .	50
3.2.2	Invarianza di gauge e azione di bordo . . . . .	51
3.2.3	Hamiltoniana della teoria di bordo . . . . .	52
3.3	Teoria bosonica quadratica su $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ . . . . .	55

3.3.1	Ordine topologico della teoria $BF$ . . . . .	55
3.3.2	Ordine topologico e campi di bordo . . . . .	56
3.3.3	Funzione di partizione delle eccitazioni di bordo bosoniche . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Isolanti topologici, loop model e dualità</b>	<b>61</b>
4.1	Teoria di bordo non locale . . . . .	62
4.2	Loop Model . . . . .	63
4.2.1	Relazione fra il loop model e il bordo dell'isolante topologico . . . . .	65
4.3	Dualità del loop model . . . . .	65
4.3.1	Dualità bosone-bosone . . . . .	66
4.3.2	Dualità fermione-fermione . . . . .	67
4.3.3	Dualità fermione-bosone . . . . .	68
4.4	Argomento di Peierls e diagramma delle fasi del loop model . . . . .	69
4.4.1	Argomento di Peierls per il modello $XY$ . . . . .	69
4.4.2	Argomento di Peierls per la $QED$ in $(2 + 1)$ dimensioni . . . . .	70
4.4.3	Argomento di Peierls per il loop model . . . . .	71
4.5	Loop model come limite di grande $N_F$ . . . . .	73
4.5.1	Loop model e $QED_3$ . . . . .	73
4.6	$QED$ mista di Hsiao e Son . . . . .	76
4.6.1	Autodualità della $QED_{4,3}$ . . . . .	76
4.6.2	Limite di grande $N_F$ della $QED_{4,3}$ . . . . .	78
4.7	Funzione di partizione del loop model sul toro $\mathbb{T}^3$ . . . . .	79
4.7.1	Modi solitonici . . . . .	83
4.8	Cut-off infrarosso nel loop model . . . . .	86
4.8.1	Corrispondenza con la teoria bosonica locale . . . . .	86
4.8.2	Loop model invariante di scala . . . . .	87
4.8.3	Modi oscillatori . . . . .	88
4.9	Funzione di partizione del loop model sul cilindro $S^2 \times \mathbb{R}$ . . . . .	89
4.9.1	Modi Solitonici . . . . .	90
4.9.2	Dualità nella funzione di partizione . . . . .	93
4.10	Conclusioni . . . . .	94
<b>A</b>	<b>Proprietà del nucleo <math>D_{\mu\nu}(g, f)</math></b>	<b>I</b>
<b>B</b>	<b>Argomento di Peierls</b>	<b>III</b>
B.1	Azione del monopolo . . . . .	III
B.2	Energia della linea di vortice . . . . .	IV

<b>C Modi solitonici su <math>S^3 \times \mathbb{R}</math></b>	<b>V</b>
C.1 Soluzione dell'equazione di moto . . . . .	V
C.2 Quantità metriche di $S^3 \times \mathbb{R}$ . . . . .	VI
<b>Bibliografia</b>	<b>I</b>



# Introduzione

Uno degli aspetti fondamentali nella comprensione delle proprietà di un sistema fisico consiste nello studio delle varie *fasi* che lo caratterizzano. L'approccio standard con cui si affronta questo problema si basa sull'analisi delle simmetrie del problema, del parametro d'ordine locale, e del meccanismo di rottura spontanea della simmetria. Con questo metodo, è possibile descrivere una moltitudine di sistemi fisici: i liquidi, i ferromagneti, i condensati di Bose-Einstein, ed altri ancora.

A partire dagli anni Ottanta sono stati individuati dei sistemi di materia condensata le cui fasi di bassa temperatura non sono descritte da questo approccio. Queste fasi vengono dette *fasi topologiche della materia*, dove la parola “topologiche” ha un duplice significato. Da un lato, si riferisce all'invarianza di alcune quantità che caratterizzano il sistema rispetto a deformazioni continue dell'Hamiltoniana; dall'altro indica la presenza di eccitazioni globali, le cui proprietà dipendono esclusivamente dalla topologia della varietà spaziale su cui è definito il sistema. Queste proprietà sono indice dell'esistenza di un comportamento collettivo degli elettroni che genera un tipo di ordine diverso da quello derivante da una rottura spontanea della simmetria, detto *ordine topologico*.

L'esempio più semplice di fase topologica, ed il primo scoperto storicamente, è l'*effetto Hall quantistico* [1], che caratterizza un sistema di elettroni bidimensionale a bassissime temperature ( $\sim 10$  mK) ed in presenza di un campo magnetico molto forte ( $\sim 10$  Tesla) nella direzione ortogonale. In queste condizioni la conducibilità trasversa, detta *conducibilità Hall*, presenta dei *plateaux*, in corrispondenza dei quali assume valori quantizzati in unità di  $e^2/h$ , interi [2] o frazionari [3]. Questi valori sono estremamente precisi ed universali (ovvero non dipendenti dai dettagli microscopici del campione) e descrivono fasi Hall con proprietà topologiche distinte.

L'effetto Hall quantistico è caratterizzato da un gap di massa nel bulk, e da eccitazioni di bordo gapless. In particolare, le eccitazioni di bulk risultano fermioniche nel caso intero, mentre nel caso frazionario presentano carica e statistica quantistica frazionaria, e sono dette *anioniche*. Gli stati

di bordo sono *chirali*, cioè si muovono sempre nella stessa direzione, e sono stabili, ossia non acquistano massa tramite interazioni, ad esempio causate dalla presenza di impurezze.

In seguito alla scoperta delle proprietà topologiche dell'effetto Hall quantistico, sono state teorizzate ed osservate numerose fasi topologiche in sistemi di elettroni su reticolo, tutte caratterizzate dalla presenza di un gap nel bulk, eccitazioni di bordo massless e proprietà universali. In particolare, fra queste figurano gli *isolanti topologici* [4], fasi topologiche caratterizzate dall'invarianza per inversione temporale.

Dato che le principali proprietà delle fasi topologiche sono indipendenti dai dettagli microscopici del sistema, è appropriata una descrizione tramite teorie di campo effettive. Per energie inferiori al gap, il bulk è tipicamente descritto da una teoria di gauge topologica, mentre la dinamica massless di bordo è descritta da una teoria di campo invariante conforme (*CFT*). Ad esempio, l'effetto Hall quantistico è descritto nel bulk dalla teoria di Chern-Simons in  $(2+1)$  dimensioni, mentre la dinamica massless di bordo è descritta dalla teoria conforme del bosone chirale  $(1+1)$ -dimensionale. Questa descrizione riproduce tutte le proprietà salienti dell'effetto Hall quantistico già citate, e fornisce un esempio concreto del fenomeno della *bosonizzazione*, per cui un sistema fisico ha due descrizioni equivalenti, una fermionica e l'altra bosonica.

Nella tesi ci concentreremo sullo studio degli *isolanti topologici*, caratterizzate dall'invarianza per inversione temporale. In  $(2+1)$  dimensioni (due spaziali ed una temporale), questi possono essere analizzati generalizzando le tecniche sviluppate per l'effetto Hall quantistico [5]. In  $(3+1)$  dimensioni, un'analisi completa del problema esiste solo nel caso di elettroni non interagenti. Nel caso interagente, solo la teoria di bulk è nota, mentre la dinamica di bordo non è ancora stata determinata, in particolare nel caso massless. In questo lavoro di tesi studieremo una teoria che potrebbe descrivere tale dinamica, detta *loop model*. Questa teoria (bosonica) ha il pregio di riprodurre la risposta ad un campo esterno del fermione libero in  $(2+1)$  dimensioni, e potrebbe quindi fornire un esempio di bosonizzazione in  $(2+1)$  dimensioni, dove tale fenomeno non è ancora stato capito. Peraltro il loop model ha ricevuto una certa attenzione in letteratura poiché realizza esplicitamente le relazioni di dualità in teorie di campo  $(2+1)$ -dimensionali: fra gradi di libertà bosonici e fermionici e fra particelle e vortici.

Infine, il loop model descrive il limite di grande numero di campi  $N_F$  di teorie "standard", come la  $QED_3$  e la  $QED_{4,3}$ . Queste teorie compaiono nelle ipotizzate dualità menzionate sopra, e l'auto-dualità del loop model ne consente lo studio esplicito per grandi  $N_F$ .

Il contributo originale della tesi consiste in un'analisi approfondita del

loop model, che porta ai seguenti risultati. Innanzitutto, abbiamo tracciato il diagramma delle fasi del loop model con l'argomento di Peierls, riproducendo l'analisi numerica presente in letteratura. In seguito abbiamo quantizzato il modello con particolare attenzione allo spettro solitonico, che descrive eccitazioni di carica e flusso frazionario. Per risolvere la non località del modello, lo abbiamo riformulato come un'elettrodinamica che contiene eccitazioni in  $(2 + 1)$  e  $(3 + 1)$  dimensioni. Abbiamo quindi effettuato il calcolo della funzione di partizione del loop model nella geometria spaziale del toro e della sfera. Nel primo caso, siamo riusciti ad effettuare il calcolo completo. Nel secondo caso siamo riusciti a calcolare il contributo solitonico, che verifica esplicitamente l'auto-dualità del loop model.

La nostra analisi aggiunge quindi degli elementi di comprensione nello studio delle eccitazioni di bordo degli isolanti topologici e delle dualità in  $(2 + 1)$  dimensioni.

La tesi ha la struttura seguente. Il capitolo 1 contiene una panoramica generale sulle fasi topologiche, in particolare sull'effetto Hall quantistico e gli isolanti topologici, evidenziando fra questi tratti comuni e differenze. Il capitolo 2 presenta una descrizione dettagliata dell'approccio della teoria di campo effettiva all'effetto Hall quantistico. Analizziamo la teoria di Chern-Simons, che riproduce le proprietà anioniche delle eccitazioni di bulk, e la CFT del bosone chirale di bordo. Infine, delineiamo il calcolo della funzione di partizione delle eccitazioni di bordo. Nel capitolo 3 esaminiamo le teorie di campo effettive usate per descrivere gli isolanti topologici. Ci soffermiamo dapprima sul caso di sistemi non interagenti, descrivibili con teorie fermioniche libere: in questo caso la teoria di campo riproduce i risultati della teoria delle bande elettroniche. Consideriamo poi una teoria bosonica di bulk che descrive sistemi interagenti, ed una possibile descrizione del bordo consistente con questa.

Nel capitolo 4 introduciamo il loop model e mostriamo che descrive il bordo di un isolante topologico. Analizziamo in dettaglio le sue proprietà, mostrandone l'auto-dualità e deriviamo, tramite l'argomento di Peierls, il diagramma delle fasi. In seguito svolgiamo il calcolo della funzione di partizione nella geometria del toro, e del contributo solitonico alla funzione di partizione sulla sfera. Traiamo infine le nostre conclusioni.



# Capitolo 1

## Introduzione alle fasi topologiche della materia

Lo studio dei sistemi con molti gradi di libertà individua delle *fasi*, ovvero delle regioni dello spazio dei parametri, nelle quali le proprietà fisiche sono qualitativamente simili. Ad esempio, le fasi possono essere caratterizzate dal valore non nullo del gap di massa o del *parametro d'ordine*. Queste quantità mostrano comportamenti singolari quando si passa da una fase ad un'altra, cioè quando siamo in presenza di una *transizione di fase*. Lo studio delle fasi dei sistemi è rilevante sia per la fisica della materia condensata a basse energie che per le interazioni fondamentali ad alta energia.

L'approccio comunemente usato nello studio delle fasi consiste nell'individuare la simmetria globale che caratterizza il sistema ed il parametro d'ordine: si identificano quindi le fasi simmetriche e quelle spontaneamente rotte in base al valore di quest'ultimo. L'eventuale presenza di una simmetria locale dà luogo al fenomeno di Higgs. I sistemi che ammettono questa descrizione sono innumerevoli, dai ferromagneti ai condensati di Bose-Einstein, dai superconduttori al Modello Standard.

In questa tesi descriveremo le fasi della materia condensata mediante la teoria quantistica dei campi, che rappresenta uno strumento fondamentale e universale della fisica teorica; inizialmente formulata nell'ambito delle interazioni fondamentali, la teoria di campo effettiva è stata applicata con grande successo alle basse energie. La teoria di campo per il parametro d'ordine che descrive la rottura spontanea della simmetria è la teoria di Landau-Ginzburg, che si estende al modello di Higgs in presenza di simmetrie locali.

Alcuni sistemi di materia condensata scoperti a partire degli anni 80, come l'effetto Hall quantistico [1], presentano delle fasi a bassa temperatura che non possono essere descritte dal comportamento del parametro d'ordine. Queste fasi presentano delle proprietà topologiche caratteristiche e sono

quindi dette *fasi topologiche* della materia. L'aggettivo "topologico" fa riferimento a diversi aspetti del sistema. Da un lato si osservano proprietà, come il gap di massa, che sono robuste rispetto a deformazioni continue dell'Hamiltoniana. Dall'altro lato, il sistema possiede delle eccitazioni con energia inferiore al gap che sono globali e si manifestano al bordo del sistema. Inoltre, il comportamento collettivo degli elettroni determina una risposta a sollecitazioni esterne di natura globale, che dipende solo dalla geometria dello spazio su cui è definito il sistema. In questo capitolo mostreremo come queste proprietà topologiche emergano nell'effetto Hall quantistico e in altri sistemi detti isolanti di Chern e isolanti topologici. A questa introduzione di carattere qualitativo seguirà nei capitoli successivi l'analisi basata sulle teorie di campo effettive.

Le fasi topologiche sono caratterizzate dalle seguenti proprietà:

- Lo stato fondamentale con un gap di massa è associato ad un numero intero, corrispondente ad una quantità *invariante topologica*, ovvero invariante per deformazioni continue dell'Hamiltoniana e della geometria dello spazio su cui è definito il sistema.
- Le eccitazioni sono caratterizzate da proprietà topologiche come la statistica quantistica frazionaria, corrispondente ad una correlazione indipendente dalla distanza.
- Nel caso il sistema sia definito su uno spazio con bordo, questo è popolato da eccitazioni a massa nulla le cui caratteristiche dipendono dalle proprietà dello stato fondamentale.
- Nel caso di sistemi definiti su spazi senza bordo, come la sfera o il toro, lo stato fondamentale presenta una degenerazione dovuta alla presenza di gradi di libertà quantistici globali.

## 1.1 Effetto Hall quantistico

Consideriamo un nastro conduttore planare, giacente nel piano  $xy$ , immerso in un campo magnetico  $\mathbf{B}$  costante e ortogonale al piano. Se applichiamo un campo elettrico  $\mathbf{E}$  nella direzione  $x$  del piano, osserviamo una corrente  $\mathbf{j}$  che scorre nella direzione ortogonale  $y$ . Questo fenomeno è detto *effetto Hall classico*. Gli elettroni sono deviati nel loro moto dalla forza di Lorentz e, con semplici passaggi, otteniamo la seguente espressione per il tensore di conducibilità  $\sigma_{ij}$ , definito da  $j_i = \sigma_{ij}E_j$ , e per il suo inverso  $\rho_{ij}$  ( $i, j = x, y$ ):

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -en_e c/B \\ en_e c/B & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & B/en_e c \\ -B/en_e c & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

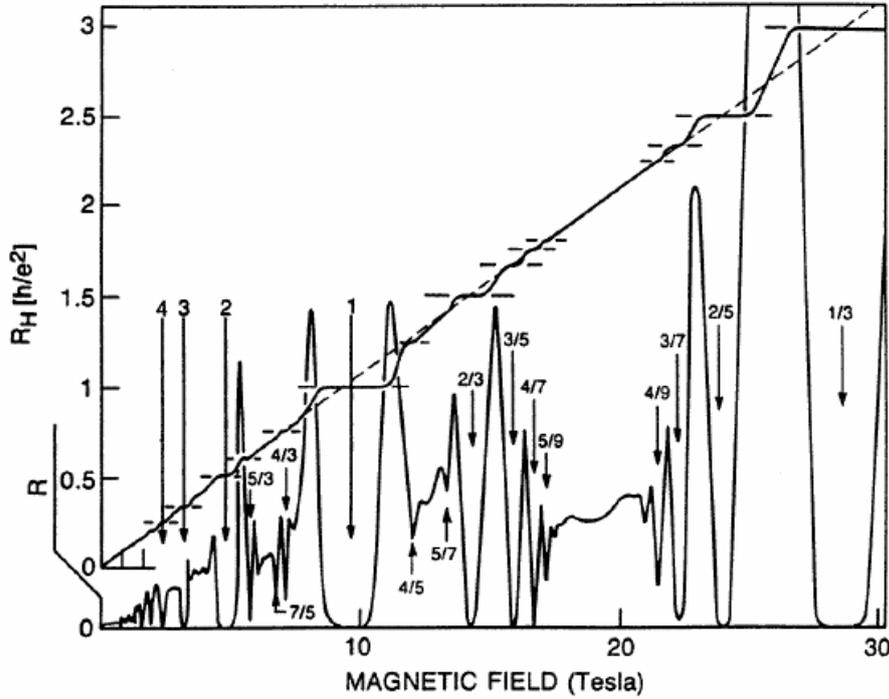


Figura 1.1: Nel grafico sono riportati gli andamenti sperimentali della resistività Hall ( $R_H$ ), e di quella ohmica ( $R$ ), in funzione del campo magnetico. La linea tratteggiata corrisponde all'andamento classico.

dove  $e$  ed  $n_e$  sono rispettivamente carica e densità numerica degli elettroni e  $c$  è la velocità della luce.

Negli anni Ottanta furono osservate delle deviazioni dalla legge classica  $\rho_{xy} \propto B$  in strati bidimensionali di materiali semiconduttori, in un regime di temperature molto basse (dell'ordine di  $10 \div 100 \text{ mK}$ ) ed intensi campi magnetici (dell'ordine di  $10 \text{ Tesla}$ ), come riportato in figura (1.1). In particolare, si osserva la presenza di *plateaux* in corrispondenza di multipli interi (*effetto Hall quantistico intero*, [2]) o razionali (*effetto Hall quantistico frazionario*, [3]) di  $h/e^2$ :

$$\rho_{xy} = \frac{h}{e^2} \frac{1}{\nu}, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \dots \quad (1.2)$$

I valori di  $\nu$ , detto *fattore di riempimento*, o *filling fraction*, riportati in figura (1.1) sono misurati con errore relativo sorprendentemente piccolo, di ordine  $O(10^{-8})$  nel caso intero e  $O(10^{-6})$  in quello frazionario: una tale precisione indica che questi valori sono indipendenti dalle caratteristiche microscopiche del materiale, cioè sono universali. In corrispondenza dei *plateaux* la conducibilità longitudinale  $\sigma_{xx}$  (ohmica) si annulla, corrispondente a  $\rho_{xx} = 0$  in

figura (1.1). Questo fatto indica la presenza di un gap  $\Delta$  nello spettro del sistema.

L'idea chiave per spiegare questi fenomeni, dovuta a Laughlin [8], è che gli elettroni si comportino collettivamente come una goccia di *fluido incompressibile*, ovvero con densità  $\rho(x, y)$  costante e fluttuazioni di densità soppresse per energie molto inferiori al gap  $\Delta$ ,  $K_B T \ll \Delta$ . Vedremo nel seguito che questa pittura emerge semplicemente nel caso di filling  $\nu$  intero considerando elettroni liberi in un campo magnetico. Nel caso frazionario sono invece importanti le interazioni ed il fluido incompressibile è descritto mediante un ansatz sulla funzione d'onda del sistema.

## 1.2 L'Effetto Hall quantistico intero

Gli elettroni immersi in un campo magnetico effettuano delle orbite circolari (dette orbite di ciclotrone) nel piano ortogonale al campo, la cui quantizzazione è descritta dai *livelli di Landau*. L'Hamiltoniana di singola particella è data da <sup>1</sup>:

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A})^2, \quad (1.3)$$

dove  $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$  e  $\mathbf{A} = -\frac{B}{2}(y, -x)$  descrive il campo esterno. L'Hamiltoniana ed il momento angolare canonico possono essere scritti in termini di due coppie di operatori di creazione e distruzione,  $(a, a^\dagger)$  e  $(b, b^\dagger)$ , nel seguente modo [6]:

$$H = \hbar\omega_c(a^\dagger a + \frac{1}{2}), \quad H |n, m\rangle = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2}) |n, m\rangle, \quad \omega_c = \frac{eB}{mc},$$

$$J = \hbar(b^\dagger b - a^\dagger a), \quad J |n, m\rangle = \hbar m |n, m\rangle, \quad n \geq 0, \quad m \geq -n.$$

Gli stati del sistema  $|n, m\rangle$  sono analoghi a quelli dell'oscillatore armonico bidimensionale, ma i livelli energetici (detti *livelli di Landau*) sono infinitamente degeneri rispetto al momento angolare, come conseguenza dell'invarianza per traslazione dei centri delle orbite classiche. La funzione d'onda di un elettrone nell' $n$ -esimo livello con momento angolare  $m$  è localizzata attorno all'orbita classica di raggio  $r_{nm} \sim l_B \sqrt{n + m}$ , dove  $l_B = \sqrt{2\hbar c/eB}$  è la lunghezza magnetica, la scala caratteristica del problema quantistico.

---

<sup>1</sup>Il termine di Zeeman di accoppiamento fra il campo magnetico e lo spin dell'elettrone è ommesso perché i materiali considerati hanno un fattore giromagnetico grande,  $g \sim 10 \div 100$ , e quindi per intensi campi magnetici possiamo considerare gli elettroni polarizzati nella direzione del campo stesso.

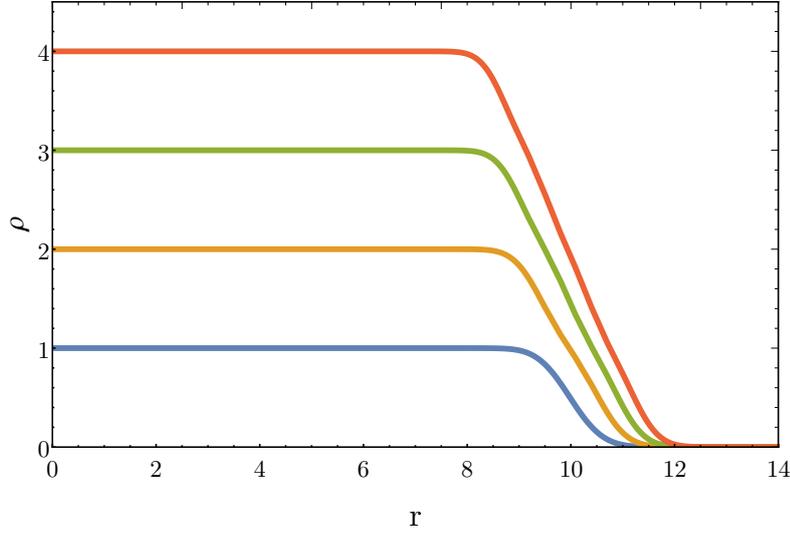


Figura 1.2: In figura sono rappresentati i profili di densità per  $M = 100$ , per un sistema con 1, 2, 3, 4 livelli di Landau riempiti, dal basso verso l'alto. In ascissa ed ordinata sono riportate rispettivamente la distanza dall'origine e la densità, in unità arbitrarie.

Nella geometria del disco di raggio  $R$  c'è un valore massimo del momento angolare, dato da  $M$ , corrispondente all'orbita di raggio massimo  $r_{nM} \sim R$ . Il sistema finito ha quindi una degenerazione finita  $D$  pari a

$$D = \Phi/\Phi_0, \quad (1.4)$$

dove  $\Phi$  è il flusso totale di campo magnetico attraverso il disco, e  $\Phi_0 = 2\pi\hbar c/e$  è il quanto di flusso. Consideriamo la situazione in cui siano riempiti completamente  $n = 1, 2, 3, \dots$  livelli di Landau, ovvero la frazione di riempimento  $\nu = N_e/D = n$  dove  $N_e$  è il numero di elettroni nel campione. Sostituendo l'espressione di  $D$  nelle formule classiche (1.1) otteniamo:

$$\sigma_{xy} = \frac{n_e e c}{B} = \frac{e^2}{h} n. \quad (1.5)$$

Abbiamo quindi ottenuto il valore sperimentale della conducibilità ai *plateaux* dell'effetto Hall quantistico intero. Nel caso di riempimento completo, gli elettroni si comportano come una goccia di fluido incompressibile, come segue. La densità  $\rho(x, y)$  calcolata dalle funzioni d'onda dei livelli di Landau è costante nel bulk, come mostrato in figura (1.2). Consideriamo un livello di Landau pieno, e comprimiamo il disco: quest'operazione farà diminuire il valore massimo consentito del momento angolare  $M$ , e quindi alcuni elettroni dovranno passare al livello superiore superando il gap  $\hbar\omega_c$ . Nelle condizioni sperimentali che ci interessano,  $K_B T \ll \hbar\omega_c$ , le fluttuazioni di densità nel

bulk sono soppresse. Abbiamo quindi un sistema con gap che non presenta conducibilità Ohmica,  $\sigma_{xx} = 0$ . D'altra parte, la conduzione Hall corrisponde ad un movimento rigido di tutta la goccia.

Nell'intorno dei riempimenti completi  $\nu = n$ , al variare di  $B$  si modifica la degenerazione dei livelli di Landau. Quindi si avranno degli stati vuoti, oppure degli elettroni che passano nel livello di Landau superiore dove sono liberi di muoversi. Questi stati potrebbero contribuire alla conduzione Ohmica. In effetti, ciò non accade perché gli elettroni liberi sono intrappolati dalle impurezze del sistema e diventano localizzati. Questo meccanismo spiega la presenza dei *plateaux* nella conducibilità Hall che si osserva nei dati sperimentali in figura (1.1).

L'elevata precisione della conducibilità intera sarà spiegata a più riprese nel seguito della tesi. A questo livello, osserviamo che la quantizzazione intera nella teoria degli elettroni liberi, rimane valida anche in presenza di piccole interazioni ed altri effetti poiché non ci sono transizioni elettroniche possibili nei livelli di Landau pieni. Vedremo in seguito che la conducibilità Hall è una quantità invariante topologica.

### 1.3 L'Effetto Hall frazionario

I dati sperimentali in figura (1.1) mostrano dei *plateaux* in corrispondenza di alcuni riempimenti frazionari  $\nu = 1/3, 2/3, 2/5...$  con caratteristiche simili al caso intero. La teoria degli elettroni liberi di Landau prevede stati altamente degeneri per riempimenti frazionari, e quindi non può essere usata in questi casi. Dobbiamo dunque assumere che la repulsione Coulombiana determini il gap, che è quindi un effetto non perturbativo, di cui ad oggi non abbiamo una descrizione microscopica.

L'approccio di Laughlin consiste nel supporre ancora valida la pittura del fluido incompressibile e nel formulare un ansatz per la funzione d'onda dello stato fondamentale che risulta essere estremamente accurato e preciso. L'espressione della funzione d'onda di Laughlin per  $\nu = 1/p$ ,  $p$  dispari, è la seguente [8] (in coordinate complesse  $z = x + iy$ ):

$$\Psi_p(\{z_i\}, \{\bar{z}_i\}) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{N_e} |z_i|^2/2l_B\right) \prod_{i<j=1}^{N_e} (z_i - z_j)^p. \quad (1.6)$$

Tramite analisi numeriche, si dimostra che  $\Psi_p$  è un buon ansatz per lo stato fondamentale di elettroni interagenti. Si verifica che essa descrive in modo accurato la fisica del FQHE, in particolare descrive una goccia di fluido a densità costante. Modificando la (1.6) è possibile descrivere anche le eccitazioni

di bulk, prevedendone correttamente il gap. Queste eccitazioni si manifestano come delle “buche” nel profilo di densità (si parla infatti di quasibuche), e risultano avere carica frazionaria  $Q = -e/p$ . Inoltre, nello scambio di due eccitazioni la funzione d’onda acquista una fase  $\Delta\theta = \pi/p$ , che differisce dai volari  $\Delta\theta = 0, \pi$  di bosoni e fermioni. Si parla dunque di eccitazioni anioniche e di statistica quantistica frazionaria.

### 1.3.1 Stati di bordo

Nei sistemi di taglia finita è presente necessariamente un potenziale confinante che impedisce l’uscita degli elettroni dal campione. Consideriamo, per semplicità, il caso dell’effetto Hall intero: un tale potenziale rompe la degenerazione dei livelli di Landau vicino al bordo, introducendo una dipendenza dal momento angolare  $m$  nei livelli energetici (fig.(1.3)). Si forma quindi una sorta di superficie di Fermi al bordo del sistema: le eccitazioni buca/particella attorno al livello di Fermi sono a massa nulla con spettro approssimativamente lineare [6]:

$$\varepsilon_m = v_F \frac{m - M}{R} = v_F k, \quad (1.7)$$

dove  $k$  è l’impulso della eccitazione unidimensionale sul bordo e  $v_F$  è la velocità di Fermi. Si dimostra che queste eccitazioni sono *chirali*, cioè si muovono lungo il bordo in una sola direzione. Questo risultato è possibile perché il sistema viola le simmetrie di parità  $\mathcal{P}$  ed inversione temporale  $\mathcal{T}$ , a causa della presenza del campo magnetico. Nel caso dell’effetto Hall nella geometria dell’anello, ci sono due bordi, interno ed esterno, lungo i quali le eccitazioni si muovono con chiralità opposta.

Eccitazioni di bordo sono presenti anche nel caso frazionario, con proprietà analoghe al caso intero. Le loro caratteristiche saranno discusse meglio nel prossimo capitolo utilizzando le teorie di campo effettive. Notiamo che, a causa dell’incomprimibilità della goccia, la formazione di una buca nel bulk comporta lo spostamento di carica al bordo, cioè la formazione di un’eccitazione carica. Abbiamo quindi che lo studio della fisica del bordo permette di comprendere sia le eccitazioni buca/particella che quelle di bulk.

## 1.4 Fasi topologiche in sistemi su reticolo ed isolanti di Chern

Discutiamo adesso degli esempi di fasi topologiche che si realizzano in sistemi di elettroni liberi in un reticolo bidimensionale  $\Lambda$ , in assenza di campo ma-

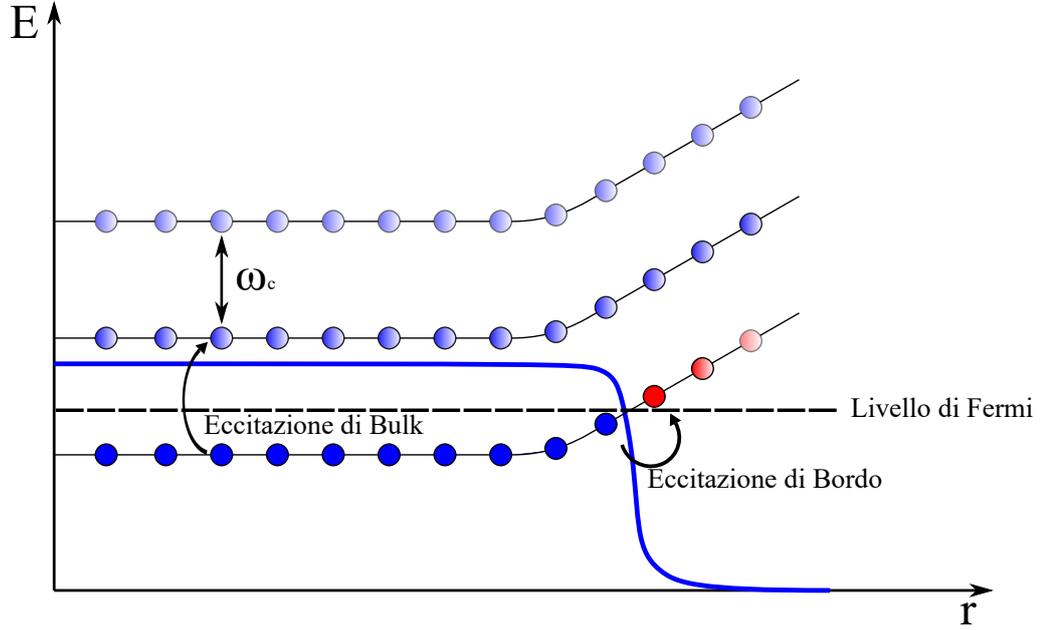


Figura 1.3: In figura è rappresentato il profilo di densità della funzione d'onda totale degli elettroni nel primo livello di Landau, e la deformazione dei livelli dovuta al potenziale confinante.

gnetrico esterno. L'Hamiltoniana di singola particella  $H$  agisce sulle funzioni d'onda delle bande energetiche del sistema nel seguente modo:

$$H\psi_{n,\mathbf{k}} = E_n(\mathbf{k})\psi_{n,\mathbf{k}}, \quad \psi_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad (1.8)$$

dove  $E_n(\mathbf{k})$  è lo spettro energetico della banda ennesima con la periodicità del reticolo reciproco  $\Lambda^*$ , mentre  $u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  è una funzione con la periodicità del reticolo diretto  $\Lambda$ . Consideriamo sistemi isolanti, in cui è presente un gap fra la banda di valenza e quella di conduzione. Definiamo due isolanti *topologicamente equivalenti* se è possibile deformare con continuità l'Hamiltoniana dell'uno in quella dell'altro senza chiudere il gap. Secondo questa definizione, la frontiera fra due sistemi topologicamente non equivalenti è necessariamente popolata da eccitazioni gapless. In particolare questo vale per la frontiera fra il vuoto ed un isolante topologicamente non banale. Questo argomento suggerisce la presenza di eccitazioni di bordo anche per questi sistemi. Consideriamo il primo esempio di isolante di Chern introdotto da Haldane nel lavoro [9]. Il sistema descrive dei fermioni che si muovono su un reticolo esagonale. Sono presenti due reticoli di Bravais A e B, come in figura (1.4): siano  $\mathbf{r}_A$  le posizioni dei siti del reticolo A, e  $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{d}_i$  quelle

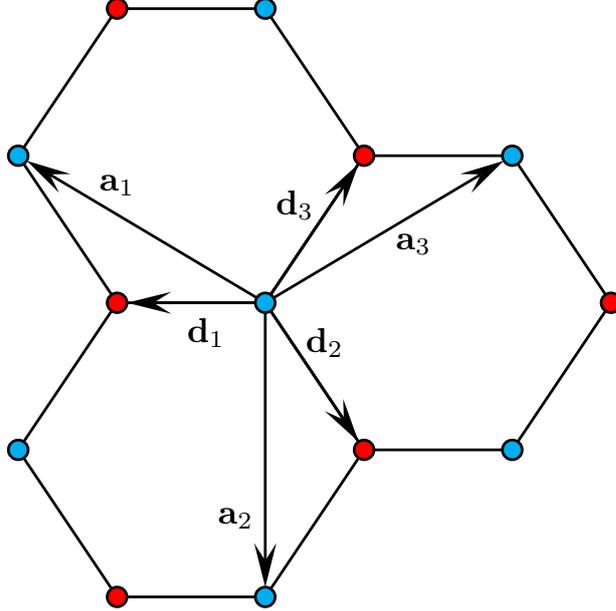


Figura 1.4: In figura è riportato il reticolo su cui è definito il modello di Haldane: i siti del reticolo  $A$  sono in rosso, quelli del reticolo  $B$ , in blu.

dei siti del reticolo  $B$ . L'Hamiltoniana del sistema è:

$$H = H_1 + H_\varepsilon, \quad (1.9)$$

$$H_1 = t_1 \sum_{\mathbf{r}_A, i} \left[ \psi_A^\dagger(\mathbf{r}_A) \psi_B(\mathbf{r}_A + \mathbf{d}_i) + h.c. \right], \quad (1.10)$$

$$H_\varepsilon = \varepsilon \sum_{\mathbf{r}_A, i} \left[ \psi_A^\dagger(\mathbf{r}_A) \psi_A(\mathbf{r}_A) - \psi_B^\dagger(\mathbf{r}_A + \mathbf{d}_i) \psi_B(\mathbf{r}_A + \mathbf{d}_i) \right]. \quad (1.11)$$

I due termini descrivono rispettivamente un contributo di *hopping* a primi vicini ( $H_1$ ) ed un contributo di energia di sito ( $H_\varepsilon$ ). Quest'Hamiltoniana può essere diagonalizzata nello spazio di Fourier e presenta delle fasi massive e massless al variare dei parametri  $t_1$  e  $\varepsilon$ . L'Hamiltoniana è inoltre invariante per parità  $\mathcal{P}$  e inversione temporale  $\mathcal{T}$  per cui descrive una fisica molto diversa da quella dell'effetto Hall quantistico.

L'idea di Haldane è quella di aggiungere il seguente termine:

$$H_2 = t_2 \sum_{\mathbf{r}_A, i} \left[ e^{i\alpha} \left( \psi_A^\dagger(\mathbf{r}_A + \mathbf{a}_i) \psi_A(\mathbf{r}_A) + \psi_B^\dagger(\mathbf{r}_A + \mathbf{d}_i - \mathbf{a}_i) \psi_B(\mathbf{r}_A + \mathbf{d}_i) \right) + h.c. \right]. \quad (1.12)$$

Si tratta di un termine di hopping a secondi vicini con parametro complesso  $t_2 e^{i\alpha}$ , che rompe la simmetria di inversione temporale. La sua origine fisica è la seguente. Supponiamo di avere un campo magnetico variabile nel sistema, con la condizione che il flusso totale attraverso la cella unitaria sia nullo. Quando un elettrone si muove in un campo magnetico acquista una fase proporzionale al flusso del campo attraverso la superficie delimitata dal suo cammino. Nel caso di cammini composti da hopping fra siti primi vicini, l'elettrone non prende nessuna fase poiché il flusso totale del campo magnetico racchiuso è nullo. Viceversa, cammini ottenuti muovendosi fra siti secondi vicini racchiudono aree diverse, e quindi acquistano una fase  $\alpha$  inclusa nel termine (1.12). La presenza di questa fase porta ad una rottura della simmetria per inversione temporale, e quindi possiamo attenderci dei fenomeni analoghi a quelli dell'effetto Hall. Il diagramma di fase risultante è riportato in figura (1.5), da cui si evince come effettivamente il modello produca una conduttività Hall non nulla, in assenza di campo magnetico esterno: questo fenomeno è detto effetto Hall *anomalo* ed è stato recentemente confermato sperimentalmente sia in un materiale ferromagnetico [10] che in un sistema di atomi freddi [11].

I valori della conducibilità Hall in figura (1.5) sono:

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} C, \quad C = \pm 1, \quad (1.13)$$

e sono associati ad un invariante topologico del sistema quantistico delle bande elettroniche. Per descrivere questo risultato occorre introdurre la fase di Berry  $\phi_B^{(n)}$  [12] [13] e l'associato campo di gauge  $\mathbf{A}^{(n)}(\mathbf{k})$ , costruito a partire dalla funzione d'onda degli elettroni nella banda n-esima:

$$\phi_B^{(n)} = \oint_{\gamma} \mathbf{A}^{(n)}(\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{k}, \quad \mathbf{A}^{(n)}(\mathbf{k}) = i \langle u_n(\mathbf{k}) | \nabla_{\mathbf{k}} | u_n(\mathbf{k}) \rangle. \quad (1.14)$$

In generale, la fase di Berry è la fase accumulata dalla funzione d'onda durante una variazione adiabatica dei parametri dell'Hamiltoniana lungo un circuito chiuso  $\gamma$ . Nel caso di un sistema a bande, i parametri sono i quasi-impulsi  $\mathbf{k}$  che prendono valori nella prima zona di Brillouin. Consideriamo

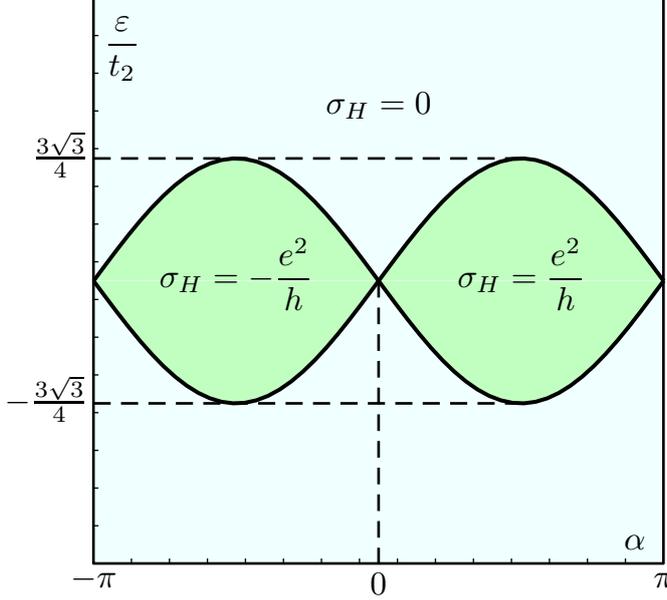


Figura 1.5: In figura è rappresentato il diagramma di fase del modello di Haldane: si distinguono tre fasi caratterizzate dal valore della conduttività.

ora la curvatura associata al campo  $\mathbf{A}^{(n)}$ ,  $F^{(n)} = dA^{(n)}$  ed il suo integrale sulla prima zona di Brillouin (che ha la topologia di un toro):

$$C^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} F^{(n)}(\mathbf{k}) d^2k. \quad (1.15)$$

Questa quantità è un invariante topologico, detto *prima classe di Chern* [14], che assume valori interi. In termini matematici, i valori  $C^{(n)} \neq 0$  esprimono il fatto che le funzioni d'onda realizzano un fibrato  $U(1)$  non banale sul toro  $\mathbb{T}^2$  analogo a quello del monopolo di Dirac [15]. In termini fisici, esprimono l'esistenza di un punto nello spazio dei parametri dove il gap si annulla e quindi il campo  $\mathbf{A}^{(n)}$  è singolare, per sistemi che violano la simmetria di inversione temporale  $\mathcal{T}$ .

Nel caso del modello di Haldane, il numero di Chern della banda di valenza assume i valori  $0, \pm 1$  al variare dei parametri  $\varepsilon, t_1, t_2$  che individuando tre fasi topologiche distinte, come mostrato in figura (1.5) e dalla formula (1.13). I sistemi su reticolo che presentano delle fasi massive con violazione della simmetria  $\mathcal{T}$  e dal numero di Chern  $C \neq 0$  sono detti *isolanti di Chern* [16].

La relazione fra conducibilità Hall e la prima classe di Chern è stata originariamente derivata nel contesto dell'effetto Hall quantistico intero [17]

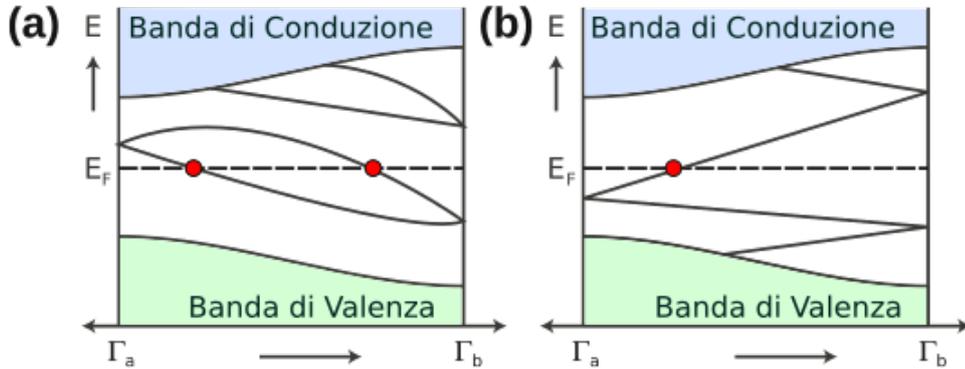


Figura 1.6: Le due diverse possibilità con cui si può realizzare la degenerazione ai vertici della prima zona di Brillouin. Questi ultimi sono indicati con:  $\Gamma_a: k_x = 0$ ,  $\Gamma_b: k_y = \pi/a$ . La regione con  $k_x < 0$  è ottenuta per riflessione rispetto all'asse  $E$ , in base alla (1.16). Il potenziale chimico è indicato con  $E_F$

e poi estesa da Haldane a questi sistemi su reticolo che realizzano un campo magnetico auto-indotto. Questo importante risultato ha aperto la strada allo studio teorico e sperimentale di molti altri sistemi che presentano fasi topologiche.

## 1.5 Isolanti topologici

L'effetto Hall quantistico e gli isolanti di Chern sono fasi topologiche che violano la simmetria di inversione temporale  $\mathcal{T}$ . In questo paragrafo introduciamo altri sistemi con fasi topologiche che invece rispettano tale simmetria. Più in generale, abbiamo delle *fasi topologiche protette da simmetria* (*Symmetry protected topological phases, SPT*), che sono caratterizzate da una simmetria: in sua assenza, i relativi sistemi decadono in fasi massive banali. L'equivalenza delle fasi topologiche si intende in questi casi per deformazioni continue dell'Hamiltoniana che rispettano la simmetria.

Gli isolanti topologici sono dei sistemi di elettroni su reticolo che presentano l'invarianza per inversione temporale. La fase topologica è caratterizzata anche in questo caso da eccitazioni di bordo di massa nulla. Per un sistema in due dimensioni spaziali abbiamo un bordo unidimensionale: le eccitazioni sono presenti in  $N_F$  coppie di chiralità e spin opposto che sono  $\mathcal{T}$ -invarianti. In generale ci potremmo aspettare che eccitazioni di chiralità opposta possano interagire e diventare massive, conducendo ad una fase massiva banale nel limite infrarosso. In realtà in alcuni casi l'interazione non è compatibile con la simmetria  $\mathcal{T}$ .

Formuliamo il seguente argomento di stabilità per queste eccitazioni, ori-

ginariamente dovuto a Kane e collaboratori [18]. Nei sistemi fermionici invariati rispetto all'inversione temporale, vale il *teorema di Kramers*, il quale afferma che ogni autostato dell'Hamiltoniana di spin semi intero è degenere con il suo trasformato sotto  $\mathcal{T}$  [19]. Allora, essendo  $(-\mathbf{k}, -\sigma)$  i trasformati per inversione temporale di impulso e spin  $(\mathbf{k}, \sigma)$ , abbiamo la seguente relazione fra le energie delle bande

$$E_n^\sigma(\mathbf{k}) = E_n^{-\sigma}(-\mathbf{k}). \quad (1.16)$$

Consideriamo un isolante topologico bidimensionale nel piano  $xy$ , e supponiamo che ci siano degli stati di bordo ( $y = 0$ ) gapless. Per il teorema di Kramers, le bande devono essere degeneri nei punti  $\mathcal{T}$ -invarianti del reticolo unidimensionale cioè  $k_x = 0, \pm\pi/a$ , dove  $a$  è il passo reticolare. Questa degenerazione può manifestarsi in due modalità distinte, come è riportato in figura (1.6) che rappresenta le bande del sistema unidimensionale di bordo. Nel caso a) le bande attraversano la superficie di Fermi in due punti e quindi abbiamo due coppie ( $N_F = 2$ ) di eccitazioni di bordo. In questo caso, queste ultime possono essere rese massive da uno shift del potenziale chimico (causato, ad esempio, dalla presenza di impurezze). Nel caso b) è presente una singola coppia di stati di bordo ( $N_F = 1$ ) ed anche spostando il potenziale chimico non è possibile eliminare le eccitazioni gapless. Questi due casi corrispondono rispettivamente ad un isolante banale ed uno topologico. Emerge quindi una classificazione  $\mathbb{Z}_2$  di questo tipo di fasi, in base alla parità del numero di coppie di stati di bordo  $N_F$ .

Anche gli isolanti topologici sono caratterizzati da un invariante topologico ottenuto dalle funzioni d'onda delle bande. Non si tratta del numero di Chern, che si annulla in presenza di simmetria per inversione temporale, ma di una sua generalizzazione. Il numero topologico invariante rispetto a deformazioni  $\mathcal{T}$ -invarianti è dato da:

$$\nu_0 = N_F \bmod 2, \quad (1.17)$$

che conta la parità del numero di modi elettronici al bordo, ovvero del loro spin  $\nu_0 = 2S \bmod 2$ .

Gli isolanti topologici sono stati osservati sperimentalmente per la prima volta in composti di mercurio e tellurio [20], dopo la proposta teorica di Bernevig e Zhang [21].

Si dimostra che l'argomento di stabilità delle eccitazioni fermioniche di bordo si estende anche a isolanti topologici in tre dimensioni spaziali [22]. In questo caso abbiamo un fermione bidimensionale che vive nel piano corrispondente al bordo del sistema. Questa eccitazione ha massa nulla e spin *elicale*, ovvero ortogonale all'impulso e giacente nel piano, ed è invariante

Classe	$\mathcal{T}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{S}$	0	1	2	3	4	5	6	7
A	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0
AIII	0	0	1	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
AI	+	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
BDI	+	+	1	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$
D	0	+	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0
DIII	-	+	1	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$2\mathbb{Z}$
AII	-	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0
CII	-	-	1	0	$2\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0
C	0	-	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0
CI	+	-	1	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$

Figura 1.7: Classificazione in dieci classi delle fasi topologiche dei sistemi a bande in base alle loro simmetrie discrete e dimensionalità.

per inversione temporale. La stabilità della fase topologica richiede anche in questo caso un numero dispari di modi fermionici di bordo. Gli isolanti topologici in tre dimensioni sono stati osservati sperimentalmente per la prima volta in composti del bismuto [23], dopo il lavoro teorico [24].

Gli isolanti topologici tridimensionali saranno l'argomento analizzato in questa tesi e la loro stabilità sarà discussa nuovamente nel contesto della teoria di campo effettiva.

## 1.6 Classificazione delle fasi topologiche di elettroni liberi

Abbiamo visto che fasi topologiche in sistemi di elettroni liberi sono caratterizzate da un numero intero (QHE, isolante di Chern), o da un indice  $\mathbb{Z}_2$  (isolanti topologici in due o tre dimensioni). Questa analisi è stata estesa a sistemi in dimensione generica, in presenza (o assenza) delle seguenti simmetrie discrete: inversione temporale ( $\mathcal{T}$ ), coniugazione di carica ( $\mathcal{C}$ ) e simmetria "chirale", ( $\mathcal{S} = \mathcal{TC}$ ) [25]. Il risultato finale è che per ogni dimensione  $d$ , abbiamo una suddivisione delle fasi topologiche in dieci classi, in base alle simmetrie discrete presenti (figura (1.7)). Nella prima colonna da sinistra, è riportato il nome della classe, nella seconda colonna quale delle tre simmetrie è presente, tramite un numero sotto la lettera corrispondente. Per le simmetrie  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{C}$ , la presenza è rappresentata da un segno che indica il valore di  $\mathcal{T}^2 = \pm 1$  o  $\mathcal{C}^2 = \pm 1$ , mentre l'assenza della simmetria è indicata con 0. Si noti che in assenza di entrambe le simmetrie  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{C}$ , la simmetria  $\mathcal{S}$

non è univocamente determinata e quindi può essere presente  $\mathcal{S} = 1$  (classe  $A$ ) o assente  $\mathcal{S} = 0$  (classe  $AIII$ ). Infine, nella terza parte in alto è scritto il numero di dimensioni spaziali del sistema, e sotto il valore dell'invariante topologico che caratterizza le classi. Ad esempio, il QHE appartiene alla classe  $A$ , in  $d = 2$ : viola tutte e tre le simmetrie ed è caratterizzato dalla resistività Hall che assume valori interi. Viceversa gli isolanti topologici appartengono alla classe  $AII$ : godono della simmetria  $\mathcal{T}$ , con  $\mathcal{T}^2 = -1$ , e sono caratterizzati da un indice  $\mathbb{Z}_2$ , sia in due che tre dimensioni.

La classificazione in figura (1.7) è stata ottenuta dall'analisi delle Hamiltoniane fermioniche quadratiche su reticolo, che hanno la seguente forma generale:

$$H = \sum_{ij} c_i^\dagger M_{ij} c_j, \quad (1.18)$$

dove gli indici  $i$  e  $j$  rappresentano sia i siti del reticolo che eventuali indici di spin o altri numeri quantici dei fermioni. In questa forma, si realizza una relazione fra le possibili Hamiltoniane fermioniche  $H$  e le matrici  $M$  aleatorie (ovvero di forma generica) [26]. È quindi possibile estendere la classificazione già nota delle matrici aleatorie allo studio delle fasi topologiche. In ambedue i problemi, le classi sono caratterizzate dalla realizzazione delle simmetrie  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{C}$ .

In conclusione, in questo capitolo abbiamo introdotto lo studio delle fasi topologiche, principalmente nel caso di fermioni non interagenti descritti da Hamiltoniane quadratiche e dalla struttura a bande. Un problema aperto è l'estensione della classificazione degli stati topologici (1.7) al caso interagente. Nei capitoli successivi discuteremo come questo problema possa essere affrontato, ed in certi casi risolto, nel contesto delle teorie di campo effettive.



## Capitolo 2

# Teorie di campo dell'effetto Hall quantistico

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto l'effetto Hall quantistico che presenta fenomeni collettivi con un elevato grado di precisione ed un'universalità, ovvero indipendenza dai dettagli del sistema alla scala microscopica. Sembra dunque ragionevole cercare di descrivere questa dinamica in termini di una teoria di campo effettiva, come si fa per i sistemi di meccanica statistica al punto critico. In generale la teoria effettiva è costruita a partire da uno sviluppo di bassa energia dell'azione, scrivendo tutti i termini possibili compatibili con le simmetrie del problema, considerando poi solo quelli più rilevanti secondo il gruppo di rinormalizzazione.

### 2.1 Teoria di Chern-Simons di bulk

Il primo passo è individuare quali sono i gradi di libertà effettivi del sistema, che in questo caso è costituito da  $N_e$  elettroni confinati in due dimensioni spaziali. Indichiamo con  $\mathbf{x}_k$  e  $\mathbf{v}_k$  rispettivamente la posizione e la velocità del  $k$ -esimo elettrone. La densità e la corrente di densità di materia  $n^0(\mathbf{x}, t)$  e  $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$  sono date da [27] [16] :

$$n^0(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=0}^{N_e} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k), \quad n^i(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{N_e} v_{(k)}^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k). \quad (2.1)$$

Queste possono essere combinate nel quadrivettore  $n^\mu = (n^0, n^i)$ . La conservazione della carica implica che la corrente  $j^\mu = -en^\mu$  soddisfi un'equazione di continuità:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (2.2)$$

Una corrente conservata in  $2 + 1$  dimensioni (le due dimensioni spaziali più il tempo), può essere espressa come duale di un campo vettoriale  $a_\mu$  nel seguente modo:

$$j^\mu = \frac{-e}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu a_\rho. \quad (2.3)$$

Stiamo descrivendo la fisica del fluido incomprimibile di elettroni introdotto da Laughlin e quindi ci aspettiamo che  $j_\mu$  sia una funzione continua con piccole fluttuazioni nel limite di bassa energia. Il campo  $a_\rho$ , detto campo idrodinamico, è un campo di gauge  $U(1)$ , come è manifesto dal fatto che la corrente risulti invariante per la trasformazione  $a_\mu \rightarrow a_\mu + \partial_\mu \Lambda$ .

Siamo quindi giunti alla conclusione che la teoria effettiva che descrive l'effetto Hall quantistico è una teoria di gauge, con azione  $S[a]$ . Per determinare la forma esplicita di  $S$  consideriamo le simmetrie in gioco: a causa della presenza del campo magnetico, il sistema è dispari sia sotto trasformazioni di parità  $\mathcal{P}$  che di inversione temporale  $\mathcal{T}$ . In  $(2+1)$  dimensioni esiste un'azione di gauge con queste caratteristiche, che contiene una sola derivata, detta di Chern-Simons:

$$S_{CS}[a] = -\frac{k}{4\pi} \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu a_\rho. \quad (2.4)$$

Il numero  $k$  è il *livello* della teoria: vedremo nella sezione 2.1.1 che deve essere intero dispari per descrivere l'effetto Hall quantistico.

L'azione completa contiene anche l'accoppiamento della materia col campo elettromagnetico di background, ed è data da:

$$\begin{aligned} S[a, A] &= S_{CS}[a] - \int d^3x j_\mu A^\mu \\ &= -\frac{k}{4\pi} \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu a_\rho + \frac{e}{2\pi} \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu a_\rho. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ora vogliamo verificare che l'azione (2.5) descriva le proprietà di risposta ad un campo elettromagnetico esterno dell'effetto Hall quantistico. Il campo  $a_\mu$  compare quadraticamente nell'azione (2.5) e quindi può essere integrato in modo esatto, ottenendo:

$$S_{ind}[A] = \frac{e^2}{4\pi k} \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho. \quad (2.6)$$

$S_{ind}[A]$  è l'azione indotta in presenza del campo elettromagnetico. La corrente indotta dal cambiamento del campo esterno è data dalla derivata

dell'azione:

$$J^\mu = -\frac{\delta S_{ind}[A]}{\delta A_\mu} = \frac{e^2}{2\pi k} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho = \begin{cases} j^i = -\frac{e^2}{2\pi k} \varepsilon^{ij} E^j, \\ j^0 = \rho = -\frac{e^2}{2\pi k} B. \end{cases} \quad (2.7)$$

Queste espressioni riproducono correttamente la corrente Hall ed la densità di carica di bulk della goccia incomprimibile con  $\nu = 1/k$ . Il campo  $A_\mu$  contiene sia il contributo del campo magnetico costante che genera l'effetto Hall quantistico, che quello delle fluttuazioni usate per calcolare la risposta del sistema.

Abbiamo quindi verificato che l'azione di Chern-Simons (2.4) riproduce alcune proprietà fondamentali del problema. Si noti che l'usuale termine di Maxwell  $(1/4e^2) \int d^3x F_{\mu\nu}^2$  contiene due derivate ed è quindi meno rilevante del termine di Chern-Simons; può essere quindi trascurato nel limite di bassa energia.

### 2.1.1 Eccitazioni di Bulk

La teoria di Chern-Simons (2.5) è una teoria di gauge topologica, che non descrive fotoni propaganti in  $2 + 1$  dimensioni. Infatti le equazioni del moto sono del primo ordine e l'Hamiltoniana è nulla. Questa descrizione è adatta per il fluido Hall incomprimibile ad energie minori del gap. Tuttavia alcune caratteristiche delle eccitazioni di bulk possono essere descritte dalla (2.5), considerando le quasibuche come "particelle di prova", cioè come sorgenti puntiformi per il campo  $a_\mu$ .

Indichiamo con  $\mathcal{J}^\mu$  le worldline di queste particelle, e schematizziamo l'accoppiamento col campo  $a_\mu$  aggiungendo all'azione (2.5) il termine  $\mathcal{J}^\mu a_\mu$ :

$$S = -\frac{k}{4\pi} \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu a_\rho + \frac{e}{2\pi} \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu a_\rho + \int \mathcal{J}^\mu a_\mu. \quad (2.8)$$

Integrando il campo  $a$ , otteniamo l'azione indotta per il campo elettromagnetico e le quasibuche:

$$S_{ind}[A, \mathcal{J}] = \int d^3x \left( \frac{e^2}{4\pi k} \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho - \frac{e}{k} A_\mu \mathcal{J}^\mu - \frac{1}{4k} \mathcal{J}_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho} \frac{(x-y)_\nu}{|x-y|^3} \mathcal{J}_\rho \right). \quad (2.9)$$

Rispetto all'azione indotta (2.6), ci sono due termini in più: il primo è l'accoppiamento fra le eccitazioni ed il campo elettromagnetico, mentre il terzo è un termine di interazione effettiva fra le quasibuche.

Consideriamo una sorgente statica,  $\mathcal{J}^0 = p\delta^{(2)}(\mathbf{x})$ ,  $\mathcal{J}^i = 0$  dove  $p$  è la carica della quasibuca rispetto al campo  $a_\mu$ . Calcolando la densità di carica dalla (2.9) otteniamo:

$$\rho = -\frac{e^2 B}{2\pi k} - \frac{ep}{k} p\delta^2(\mathbf{x}). \quad (2.10)$$

Segue che la quasiparticella ha carica elettrica pari a:

$$Q = -\frac{ep}{k}. \quad (2.11)$$

Torniamo adesso l'azione (2.8) con  $A_\mu = 0$ . L'equazione di moto di  $a_\mu$ , tenendo conto che  $\mathcal{J}$  ha solo la componente 0 non nulla, è:

$$\mathcal{J}^0 = -\frac{k}{2\pi}\varepsilon^{0ij}\partial_i a_j \rightarrow -\varepsilon^{0ij}\partial_i a_j = 2\pi\frac{p}{k}\delta^2(\mathbf{x}). \quad (2.12)$$

Risulta quindi che alla sorgente è associato un flusso di “campo magnetico” di  $a_\mu$  pari a  $2\pi p/k$ . Quindi, se consideriamo l'ampiezza del processo in cui una carica  $p_1$  viene trasportata attorno ad una carica  $p_2$ , questa acquista una fase di Aharonov-Bohm  $\Phi$  non banale:

$$\Phi = p_1 \frac{2\pi p_2}{k}. \quad (2.13)$$

Osserviamo innanzitutto che eccitazioni con  $p = k$  corrispondono a particelle con cariche  $Q = -e$ , ovvero sono elettroni. La fase relativa allo scambio di due di queste eccitazioni è la metà di  $\Phi$ ,  $\Delta\theta = \Phi/2 = \pi k$ . Se immaginiamo che questa fase sia realizzata dalla funzione d'onda, otteniamo che la statistica fermionica è ottenuta per  $k$  dispari. Se ora trasportiamo quest'elettrone attorno ad un'eccitazione di carica  $p$ , questo acquista una fase  $\Phi = 2\pi p$ : poiché la funzione d'onda elettronica deve essere ad un sol valore,  $p \in \mathbb{Z}$ , cioè le quasiparticelle hanno carica intera rispetto ad  $a_\mu$ . Otteniamo quindi che le eccitazioni più piccole con  $p = 1$  hanno carica elettrica  $Q = -e/k$  e statistica frazionaria  $\Delta\theta = \pi/k$  in accordo con la teoria di Laughlin. Eccitazioni con tali caratteristiche sono chiamate *anioni* in letteratura [28], la cui statistica interpola fra bosoni ( $\Delta\theta = 0$ ) e fermioni ( $\Delta\theta = \pi$ ).

## 2.1.2 Quantizzazione canonica della teoria di Chern-Simons

Il ground state dell'effetto Hall quantistico è descritto dalla sola teoria di Chern-Simons: in questa sottosezione vediamo come dalla quantizzazione canonica derivi la degenerazione dello stato fondamentale nella geometria del toro.

La teoria di Chern-Simons non dipende dalla metrica della varietà di supporto dei campi. La scrittura dell'azione (2.4) nel linguaggio delle forme differenziali, con  $a = a_\mu dx^\mu$ :

$$S = -\frac{k}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} ada, \quad (2.14)$$

rende manifesta l'indipendenza dalla metrica. Una conseguenza importante è che il tensore energia-impulso della teoria si annulla,  $\delta S/\delta g^{\mu\nu} = T_{\mu\nu} = 0$  e quindi l'Hamiltoniana  $H = 0$ . Tuttavia, come vedremo, la teoria descrive gradi di libertà non locali, sensibili alla topologia della varietà spaziale di supporto.

Consideriamo ad esempio il toro  $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ . I suoi due cicli non banali sono parametrizzati dalle coordinate  $x_1 \in [0, 2\pi R_1]$  e  $x_2 \in [0, 2\pi R_2]$ . Nel *gauge statico*,  $a_0 = 0$ , l'azione di Chern-Simons (2.4) diventa:

$$S_{CS} = -\frac{k}{4\pi} \int_{\gamma_1 \times \gamma_2 \times \mathbb{R}} d^3x \varepsilon^{i0j} a_i \partial_0 a_j. \quad (2.15)$$

L'equazione di moto per  $a_0$ ,  $f_{ij} = 0$ , diventa un vincolo che può essere soddisfatto ponendo  $a_1 = a_1(x_1, t)$  e  $a_2 = a_2(x_2, t)$ . Definiamo le variabili:

$$\bar{a}_1(t) = \oint_{\gamma_1} dx_1 a_1(x_1, t), \quad \bar{a}_2(t) = \oint_{\gamma_2} dx_2 a_2(x_2, t). \quad (2.16)$$

In termini di queste l'azione (2.15) diventa:

$$S_{CS} = \frac{k}{4\pi} \int dt \varepsilon^{ij} \bar{a}_i \dot{\bar{a}}_j. \quad (2.17)$$

Abbiamo ottenuto l'azione con “coordinata”  $\bar{a}_1(t)$  ed “impulso”  $\bar{a}_2(t)$  di un problema di meccanica quantistica: poichè la teoria di Chern-Simons è topologica, questa si riduce alla sola forma simplettica. Possiamo leggere l'impulso coniugato ad  $\bar{a}_i$  direttamente dalla (2.17), ed imporre le relazioni di commutazione canoniche:

$$\Pi^j = \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{ji} \bar{a}_i, \quad [\bar{a}_j, \Pi^k] = i\delta_j^k. \quad (2.18)$$

Otteniamo quindi la seguente algebra:

$$[\bar{a}_1, \bar{a}_2] = i\frac{2\pi}{k}. \quad (2.19)$$

Gli osservabili invarianti di gauge di questa teoria sono i *loop di Wilson*:

$$W_i = \exp\left(i \oint_{\gamma_i} a\right) = e^{i\bar{a}_i}, \quad (2.20)$$

valutati lungo i due cicli  $\gamma_i$  del toro. Usando la formula di Baker-Campbell ed il commutatore (2.19), otteniamo l'algebra soddisfatta dai loop di Wilson:

$$W_1 W_2 = W_2 W_1 \exp\left(-\frac{2\pi i}{k}\right). \quad (2.21)$$

Com'è ben noto, la rappresentazione con dimensione minima di quest'algebra si ottiene con matrici di dimensione  $k$  [16], che quindi è anche la dimensione dello spazio di Hilbert della teoria di Chern-Simons nella geometria del toro. Abbiamo dunque che lo stato fondamentale dell'effetto Hall quantistico è  $k$  volte degenere sul toro. Nel caso della geometria della sfera non esistono loop topologicamente non banali, e quindi la degenerazione è assente. In generale, si dimostra che la degenerazione è uguale a  $k^g$  per una superficie compatta di genus  $g$ . Questa degenerazione non dipende da una simmetria dell'Hamiltoniana, che è nulla, ma deriva dalle proprietà topologiche non banali del sistema fisico considerato. Per questo motivo è stata chiamata da Wen *ordine topologico* [27]. Notiamo che la stessa degenerazione è ottenuta nelle costruzioni esplicite delle funzioni d'onda di Laughlin in queste geometrie [29].

### 2.1.3 Corrispondenza bulk boundary

Nelle precedenti sezioni abbiamo visto che la teoria di Chern-Simons descrive la fisica di bassa energia del bulk del campione. Nel caso di una varietà con bordo sappiamo però che sono presenti dei gradi di libertà gapless chirali al bordo: vediamo come questi possono essere descritti dalla teoria topologica, aggiungendo all'azione (2.4) un termine di bordo.

Consideriamo l'effetto Hall quantistico su un disco  $D$  di raggio  $R$ . La varietà spaziotemporale su cui è definita la teoria è  $\mathcal{M} = D \times \mathbb{R}$ , con bordo  $\partial\mathcal{M} = S^1 \times \mathbb{R}$ ; nel seguito indicheremo con  $t$ ,  $x = R\theta$ ,  $r$ , rispettivamente, la coordinata temporale, la coordinata che corre lungo il bordo, e quella radiale. Quando la teoria di Chern-Simons è definita su una varietà con bordo, è necessario imporre opportune condizioni al contorno. In particolare, l'azione non è più invariante per trasformazioni di gauge del campo  $a$ :

$$a_\mu \rightarrow a_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad S_{CS} \rightarrow S_{CS} - \frac{k}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} dt dx \Lambda (\partial_t a_x - \partial_x a_t). \quad (2.22)$$

Vogliamo mantenere l'invarianza di gauge della teoria: per far ciò, potremmo restringere le trasformazioni di gauge permesse a quelle che si annullano sul bordo,  $\Lambda(t, r = R, \theta) = 0$ . D'altra parte, sappiamo che esistono dei gradi di libertà dinamici al bordo che sono carichi e quindi vogliamo preservare

l'invarianza di gauge al bordo. É quindi necessario introdurre dei termini aggiuntivi all'azione che possano compensare il termine (2.22).

Per capire come fare, analizziamo la teoria di bulk nel gauge statico  $a_0 = 0$ . Notiamo anche che l'equazione di moto per  $a_0$  diventa il vincolo  $\partial_i a_j - \partial_j a_i = f_{ij} = 0$ , che può essere soddisfatto ponendo  $a_i = \partial_i \varphi$ . Con questa posizione, l'azione (2.4) diventa un termine di bordo:

$$\begin{aligned} S_{CS} &= -\frac{k}{4\pi} \int_{D \times \mathbb{R}} d^3x \varepsilon^{itj} \partial_i \varphi \partial_t \partial_j \varphi \\ &= -\frac{k}{4\pi} \int_{S^1 \times \mathbb{R}} dt dx \partial_t \varphi \partial_x \varphi. \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto un'azione costituita dalla sola forma simplettica, con impulso  $\Pi$ :

$$\Pi = -\frac{k}{4\pi} (\partial_x \varphi), \quad (2.23)$$

corrispondente ad un'Hamiltoniana nulla, come ci aspettiamo da una teoria topologica. Sappiamo però che il bordo è popolato da eccitazioni relativistiche chirali: l'Hamiltoniana più semplice che possiamo aggiungere per descriverle è:

$$H = \frac{k}{4\pi} v (\partial_x \varphi)^2. \quad (2.24)$$

In questo modo l'azione complessiva di bordo è:

$$S_{bordo}[\varphi] = -\frac{k}{4\pi} \int_{S^1 \times \mathbb{R}} dt dx [\partial_t \varphi \partial_x \varphi + v (\partial_x \varphi)^2]. \quad (2.25)$$

Questa teoria è detta *bosone chirale* ed è stata analizzata per la prima volta da Floreanini e Jackiw [30].

Veniamo ora al problema dell'invarianza di gauge: per ricavare l'azione (2.25) abbiamo ristretto lo spazio delle trasformazioni di gauge ammesse. Ora che abbiamo la dinamica di bordo, possiamo introdurre la seguente trasformazione di gauge per il campo  $\varphi$ :  $\varphi \rightarrow \varphi + \Lambda/2$ : il termine derivante dalla variazione di (2.25) compensa esattamente il termine (2.22), tenuto conto della condizione al contorno  $a_0 = 0$  e della definizione di  $\varphi$ . In questo senso, né il bulk né il bordo sono invarianti di gauge, ma l'intero sistema lo è.

Il meccanismo descritto in questo paragrafo può essere riassunto dicendo che i gradi di libertà di gauge della teoria topologica di bulk diventano fisici e dinamici al bordo. Questo fenomeno va sotto il nome di *corrispondenza bulk-bordo*. Tutti i ragionamenti fatti in questa sezione supponevano eccitazioni chirali: per trattare eccitazioni antichirali, basta cambiare il segno alla velocità  $v$  ed all'azione (2.25).

## 2.2 Teoria del bosone chirale

In questa sezione affrontiamo la quantizzazione canonica del del bosone chirale (2.25): in accordo con quanto detto in sezione 1.3.1, l'intera fisica del bulk, eccitazioni frazionarie comprese, può essere descritta nella teoria di bordo. Innanzitutto riscaliamo sia  $x$  che  $t$ :  $x \rightarrow R\theta$ ,  $t \rightarrow Rt$ , dove  $R$  è il raggio del disco. In queste variabili, l'equazione di moto dell'azione (2.25) è la seguente:

$$(\partial_t + v\partial_\theta)\partial_\theta\varphi = 0. \quad (2.26)$$

Questa equazione viene corredata dalla condizione al contorno:

$$\varphi(2\pi, t) = \varphi(0, t) - 2\pi\alpha_0, \quad (2.27)$$

dipendente dalla costante  $\alpha_0$  che vedremo ha un importante significato fisico. Da questa condizione, segue che per  $\alpha_0 \neq 0$ ,  $\varphi$  non è periodico. Imponiamo quindi che  $\varphi$  sia compattificato su un cerchio di raggio  $r$ :

$$\varphi \sim \varphi + 2\pi r. \quad (2.28)$$

In altre parole, il campo scalare compattificato descrive una mappa topologicamente non banale dal cerchio  $x \in [0, 2\pi R]$  al cerchio  $\varphi \in [0, 2\pi r]$ . La soluzione delle equazioni di moto (2.26) è:

$$\varphi(\theta, t) = \varphi_0 - \alpha_0(\theta - vt) + i \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n} e^{in(\theta - vt)} + g(t). \quad (2.29)$$

La funzione  $g(t)$  non può essere fissata dalle equazioni di moto, ed è una traccia dell'invarianza di gauge dell'azione (2.25) sotto trasformazioni del tipo  $\varphi \rightarrow \varphi + g(t)$ . Per eliminarla fissiamo il gauge di  $\varphi$  imponendo la seguente condizione:

$$(\partial_t + v\partial_x)\varphi = 0 \rightarrow g(t) = 0. \quad (2.30)$$

Per effettuare la quantizzazione canonica, dobbiamo capire quali sono le regole di commutazione da imporre fra il campo  $\varphi$  e l'impulso (2.23): la differenza principale con l'usuale teoria del bosone libero, è che qui l'azione è al prim'ordine nelle derivate temporali.

Le seguenti condizioni di commutazione:

$$[\varphi(\theta, t), \Pi(\theta', t)] = \frac{i}{2}\delta(\theta - \theta') \rightarrow [\varphi(\theta, t), \varphi(\theta', t)] = \frac{i\pi}{k}\text{sign}(\theta - \theta'), \quad (2.31)$$

sono appropriate perché si verifica che le equazioni di Heisenberg riproducono le equazioni del moto classiche (2.26) [30].

Sostituendo lo sviluppo del campo (2.29) in queste regole di commutazione, troviamo l'algebra dei modi  $\alpha_n$  e  $\phi_0$  del campo. I commutatori non banali sono:

$$[\phi_0, \alpha_0] = \frac{i}{k}, \quad [\alpha_n, \alpha_m] = \frac{n}{k} \delta_{n+m,0}. \quad (2.32)$$

Osserviamo che i modi  $\alpha_n$  con  $n$  negativo e positivo giocano il ruolo, rispettivamente, di operatori di creazione e distruzione. Dunque è naturale definire lo stato di vuoto  $|\Omega\rangle$  dello spazio di Fock del sistema come:

$$\alpha_n |\Omega\rangle = 0 \quad n > 0. \quad (2.33)$$

Definiamo adesso i momenti di Fourier della densità di Hamiltoniana ( $t = 0$ ):

$$L_n = -\frac{k}{4\pi} \int_0^{2\pi R} d\theta (\partial_\theta \varphi)^2 e^{-in\theta} = \frac{k}{2} \sum_{m \neq \mathbb{Z}} \alpha_{n-m} \alpha_m, \quad n \neq 0, \quad (2.34)$$

$$L_0 = -\frac{k}{4\pi} \int_0^{2\pi R} d\theta (\partial_\theta \varphi)^2 = \frac{k}{2} \alpha_0^2 + k \sum_{n>0} \alpha_{-n} \alpha_n. \quad (2.35)$$

Nell'espressione (2.34) abbiamo introdotto l'ordinamento normale rispetto al vuoto (2.33) seguendo la trattazione standard delle teorie conformi [di fra], corrispondente a  $L_0 |\Omega\rangle = 0$ . L'Hamiltoniana è proporzionale a  $L_0$ :

$$H = \frac{kv}{4\pi} \int d\theta (\partial_\theta \varphi) = \frac{v}{R} \left( L_0 - \frac{1}{24} \right), \quad (2.36)$$

dove il termine costante è l'effetto Casimir della geometria spaziotemporale del cilindro [31] corrispondente al bordo della goccia di fluido elettronico. Utilizzando le regole di commutazione (2.32), si può dimostrare [6] che i modi  $L_n$  soddisfano l'algebra di Virasoro [31]

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{1}{12}n(n^2 - 1)\delta_{n+m,0}. \quad (2.37)$$

Quindi la teoria del bosone chirale è una teoria conforme con carica centrale  $c = 1$ . L'algebra di Virasoro unita alle regole di commutazione con i modi  $\alpha_n$  definisce l'algebra di Kac-Moody (algebra affine) del gruppo  $U(1)$  [31]

$$[\alpha_n, \alpha_m] = \frac{n}{k} \delta_{n+m,0}, \quad [L_n, \alpha_m] = -m\alpha_{n+m}. \quad (2.38)$$

In conclusione la teoria del bosone chirale è una teoria conforme estesa da una simmetria  $U(1)$ . Osserviamo che dalla seconda relazione in (2.38) e dalla

(2.36), segue che gli oscillatori  $\alpha_{-n}$  con  $n > 0$  creano  $n$  eccitazioni di bordo neutre, poiché dalla prima delle (2.38) segue che  $[\alpha_0, \alpha_n] = 0$ .

Passiamo adesso ad analizzare i modi zero di  $\varphi$ , cioè  $\alpha_0$  e  $\varphi_0$  che sono canonicamente coniugati secondo l'algebra (2.32): la “funzione d'onda” della “coordinata”  $\varphi_0$  è data da:

$$\Psi(\varphi_0) \propto e^{ik\alpha_0\varphi_0}. \quad (2.39)$$

A causa della compattificazione di  $\varphi$ ,  $\varphi_0$  è una variabile angolare: la richiesta di periodicità per la funzione d'onda  $\Psi(\varphi_0)$  quando  $\varphi_0 \rightarrow \varphi_0 + 2\pi r$  impone la seguente quantizzazione di  $\alpha_0$ :

$$\Psi(\varphi_0) = \Psi(\varphi_0 + 2\pi r) \rightarrow \alpha_0 = \frac{m}{kr}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (2.40)$$

Abbiamo quindi due periodicità per il campo scalare: quella data da  $\alpha_0$  per  $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ , e quella data dalla compattificazione:

$$\varphi(2\pi, t) = \varphi(0, t) + 2\pi r n - 2\pi \frac{m}{kr} = \varphi(0, t) + 2\pi r \left( n - \frac{m}{kr^2} \right), \quad n, m \in \mathbb{Z} \quad (2.41)$$

Queste due periodicità devono essere commensurabili, quindi,  $kr^2$  deve assumere valori razionali  $kr^2 = p/q$ , con  $p$  e  $q$  interi coprimi.

La carica totale nel bulk è data dall'integrale della densità di carica (2.2), ed è legata alla teoria di bordo dalla definizione di  $\varphi$  (poniamo per comodità  $e = 1$ ):

$$Q = \int_D d^2x j^0 = \frac{-1}{2\pi} \int_{S^1} d\theta a_\theta = \frac{-1}{2\pi} (\varphi(2\pi) - \varphi(0)) = \alpha_0. \quad (2.42)$$

La costante  $\alpha_0$  rappresenta quindi la carica delle eccitazioni di bulk, e dalla consistenza con l'espressione (2.11) otteniamo  $r = 1$  e  $k$  intero.

La quantizzazione del modo  $\alpha_0$  (2.40) implica che esistono eccitazioni con carica frazionaria  $Q = \alpha_0 = m/k$ . Esse corrispondono a stati  $|\alpha_0\rangle$  dell'algebra delle correnti che soddisfano:

$$\begin{cases} \alpha_n |\alpha_0\rangle = 0 & n > 0, \\ L_n |\alpha_0\rangle = 0 & n > 0, \\ \alpha_0 |\alpha_0\rangle = \alpha_0 |\alpha_0\rangle, \\ L_0 |\alpha_0\rangle = \frac{k}{2} \alpha_0^2 |\alpha_0\rangle = \frac{n^2}{2k} |\alpha_0\rangle \equiv h_n |\alpha_0\rangle. \end{cases} \quad (2.43)$$

Nel linguaggio delle teorie di campo conformi, un tale stato è detto *primario*, e  $h_n$  è la sua *dimensione conforme*. Questo stato è creato dai cosiddetti *operatori di vertice* [31]

$$V_m(z) =: \exp\left(i\frac{m}{k}\varphi(z)\right) :, \quad z = e^{i\theta+v\tau}, \tau = it. \quad (2.44)$$

Questi operatori creano quindi un'eccitazione carica al bordo: per l'incompressibilità della goccia Hall quantistica queste eccitazioni devono riprodurre la statistica frazionaria del bulk, come spiegato in sezione 1.3.1. Consideriamo il correlatore di due operatori di vertice:

$$\langle V_m(z_1)V_{-m}(z_2) \rangle = (z_1 - z_2)^{-\frac{m^2}{k}}. \quad (2.45)$$

In seguito allo scambio dei due anioni,  $(z_1 - z_2) \rightarrow e^{i\pi}(z_1 - z_2)$ , il correlatore acquista una fase  $e^{-im^2/k}$ , che riproduce la statistica frazionaria.

Manca solo da mostrare che  $k$  è dispari: come nel caso del bulk, dobbiamo imporre che fra le eccitazioni cariche siano presenti anche gli elettroni. Dalla forma del correlatore (2.45) è chiaro che questo è possibile con  $m = k$  per  $k$  dispari. Una tale eccitazione ha infatti statistica fermionica, e carica  $\alpha_0 = 1$  (cioè  $Q = -e$ ).

### 2.2.1 Bosonizzazione

Nella sezione precedente abbiamo descritto le eccitazioni di bordo chirali dell'effetto Hall quantistico in termini della teoria bosonica (2.25): questa modella l'effetto Hall quantistico intero per  $k = 1$  e quello frazionario per  $k = 3, 5, \dots$ . Nel caso dell'effetto Hall intero, è possibile derivare la teoria di campo fermionica delle eccitazioni di bordo grazie alla conoscenza della fisica microscopica del problema (i livelli di Landau) [6]. Si dimostra così che queste sono descritte da fermioni chirali (di Weyl) liberi. Abbiamo quindi due descrizioni diverse del sistema, una fermionica ed una bosonica, che devono essere equivalenti. Fortunatamente in  $(1 + 1)$  dimensioni esiste una mappa esatta che lega fermioni e bosoni, nota in letteratura come *bosonizzazione* [31] l'effetto Hall quantistico intero è una dimostrazione fisica dell'esistenza di tale legame. Nella pittura bosonica con  $k = 1$ , le eccitazioni di bordo con carica  $Q = \pm e$  sono create dagli operatori di vertice (2.44) con  $m = \pm 1$ : il loro correlatore, calcolato nella formula (2.45), dimostra che queste eccitazioni hanno effettivamente una statistica fermionica. Segue che l'espressione del fermione di Weyl  $\psi$  in termini del bosone chirale è:

$$\psi = V_{+1}(z) =: e^{-i\varphi(z)} : , \quad \bar{\psi} = V_{-1}(z) =: e^{i\varphi(z)} : . \quad (2.46)$$

In conclusione, la teoria bosonica con  $k = 1$  è totalmente equivalente alla teoria del fermione di Weyl libero. I fermioni interagenti con  $k \neq 1$  possono invece essere descritti solo attraverso la teoria bosonica: la bosonizzazione, quindi, oltre ad essere interessante da un punto di vista teorico, è estremamente importante anche da un punto di vista pratico, per descrivere esattamente la fisica degli anioni di Laughlin.

## 2.2.2 Anomaly Inflow ed esattezza della conduttività Hall quantistica

Abbiamo visto nel Capitolo 1 che sul bordo del disco, sono presenti delle eccitazioni chirali sottoforma di onde di densità  $n(\mathbf{x})$ , la cui espressione, al netto di un fattore moltiplicativo convenzionale è:

$$n(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \partial_x \varphi, \quad \rho(\mathbf{x}) = -en = -\frac{e}{2\pi} \partial_x \varphi. \quad (2.47)$$

Quindi l'accoppiamento del bosone chirale con un campo elettromagnetico esterno è dato da:

$$S_{em} = - \int_{S^1 \times \mathbb{R}} dt dx [\rho A_t - v \rho A^x], \quad (2.48)$$

$$= \frac{e}{2\pi} \int_{S^1 \times \mathbb{R}} dt dx [A_t \partial_x \varphi - v A^x \partial_x \varphi], \quad (2.49)$$

$$= \frac{e}{2\pi} \int_{S^1 \times \mathbb{R}} dt dx [A_t \partial_x \varphi + A^x \partial_t \varphi]. \quad (2.50)$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato la condizione di gauge (2.30). Questo termine modifica le equazioni del moto (2.26) nel modo seguente:

$$(\partial_t + v \partial_x) \partial_x \varphi = -\frac{e}{2\pi} (\partial_x A_t + \partial_t A^x) = \frac{e}{2\pi k} E, \quad (2.51)$$

dove  $E$  è un campo elettrico longitudinale applicato al sistema. Questa espressione implica che la carica totale del sistema  $Q = \int dx \rho$  non è conservata in presenza del campo  $E$ . Questo effetto è dovuto all'anomalia chirale in  $(1+1)$  dimensioni.

Consideriamo ora la geometria di un anello, con raggio interno  $R_L$  e raggio esterno  $R_R$ : come discusso nella sezione 1.3.1 sul bordo interno le eccitazioni sono antichirali, come riportato in figura (2.1). Le equazioni di moto sui due bordi sono rispettivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_t + v \partial_x) \partial_x \varphi = -\frac{e}{2\pi} (\partial_x A_t + \partial_t A^x) = \frac{e}{2\pi k} E_L, \\ (\partial_t - v \partial_x) \partial_x \varphi = \frac{e}{2\pi} (\partial_x A_t + \partial_t A^x) = -\frac{e}{2\pi k} E_R. \end{array} \right. \quad (2.52)$$

Dove  $E_{R,L}$  sono i campi elettrici sui due bordi. Entrambe le equazioni (2.52) sono in realtà equazioni di continuità con un termine di sorgente e pozzo,

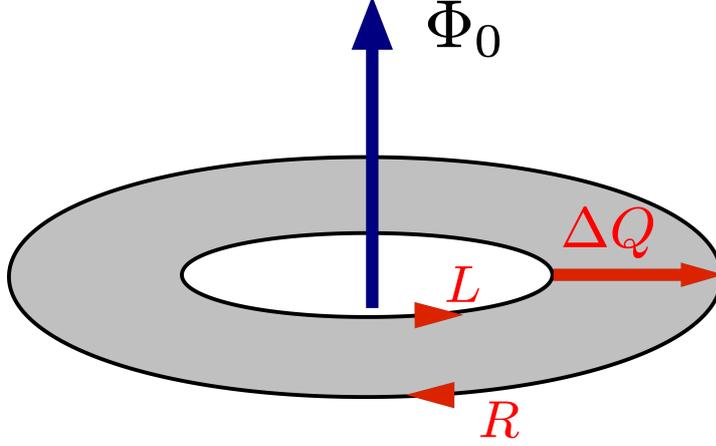


Figura 2.1: In figura è rappresentato l'effetto Hall quantistico nella geometria dell'anello, con le eccitazioni di chiralità opposta ai due bordi. È inoltre rappresentata l'inserzione adiabatica di un quanto flusso, ed il conseguente trasferimento di carica da un bordo all'altro. La figura è tratta da [5]

rispettivamente. Questo vuol dire che la carica è conservata nel sistema complessivo, poiché fluisce da un bordo all'altro. La corrente che si instaura nel bulk,  $J = -e^2 E / (2\pi k)$  è la corrente Hall prodotta dal campo elettrico lungo la coordinata angolare. Questo meccanismo per cui un'anomalia di bordo è compensata da una corrente di bulk è detto *anomaly inflow*. Vediamo ora un argomento che dimostra l'esattezza della conduttività Hall. L'argomento, inizialmente formulato da Laughlin [32], è qui riformulato nel linguaggio della teoria di campo di bordo [6]. Aggiungiamo un flusso  $\Phi(t)$  di campo magnetico al centro dell'anello (figura (2.1)) orientato lungo l'asse  $\mathbf{z}$ :

$$\mathbf{B} = 2\pi\Phi(t)\delta^2(\mathbf{x})\hat{\mathbf{z}}, \quad \Phi(0) = 0, \quad \Phi(T) = \Phi_0, \quad (2.53)$$

dove  $\Phi(t)$  varia adiabaticamente da zero ad un quanto di flusso in un intervallo di tempo  $T$ . Questo campo magnetico è originato da un potenziale elettromagnetico longitudinale che dà a sua volta origine ad un campo elettrico:

$$A^x(t, r) = \frac{\Phi(t)}{r}, \quad E = -\dot{A}^x = -\frac{\dot{\Phi}}{r}. \quad (2.54)$$

Consideriamo l'equazione (2.52) relativa al bordo esterno ed integriamo ambo i membri per ottenere la quantità di carica trasportata da un bordo all'altro

dall'inserzione del flusso:

$$\Delta Q = \int_0^T dt \int_0^{2\pi R_R} dx ((\partial_t + v\partial_x)\rho) = \int_0^T dt \int_0^{2\pi R_R} dx \frac{-e^2 E_R}{4\pi^2 k} = -e/k. \quad (2.55)$$

L'effetto netto dell'aggiunta di un quanto di flusso  $\Phi_0$  è quindi il trasferimento di una carica dal bordo interno a quello esterno pari alla filling fraction  $\nu$ . Osserviamo ora che, essendo l'inserzione del flusso eliminabile con una trasformazione di gauge, l'Hamiltoniana è in realtà periodica per  $t = T$  e quindi la varietà bidimensionale su cui integriamo il campo elettrico è in realtà un toro:

$$\Delta Q = \frac{-e^2}{4\pi^2 k^2} \int_{\mathbb{T}} d^2x E_R = \frac{-e}{2\pi k} \int_{\mathbb{T}} d^2x F = -e/k. \quad (2.56)$$

Nella seconda uguaglianza abbiamo riassorbito  $\Phi_0$  nel campo elettrico, in modo tale da far comparire l'integrale dell'*anomalia chirale* espresso della prima classe di Chern:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} d^2x F = n \in \mathbb{Z}. \quad (2.57)$$

Questa quantità invariante topologica non varia per deformazioni continue del campo elettromagnetico, o della metrica. Essendo la conduttività Hall quantistica proporzionale alla prima classe di Chern, quest'argomento giustifica teoricamente la precisione dei risultati sperimentali, che sono quindi indipendenti da fluttuazioni, impurezze del materiale e da correzioni di ordine superiore [33].

In conclusione, la quantizzazione dell'anomalia (2.57) riproduce, nel contesto della teoria di campo effettiva, il risultato ottenuto dall'analisi della fase di Berry del sistema microscopico fermionico (1.4). Si noti che l'analisi della teoria di campo dimostra l'esattezza della corrente Hall anche nel caso interagente,  $k \neq 1$ , sotto l'ipotesi che la fisica di bassa energia sia quella del fluido incompressibile.

## 2.3 Funzione di partizione dell'effetto Hall quantistico

Calcoliamo ora la funzione di partizione dell'effetto Hall quantistico nella geometria dell'anello con raggio interno con  $R_L$  ed esterno  $R_R$ , nel limite termodinamico  $R_R, R_L \rightarrow \infty$ , con  $R_R/R_L = 1$ . Se vogliamo considerare gli effetti di temperatura  $T$  finita, dobbiamo compattificare il tempo euclideo

in un cerchio  $S_\beta$  di raggio  $\beta = 1/T$ : questo fa sì che i due bordi dell'anello diventino due tori  $\mathbb{T}_{R,L} = S_{R,L}^1 \times S_\beta$ , dove  $S_{R,L}$  indica il cerchio spaziale che costituisce il bordo esterno e interno. Per proseguire è necessario un piccolo excursus sulla rappresentazione del toro sul piano complesso.

### 2.3.1 Il toro e l'invarianza modulare

La caratteristica fondamentale del toro  $\mathbb{T}$  è la periodicità lungo due cicli distinti. Questa doppia periodicità può essere rappresentata sul piano complesso mediante il quoziente  $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Lambda$  rispetto al reticolo bidimensionale  $\Lambda$ , generato da due vettori primitivi  $\omega_1, \omega_2$ . Grazie all'invarianza per rotazioni e dilatazioni della teoria, possiamo sempre ricondurre due vettori primitivi  $\omega_1$  e  $\omega_2$  nella forma:

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = \operatorname{Re}(\tau) + i\operatorname{Im}(\tau), \quad \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (2.58)$$

Dunque il toro è caratterizzato unicamente dal parametro  $\tau$ , detto *parametro modulare*. In realtà questa definizione non è unica, infatti altri due vettori  $\tilde{\omega}_1$  e  $\tilde{\omega}_2$  combinazioni lineari dei primi realizzano lo stesso reticolo  $\Lambda$ :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\omega}_2 \\ \tilde{\omega}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1. \quad (2.59)$$

Le matrici in (2.59) formano il *gruppo modulare*  $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$ .<sup>1</sup> L'azione del gruppo su  $\tau$  e su un generico punto  $z$  del toro è la seguente [31]

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad z' = \frac{z}{c\tau + d}. \quad (2.60)$$

È noto che il gruppo modulare  $\Gamma$  è generato da due trasformazioni:

$$S : \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}, \quad T : \tau \rightarrow \tau + 1, \quad (2.61)$$

che soddisfano le relazioni  $S^2 = (ST)^3 = C$ , con  $C = \pm 1$ . Questo gruppo discreto descrive quindi l'invarianza per cambi di coordinate che preservano la periodicità del toro. Le quantità fisiche non devono dipendere dalle coordinate scelte per descrivere il toro: ad esempio, la funzione di partizione deve essere invariante sotto il gruppo modulare.

---

<sup>1</sup>Il quoziente col gruppo  $\mathbb{Z}_2$  serve ad eliminare le matrici che differiscono per un segno globale e che descrivono la stessa trasformazione.

### 2.3.2 Calcolo della funzione di partizione

La quantizzazione della teoria del bosone compattificato è stata ottenuta nei precedenti paragrafi con condizioni periodiche spaziali, ovvero nella geometria del cilindro. Per realizzare il toro è necessario identificare gli stati ai tempi  $t = 0$  e  $t = \omega_2 = \beta$ , cioè incollare le due basi del cilindro, mediante la traccia,  $Z \propto \text{Tr}[e^{-\beta H}]$ . Nella geometria dell'anello dobbiamo considerare due bordi, con eccitazioni chirali e antichirali, rispettivamente. I due tori  $\mathbb{T}_{R,L}$  sono realizzati come reticoli sul piano complesso come spiegato nella sezione precedente, con parametro  $\tau_{R,L}$ , dato da:

$$\tau_{R,L} = \frac{\ell_{R,L}}{2\pi R_{R,L}} + i \frac{\beta v_{R,L}}{2\pi R_{R,L}}. \quad (2.62)$$

Le Hamiltoniane e gli impulsi delle teorie di bordo sono date da:

$$H_{R,L} = \frac{v_{R,L}}{R_{R,L}} \left[ k \frac{\alpha_0}{2} + k \sum_{n>0} \alpha_{-n}^{R,L} \alpha_n^{R,L} - \frac{1}{24} \right], \quad P_{R,L} = \pm \frac{H_{R,L}}{v_{R,L}}. \quad (2.63)$$

Consideriamo la seguente espressione della funzione di partizione [34] [36]:

$$Z = \mathcal{K} \text{Tr} \left[ e^{-\beta(H_L + H_R + V_0(Q_R - Q_L) + i\ell_R P_R + i\ell_L P_L + i\mu(Q_R + Q_L))} \right]. \quad (2.64)$$

Analizziamo i termini aggiuntivi che vi sono presenti. Una differenza di potenziale costante  $V_0$  fra i bordi aggiunge all'Hamiltoniana un termine<sup>2</sup>  $V_0(Q_R - Q_L)$ . Il termine proporzionale a  $\mu$  rappresenta il potenziale chimico. I termini con l'impulso  $P_{L,R}$  necessitano di una spiegazione: i valori reali di  $\tau_{L,R}$  corrispondono a condizioni al contorno temporali che coinvolgono una rotazione relativa delle due basi del cilindro. Dobbiamo quindi includere anche una traslazione spaziale nella definizione di  $Z$ .

Per semplicità, supponiamo che  $v_R/R_R = v_L/R_L = v/R$  e  $\ell_R/R_R = \ell_L/R_L = \ell/R$ , questa scelta non comporta una perdita in generalità, in quanto sia  $v$  che  $R$  sono parametri non universali. In conclusione, la funzione di partizione è data da:

$$Z(\tau, \zeta) = \mathcal{K} \text{Tr} \left[ e^{2\pi i \tau L_{0,R} - 2\pi i \bar{\tau} L_{0,L} + 2\pi \zeta Q_R + 2\pi \bar{\zeta} Q_L} \right]. \quad (2.65)$$

Dove i parametri  $\tau$  e  $\zeta$  sono definiti come:

$$\tau = \frac{\ell}{2\pi R} + i \frac{\beta v}{2\pi R}, \quad \zeta = \frac{\beta \mu}{2\pi} + i \frac{\beta V_0}{2\pi}. \quad (2.66)$$

<sup>2</sup>In questa sezione per semplicità poniamo la carica dell'elettrone uguale a uno, in modo che  $Q = \alpha_0$ .

Fissiamo per ora il valore di  $\alpha_{0,R,L}$ , cioè effettuiamo la traccia solo sugli operatori  $L_0$  e  $\bar{L}_0$ , ottenendo così la funzione di partizione “canonica”<sup>3</sup> (con  $q = e^{2\pi i\tau}$ ,  $w = e^{2\pi i\zeta}$ ):

$$Z(\alpha_{0,L}, \alpha_{0,R}) = \mathcal{K} q^{\frac{k}{2}\alpha_{0,R}^2} w^{\alpha_{0,R}} \bar{q}^{\frac{k}{2}\alpha_{0,L}^2} \bar{w}^{\alpha_{0,L}} \frac{1}{\eta(q)\eta(\bar{q})}. \quad (2.67)$$

La funzione  $\eta$  è chiamata *funzione di Dedekind*, ed è data dal prodotto infinito [31]:

$$\eta(q) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n). \quad (2.68)$$

L’espressione (2.67) corrisponde al carattere della rappresentazione dell’algebra di Virasoro con  $h = (k/2)\alpha_{0R}^2$  per la corrispondente espressione antichirale.

Per ottenere la funzione di gran partizione dobbiamo sommare su tutti i possibile valori di  $\alpha_{0,R,L}$ , dati dallo spettro (2.40) con  $r = 1$ , che è conveniente scrivere nel modo seguente:

$$\alpha_{0,R} = \frac{\lambda}{k} + n, \quad \alpha_{0,L} = \frac{\bar{\lambda}}{k} + \bar{n}, \quad \lambda, \bar{\lambda} \in [0, k-1], \quad n, \bar{n} \in \mathbb{Z}. \quad (2.69)$$

Questa scrittura dello spettro rende esplicita la distinzione fra i  $k$  settori anionici, enumerati da  $\lambda$ , e la possibilità di avere un numero arbitrario di eccitazioni elettroniche in ogni settore. La somma su  $n$  definisce la funzione  $K_\lambda$ :

$$K_\lambda(\tau, \zeta) = \sqrt{\mathcal{K}} \frac{1}{\eta(q)} \sum_n q^{\frac{k}{2}(\frac{\lambda}{k}+n)^2} w^{\frac{\lambda}{k}+n}. \quad (2.70)$$

Il prefattore  $\mathcal{K}$  è dato dall’espressione (non analitica in  $\tau$  e  $\zeta$ ):

$$\mathcal{K} = \exp \left[ -\frac{2\pi}{k} \frac{(Im(\zeta))^2}{Im(\tau)} \right], \quad (2.71)$$

il cui significato sarà chiarito nel seguito.

La funzione di gran partizione è infine espressa in termini delle funzioni  $K_\lambda$ :

$$Z = \sum_{\lambda\bar{\lambda}} \mathcal{N}_{\lambda\bar{\lambda}} K_\lambda(\tau, \zeta) \bar{K}_{\bar{\lambda}}(\bar{\tau}, \bar{\zeta}). \quad (2.72)$$

In questa espressione le quantità  $\mathcal{N}_{\lambda\bar{\lambda}} \in \mathbb{N}$  sono le molteplicità delle eccitazioni di carica frazionaria che troveremo imponendo l’invarianza modulare.

<sup>3</sup>La barra sopra una quantità indica la coniugazione complessa.

### 2.3.3 Condizioni di invarianza modulare

La funzione di partizione (2.72) deve essere invariante per trasformazioni modulari,  $T$  ed  $S$ , come spiegato in sezione 2.3.1.

La trasformazione  $S(\tau \rightarrow -1/\tau)$  consiste nello scambio fra asse temporale e spaziale. Il vincolo sulla funzione di partizione imposto è quindi:

$$S : Z(\tau, \zeta) \rightarrow Z\left(-\frac{1}{\tau}, -\frac{\zeta}{\tau}\right) = Z(\tau, \zeta). \quad (2.73)$$

In termini fisici, questa condizione impone la completezza dello spettro delle eccitazioni della teoria conforme [31].

La trasformazione  $T(\tau \rightarrow \tau + 1)$  consiste nell'effettuare una rotazione completa di una base del cilindro prima di incollarla all'altra per formare il toro. Non sorprende, quindi, che l'invarianza sotto  $T$  imponga delle condizioni sul momento angolare delle eccitazioni. Abbiamo:

$$T : Z(\tau, \zeta) \rightarrow Z(\tau + 1, \zeta) = \text{Tr} [\dots e^{2\pi i(L_{0,R} - L_{0,L})} \dots] = Z(\tau, \zeta). \quad (2.74)$$

Questa invarianza implica la condizione  $h_L - h_R \in \mathbb{Z}$ , ovvero il momento angolare complessivo delle eccitazioni sui due bordi deve formare un intero. Per sistemi fermionici questa condizione è troppo restrittiva: richiediamo allora l'invarianza sotto  $T^2$ , che permette valori interi o semi interi,

$$T^2 : Z(\tau, \zeta) \rightarrow Z(\tau + 2, \zeta) = \text{Tr} [\dots e^{2\pi i 2(L_{0,R} - L_{0,L})} \dots] = Z(\tau, \zeta). \quad (2.75)$$

Le condizioni di invarianza modulare  $S$  e  $T^2$  date dalle (2.73) e (2.75) sono ben note nella letteratura delle teorie conformi. Nel caso dell'effetto Hall quantistico ci sono altre due richieste d'invarianza dovute alla presenza di eccitazioni cariche, che coinvolgono il parametro  $\zeta$  [34]. Questa è una coordinata sulla superficie del toro, che trasforma secondo la (2.60). Le condizioni di periodicità sono quindi  $\zeta \sim \zeta + 1$  e  $\zeta \sim \zeta + \tau$ . Osserviamo che la prima invarianza:

$$U : Z(\tau, \zeta) \rightarrow Z(\tau, \zeta + 1) = \text{Tr} [\dots e^{2\pi i(Q_R + Q_L)} \dots] = Z(\tau, \zeta), \quad (2.76)$$

corrisponde ad imporre che la carica complessiva sia intera. Ricordiamo che il sistema è composto da fermioni, quindi i numeri quantici delle eccitazioni anioniche di bordo devono combinarsi per formare eccitazioni con carica totale  $Q_L + Q_R \in \mathbb{Z}$ .

Il significato fisico della seconda periodicità è il seguente. La trasformazione:

$$V : Z(\tau, \zeta) \rightarrow Z(\tau, \zeta + \tau) = Z(\tau, \zeta), \quad (2.77)$$

realizza l'inserzione di flusso analizzata nel paragrafo 2.2.2. Come spiegato in questa sezione, l'inserzione di  $k$  quanti di flusso causa il trasporto di un elettrone da un bordo all'altro dell'anello, facendo variare la differenza di potenziale fra i bordi di  $1/R$ , corrispondente a  $\zeta \rightarrow \zeta + \tau$ . D'altra parte l'inserzione di un numero intero di flussi corrisponde ad una trasformazione di gauge dell'Hamiltoniana, dunque la funzione di partizione deve rimanere inalterata. Notiamo che il prefattore  $\mathcal{K}$  introdotto nell'espressione dei caratteri conformi (2.71) è necessario per l'invarianza sotto  $V$  e corrisponde ad una energia capacitiva dei settori anionici.

Veniamo adesso alla soluzione completa delle condizioni  $S, T^2, U, V$  per l'espressione di  $Z$  (2.72). L'invarianza sotto  $U$  specifica completamente le molteplicità delle eccitazioni cariche  $\mathcal{N}_{\lambda\bar{\lambda}}$ , infatti se  $Q_R = \lambda/k + n$  e  $Q_L = \lambda'/k + n'$ , allora deve valere  $\lambda' = -\lambda$  modulo  $k$ , cioè  $\mathcal{N}_{\lambda\bar{\lambda}} = \delta_{\lambda, -\lambda}$  modulo  $k$ . Dunque la funzione di partizione gran canonica si scrive come:

$$Z(\tau, \zeta) = \sum_{\lambda=0}^{k-1} K_{\lambda}(\tau, \zeta) \bar{K}_{\lambda}^c(\bar{\tau}, \bar{\zeta}), \quad (2.78)$$

dove l'apice  $c$  indica la coniugazione di carica che cambia il segno di  $\lambda$ .

Si dimostra che i caratteri trasformano nel modo seguente per le trasformazioni modulari [34]

$$S : K_{\lambda} \left( -\frac{1}{\tau}, -\frac{\zeta}{\tau} \right) = \frac{\exp \left[ \frac{i\pi}{k} \operatorname{Re} \left( \frac{\zeta^2}{\tau} \right) \right]}{\sqrt{k}} \sum_{\lambda'=0}^{k-1} \exp \left( \frac{2\pi i}{k} \lambda \lambda' \right) K_{\lambda'}(\tau, \zeta), \quad (2.79)$$

$$T^2 : K_{\lambda}(\tau + 1, \zeta) = \exp \left( -i\frac{\pi}{6} + 2\pi i \frac{\lambda^2}{k} \right) K_{\lambda}(\tau, \zeta), \quad (2.80)$$

$$U : K_{\lambda}(\tau, \zeta + 1) = \exp \left( 2\pi i \frac{\lambda}{k} \right) K_{\lambda}(\tau, \zeta), \quad (2.81)$$

$$V : K_{\lambda}(\tau, \zeta + \tau) = \exp \left[ -\frac{2\pi i}{k} \left( \frac{\operatorname{Re}(\tau)}{2} + \operatorname{Re}(\zeta) \right) \right] K_{\lambda+1}(\tau, \zeta). \quad (2.82)$$

Si verifica quindi che l'espressione (2.78) della funzione di partizione è invariante sotto il gruppo modulare "esteso" generato da  $S, T^2, U, V$ .

In conclusione, la funzione di partizione (2.78) descrive completamente la struttura delle eccitazioni di bordo nella geometria dell'anello. Questa quantità è molto importante nelle teorie conformi ed è stata ampiamente

utilizzata nella costruzione di modelli più complessi di eccitazioni di bordo che descrivono altri stati Hall frazionari [35]. La funzione di partizione permette inoltre la derivazione di numerosi risultati relativi alla risposta del sistema [35] [36].

# Capitolo 3

## Isolanti topologici tridimensionali

In questo capitolo introduciamo le teorie di campo effettive che descrivono gli isolanti topologici in 3 dimensioni spaziali. Nel caso di sistemi di fermioni non interagenti su reticolo, la teoria al bordo contiene eccitazioni fermioniche a massa nulla con spin elicale come descritto al capitolo 1. Per quanto riguarda il caso interagente, ci aspettiamo che, in analogia con quanto accade nell'effetto Hall quantistico, il bulk sia descritto da una teoria di gauge topologica e le eccitazioni di bordo da una corrispondente teoria bosonica. Tuttavia c'è da notare che gli isolanti topologici frazionari non sono ancora stati osservati sperimentalmente e quindi non abbiamo una comprensione precisa della dinamica di bordo. Questo fatto, unito alla scarsa conoscenza del meccanismo della bosonizzazione in  $(2 + 1)$  dimensioni, rende molto più difficile determinare la corretta azione bosonica corrispondente sia agli elettroni liberi che a quelli interagenti.

La parte originale di questo lavoro di tesi, descritta nel prossimo capitolo, riguarda lo studio di una teoria di bordo bosonica non banale che potrebbe descrivere i fermioni interagenti e giocare un ruolo analogo al bosone chirale in  $(1 + 1)$  dimensioni. In questo capitolo riassumiamo i risultati delle teorie effettive finora ottenuti nella letteratura che ci forniscono il punto di partenza per i nostri risultati.

### 3.1 Teoria di campo effettiva degli isolanti topologici fermionici

In questa sezione studiamo le teorie di campo che permettono di descrivere gli isolanti topologici fermionici non interagenti in tre dimensioni spaziali,

corrispondenti alla classe *III* della tabella (1.7), e caratterizzati da eccitazioni di bordo elicali. È stato dimostrato che il bulk di ognuna delle dieci classi è descritto, a basse energie, da un campo di Dirac con Hamiltoniana quadratica, le cui simmetrie sono quelle della classe stessa [37] [38] [39]. La teoria effettiva delle eccitazioni di bordo può essere ottenuta a partire da quella del bulk tramite il metodo di riduzione dimensionale di Jackiw e Rebbi [40] [16].

Consideriamo in particolare il caso di un isolante topologico con due bordi in corrispondenza dei piani  $z = \pm z_0$ : la teoria di bulk è quella di un fermione di Dirac massivo e si dimostra che i bordi sono popolati da fermioni di Dirac massless elicali, in accordo con quanto detto nel capitolo precedente.

Osserviamo che il fermione di Dirac in  $(2+1)$  dimensioni è diverso dal suo corrispettivo quadridimensionale. In quest'ultimo caso, infatti, il segno della massa del fermione non è fisico, può essere cambiato tramite una trasformazione unitaria dei campi. Viceversa, nel caso tridimensionale, fermioni con masse di segno opposto fanno parte di rappresentazioni inequivalenti dell'algebra di Clifford, mappate l'una nell'altra da una trasformazione di inversione temporale [41].

### 3.1.1 L'anomalia $\mathbb{Z}_2$ e la sua cancellazione

Consideriamo un fermione di Dirac in  $(2+1)$  dimensioni di massa  $m$ , accoppiato ad un campo elettromagnetico:  $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} + e\mathcal{A} + m)\psi$ . L'azione indotta per  $A$  è ottenuta integrando i campi fermionici: la sua espressione non si può ottenere in modo esatto per una generica configurazione del campo di background, tuttavia, supponendo che  $A$  sia un campo debolmente fluttuante ed essendo interessati al regime di bassa energia, è ragionevole calcolare l'azione indotta ad un loop. Nella segnatura euclidea, questa è data da [42] [43]:

$$S_{ind}[A] = S_{CS}[A] + S_{NL}[A] + O(A^3), \quad (3.1)$$

$$S_{CS}[A] = \frac{ie^2}{4\pi} \left( \frac{1}{2} \text{sign}(m) \right) \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho, \quad (3.2)$$

$$S_{NL}[A] = \frac{e^2}{64} \int d^3x F_{\mu\nu} \frac{1}{\sqrt{\square}} F^{\mu\nu}. \quad (3.3)$$

La parte reale dell'azione indotta contiene la radice del D'Alambertiano  $\square = -\partial_\mu \partial^\mu$ , che è ben definito nell'Euclideo. La parte immaginaria dell'azione è il termine di Chern-Simons che rompe la parità  $\mathcal{P}$  e time reversal  $\mathcal{T}$ . Nel

caso massivo le simmetrie  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{T}$  sono rotte a livello classico ed il segno del coefficiente del termine di Chern-Simons è determinato univocamente dal segno della massa del fermione. Nel limite massless le simmetrie classiche sono ristabilite, mentre la rottura persiste a livello quantistico e quindi siamo in presenza di un'anomalia  $\mathbb{Z}_2$ .

L'isolante topologico è un sistema che rispetta la simmetria  $\mathcal{T}$ , quindi ci deve essere un meccanismo di cancellazione dell'anomalia fra bulk e bordo analogo al caso dell'effetto Hall quantistico. Un primo passo è quello di rompere esplicitamente la simmetria per inversione temporale nel bulk: in questo modo i fermioni ai bordi situati a  $z = \pm z_0$  acquistano un termine di massa di segno opposto. A questo punto il segno del termine di Chern-Simons è univocamente determinato per entrambi i bordi:

$$S_{CS}^{\pm}[A] = \pm \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi} \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_{\mu} \partial_{\nu} A_{\rho}, \quad z = \pm z_0. \quad (3.4)$$

Per eliminare questi termini anomali Hughes e Zhang [44] hanno suggerito di introdurre un'azione di bulk data dal termine theta abeliano:

$$S_{\theta}[A] = -\frac{\theta e^2}{32\pi^2} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}. \quad (3.5)$$

Questa Lagrangiana è una derivata totale: nel caso della geometria con due bordi che stiamo considerando, l'azione (3.5) corrisponde ad un termine di Chern-Simons per ogni bordo che, scegliendo  $\theta = \pi$ , cancella esattamente il contributo dell'azione indotta di superficie (3.4). Quindi il sistema complessivo formato da bulk e bordo risulta invariante sotto inversione temporale.

Notiamo che questo meccanismo di cancellazione dell'anomalia della teoria di bordo grazie con un contributo del bulk è però diverso dall'*anomaly inflow* in due dimensioni, poiché non c'è nessuna corrente nel bulk:  $\delta S_{\theta} / \delta A_{\mu} = 0$ .

Nel caso di geometrie senza bordo, il termine theta è l'integrale della *seconda classe di Chern* del campo elettromagnetico [14]  $A$ :  $S_{\theta} = \pi C_2$ , dove  $C_2$  è un invariante topologico che assume valori interi, e cambia segno per inversione temporale. D'altra parte,  $S_{\theta}$  compare nell'integrale funzionale nella forma  $\exp(i\pi C_2)$ , il cui valore non cambia. Anche in questo caso abbiamo quindi un sistema invariante per time reversal.

Il termine theta (3.5) produce degli effetti fisici interessanti e misurabili. Ad esempio, se la simmetria sotto inversione temporale viene rotta al bordo, le eccitazioni fermioniche diventano massive, e scompaiono dalla fisica di bassa energia. Tuttavia il termine di bordo dovuto a (3.5) rimane e descrive un

effetto Hall quantistico sul bordo con conducibilità  $\sigma_H = 1/2$ , caratteristica dei fermioni liberi relativistici [45] [46]. Un'altra manifestazione fisica del termine theta è l'*effetto magneto-elettrico*: questo consiste nella comparsa nella polarizzazione (rispettivamente, nella magnetizzazione) di un contributo proporzionale al campo magnetico (elettrico), rispettivamente, dovuto all'accoppiamento fra campo elettrico e magnetico nell'azione [47]. Anche questo effetto è descrivibile in termini di fisica al bordo.

In conclusione, la teoria di campo effettiva dei modi di bordo degli isolanti topologici fermionici non interagenti è costituita da un fermione di Dirac bidimensionale massless. L'azione effettiva indotta per quest'ultimo è data dal solo termine non locale  $S_{NL}$  in (3.1), in quanto il termine di Chern-Simons è cancellato da un contributo di bulk mediante il meccanismo ora descritto.

## 3.2 Isolanti topologici bosonici

Nell'effetto Hall quantistico, come abbiamo visto nel capitolo 2, il caso frazionario di elettroni interagenti è ben descritto da una teoria di campo bosonica: è naturale quindi cercare di seguire la stessa strategia anche per gli isolanti topologici interagenti in  $(3+1)$  dimensioni. Cho e Moore [48] hanno proposto come teoria effettiva di bulk la cosiddetta teoria  $BF$ , che è una generalizzazione della teoria di Chern-Simons analizzata nel capitolo 2.

### 3.2.1 Teoria BF in $(3+1)$ dimensioni

Consideriamo una varietà quadridimensionale  $\mathcal{M}$  la cui parte spaziale costituisce il bulk dell'isolante topologico. A bassa energia, oltre ad una corrente di quasi particelle conservata  $J^\mu$ , in  $(3+1)$  dimensioni possiamo definire anche una corrente di quasi vortici  $J^{\mu\nu}$ :

$$J^\mu = \frac{1}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu b_{\rho\sigma}, \quad J^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho a_\sigma, \quad (3.6)$$

dove  $a_\mu$  e  $b_{\mu\nu}$  sono due campi idrodinamici che descrivono le fluttuazioni di bassa energia del sistema, dove  $a_\mu$  è un quadrivettore, mentre  $b_{\mu\nu}$  è un tensore antisimmetrico. Questi si accoppiano alle worldline delle eccitazioni di bulk di quasi particella  $\mathcal{J}_{qp}^\mu$  e di quasi vortice  $\mathcal{J}_{qv}^{\mu\nu}$ . Per comodità di notazione, introduciamo le forme differenziali relative ai campi vettoriali  $a_\mu$ ,  $b_{\mu\nu}$  ed al campo elettromagnetico di background  $A_\mu$ :

$$a = a_\mu dx^\mu, \quad b = (1/2)b_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad A = A_\mu dx^\mu. \quad (3.7)$$

Abbiamo ora tutti gli ingredienti per scrivere l'azione effettiva proposta da Cho e Moore per descrivere il bulk degli isolanti topologici:

$$S_{Bulk}[a, b, A] = \int_{\mathcal{M}} \frac{k}{2\pi} bda + \frac{1}{2\pi} bdA - \frac{\theta}{8\pi^2} dadA \quad (3.8)$$

$$+ \left( a_\mu \mathcal{J}_{qp}^\mu + \frac{1}{2} b_{\mu\nu} \mathcal{J}_{qv}^{\mu\nu} \right) d^4x. \quad (3.9)$$

Osserviamo che questa azione, a differenza di quella di Chern-Simons, è invariante per inversione temporale (ad eccezione del termine theta), assegnando le seguenti regole di trasformazione ai campi:

$$(a_0, \mathbf{a}) \rightarrow (a_0, -\mathbf{a}), \quad (A_0, \mathbf{A}) \rightarrow (A_0, -\mathbf{A}), \quad (b_{0i}, b_{ij}) \rightarrow (-b_{0i}, b_{ij}). \quad (3.10)$$

La teoria  $BF$  è topologica come la teoria di Chern-Simons e quindi è adatta a descrivere un bulk con gap a basse energie.

Le equazioni di moto dei campi  $a$  e  $b$  in assenza del campo di background  $A$  sono le seguenti:

$$\mathcal{J}_{qp}^\mu = -\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu b_{\rho\sigma}, \quad (3.11)$$

$$\mathcal{J}_{qv}^{\mu\nu} = -\frac{k}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho a_\sigma. \quad (3.12)$$

Poniamo per ora  $\mathcal{J}_{qp}^\mu = \mathcal{J}_{qv}^{\mu\nu} = 0$ . L'azione indotta per il campo elettromagnetico  $A$  si ottiene integrando le fluttuazioni dei campi idrodinamici  $a_\mu$  e  $b_{\mu\nu}$ :

$$S_{ind}[A] = \frac{\theta}{32\pi^2 k} \int_{\mathcal{M}} d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}. \quad (3.13)$$

Per  $k = 1$  si riottiene il risultato corretto (3.5) per il sistema di fermioni liberi nel bulk. Ci aspettiamo che gli altri valori di  $k$  descrivano fermioni interagenti.

### 3.2.2 Invarianza di gauge e azione di bordo

Occupiamoci ora del problema dell'invarianza di gauge dell'azione (3.8). Se la varietà  $\mathcal{M}$  non ha bordo, allora la teoria è invariante sotto le trasformazioni di gauge:

$$a_\mu \rightarrow a_\mu + \partial_\mu \lambda, \quad b_{\mu\nu} \rightarrow b_{\mu\nu} + (\partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu). \quad (3.14)$$

Se invece  $\mathcal{M}$  ha un bordo, l'azione  $BF$  di bulk non è invariante di gauge ed è necessario introdurre un termine di bordo. Calcoliamo quindi la variazione dell'azione (3.8) in seguito ad una trasformazione (3.14):

$$S_{BF} \rightarrow S_{BF} + \frac{k}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} \xi_\mu \partial_\nu A_\rho + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} \xi_\mu \partial_\nu a_\rho. \quad (3.15)$$

Introduciamo un termine di bordo:

$$S_{bordo}[\zeta, a, A] = -\frac{k}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} \zeta_\mu \partial_\nu A_\rho - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} \zeta_\mu \partial_\nu a_\rho. \quad (3.16)$$

e definiamo la trasformazione di gauge del campo  $\zeta_\mu$  è  $\zeta_\mu \rightarrow \zeta_\mu + \xi_\mu$ , in modo tale da compensare il termine di bordo originato dalla variazione dell'azione di bulk. In conclusione, l'azione invariante di gauge del sistema bulk-bordo, è data da  $S_{BF} + S_{bordo}$ .

Consideriamo ora la teoria di bordo in assenza di campo esterno  $A = 0$ , nel gauge statico  $a_0 = \zeta_0 = 0$ :

$$S_{bordo}[\zeta, a] = \frac{k}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \varepsilon^{ij} \zeta_i \partial_t a_j. \quad (3.17)$$

L'equazione di moto del campo  $a$  nel bulk impone il vincolo  $\varepsilon^{0ijk} \partial_j a_k = 0$  che può essere risolto ponendo  $a_i = \partial_i \varphi$ , corrispondente ad un puro gauge. L'azione della teoria di bordo diventa infine:

$$S_{bordo}[\zeta, \varphi] = \frac{k}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \varepsilon^{ij} \partial_i \zeta_j \partial_t \varphi. \quad (3.18)$$

Come nel caso dell'effetto Hall quantistico, la teoria di bordo indotta dal bulk consta della sola forma simplettica ed ha quindi Hamiltoniana nulla. Le variabili canonicamente coniugate sono la parte longitudinale di  $a$ , e quella trasversa di  $\zeta$ :

$$\varphi, \quad \Pi = \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i \zeta_j = -\frac{k}{2\pi} \nabla^2 \chi \quad (3.19)$$

In conclusione al bordo ci sono due gradi di libertà scalari che sono coniugati.

Osserviamo che, anche negli isolanti topologici in  $(3+1)$  dimensioni, le eccitazioni di bordo sono descritte da gradi di puro gauge nel bulk che diventano fisici.

### 3.2.3 Hamiltoniana della teoria di bordo

Proseguiamo nella descrizione della dinamica delle eccitazioni di massa nulla al bordo. L'analisi nel precedente capitolo ci suggerisce di introdurre una semplice Hamiltoniana quadratica espressa nelle variabili canoniche  $\varphi$  e  $\Pi$  [43] [49]:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \Pi^2 + \frac{m}{2} (\partial_i \varphi)^2 \quad (3.20)$$

Il parametro dimensionale  $m$ ,  $[m] = 1$ , è necessario a causa della dimensione non standard dei campi. Infatti,  $\varphi$  e  $\zeta$  sono definiti a partire dai campi di bulk

$a$  e  $b$ , che hanno dimensione canonica in  $(3 + 1)$  dimensioni,  $[a] = [b] = 1$ . Segue che la dimensione di  $\varphi$  e  $\Pi$  non sono quelle standard di un campo scalare e del suo impulso in  $(2 + 1)$  dimensioni ( $[\varphi] = 1/2$ ,  $[\Pi] = 3/2$ ), bensì  $[\varphi] = 0$  e  $[\Pi] = 1$ . La presenza di una scala di lunghezza esclude che questa teoria possa essere conforme, sebbene sia a massa nulla. L'azione della teoria di bordo corrispondente all'Hamiltoniana (3.20) è la seguente:

$$S_{bordo} = \int d^3x (\Pi\dot{\varphi} - \mathcal{H}) = \int d^3x \left( \Pi\dot{\varphi} - \frac{1}{2m}\Pi + \frac{m}{2}(\partial_i\varphi)^2 \right) \quad (3.21)$$

Per passare alla forma lagrangiana dobbiamo calcolare le equazioni di Hamilton, che sono quelle del campo scalare libero:

$$\Pi = m\dot{\varphi}, \quad \dot{\Pi} = m\nabla^2\varphi \quad (3.22)$$

L'azione (3.21) in forma lagrangiana è quindi:

$$S_{bordo} = \frac{m}{2} \int d^3x \partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi. \quad (3.23)$$

Notiamo infine che le equazioni di Hamilton (3.22) possono essere scritte come un'unica equazione in forma covariante:

$$\frac{k}{2\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu\zeta_\rho = m\partial^\mu\varphi. \quad (3.24)$$

Questa equazione corrisponde alla dualità elettromagnetica in  $(2 + 1)$  dimensioni in cui il campo vettoriale  $\zeta_\mu$  è duale ad un campo scalare,  $\varphi$ , detto anche *fotone duale*.

Consideriamo adesso l'accoppiamento col campo elettromagnetico di background: dalla forma dell'azione di bordo (3.23) e dalla definizione di  $\varphi$  si deduce che il campo esterno si accoppia a  $\varphi$  tramite la "sostituzione minimale":

$$\partial_\mu\varphi \rightarrow \partial_\mu\varphi + A_\mu/k. \quad (3.25)$$

Effettuando questa sostituzione nell'azione (3.23), ed integrando il campo  $\varphi$  che compare quadraticamente, otteniamo l'azione indotta per il campo elettromagnetico  $A$ :

$$S_{ind}[A] = \frac{m}{4k^2} \int d^3x F_{\mu\nu} \frac{1}{\square} F^{\mu\nu}. \quad (3.26)$$

Questa va confrontata con l'azione indotta nel caso fermionico (3.1): le due differiscono qualitativamente nel limite di bassa energia e deboli campi  $A_\mu$

che abbiamo considerato. Segue che l'Hamiltoniana bosonica (3.20) non descrive fermioni liberi per  $k = 1$ .<sup>1</sup> Tuttavia la semplicità dell'Hamiltoniana (3.20) permette di calcolare la funzione di partizione della teoria, e quindi di confrontarla con quella del fermione libero in (2+1) dimensioni per evidenziare aspetti comuni o differenze. Questa analisi è utile nell'ottica di sviluppare una migliore comprensione della bosonizzazione in (2 + 1) dimensioni, ed è stato effettuato in [43], a cui si rimanda per una discussione approfondita.

Possiamo modificare la teoria del bosone libero affinché riproduca l'azione indotta dal campo fermionico. Consideriamo l'azione (3.21), e sostituiamo la massa  $m$  con la radice quadrata del D'Alambertiano  $\sqrt{\square}$ :

$$S_{bordo} = \int d^3x \left( \Pi \dot{\varphi} - \frac{1}{2} \Pi \frac{1}{\sqrt{\square}} \Pi + \frac{1}{2} \partial_i \varphi \sqrt{\square} \partial_i \varphi \right). \quad (3.27)$$

Questa scrittura è solo formale: non si può associare al secondo e terzo termine dell'azione (3.27) il significato di Hamiltoniana, poiché contiene infinite derivate temporali. Calcolando le equazioni del moto, la relazione di dualità (3.24) diventa:

$$\frac{k}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \zeta_\rho = \sqrt{\square} \partial^\mu \varphi. \quad (3.28)$$

Effettuando la medesima sostituzione nell'azione lagrangiana (3.23), otteniamo:

$$S_{bordo} = \frac{1}{2} \int d^3x \partial_\mu \varphi \sqrt{\square} \partial^\mu \varphi. \quad (3.29)$$

Introducendo l'accoppiamento col campo elettromagnetico tramite la sostituzione (3.25) ed integrando il campo  $\varphi$  otteniamo formalmente la seguente forma per l'azione indotta in segnatura euclidea:

$$S_{ind} = \frac{1}{4k^2} \int d^3x F_{\mu\nu} \frac{1}{\sqrt{\square}} F_{\mu\nu}. \quad (3.30)$$

Al netto di un coefficiente moltiplicativo, abbiamo ottenuto proprio la forma dell'azione indotta dal fermione elicale (3.1).

Concludiamo quindi che l'azione bosonica (3.29) potrebbe descrivere dei fermioni nel limite di bassa energia: quest'aspetto sarà approfondito nel capitolo 4.

---

<sup>1</sup>Notiamo che il parametro di massa  $m$  potrebbe essere riassorbito da una ridefinizione del campo scalare  $\varphi$  nella teoria libera (3.23), ma non è eliminabile nell'azione indotta (3.26) perchè l'accoppiamento è fissato dalla fisica del bulk.

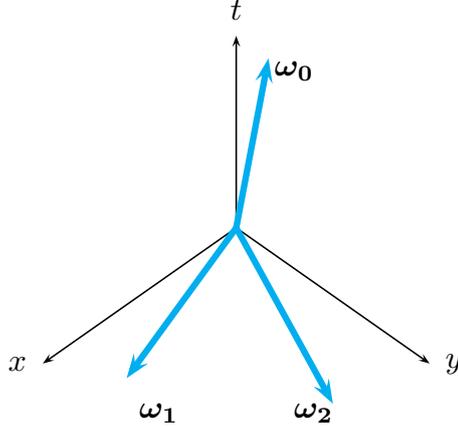


Figura 3.1: In figura sono rappresentati i tre vettori primitivi che generano il reticolo del tri-toro  $\mathbb{T}^3$ .

### 3.3 Teoria bosonica quadratica su $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$

In questa sezione analizziamo la teoria  $BF$  complementata dall'Hamiltoniana di bordo (3.20) nella geometria spaziale del toro pieno, l'analogo del disco  $D$  in una dimensione superiore. La varietà spaziotemporale  $\mathcal{M}$  è data da  $\mathcal{M} = D \times S^1 \times \mathbb{R}$  ed il suo bordo è  $\partial\mathcal{M} = S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}$ , dove  $\mathbb{R}$  specifica il tempo. Per semplicità, consideriamo il caso di campo esterno nullo  $A_\mu = 0$ .

Nel calcolo della funzione di partizione il tempo è compattificato in un cerchio di raggio  $\beta$ , per cui la geometria è quella del tri-toro  $\mathbb{T}^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ . Il tri-toro è rappresentato come il quoziente  $\mathbb{R}^3$  ed un reticolo  $\Lambda$ , analogamente al toro bidimensionale. In tre vettori che generano questo reticolo sono indicati da  $\omega_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2$  con componenti  $\omega_{\mu\nu}$ ,  $\nu = 0, 1, 2$  (vedi figura (3.1)). Le componenti "diagonali" dei vettori primitivi sono date dalle lunghezze dei cicli non banali del toro, mentre quelle non diagonali generalizzano la rotazione delle coordinate del toro bidimensionale (vedi paragrafo 2.3.2).

#### 3.3.1 Ordine topologico della teoria $BF$

Nel capitolo 2 abbiamo visto che la teoria di Chern-Simons nella geometria del toro è caratterizzata da un ordine topologico  $k$ , riprodotto dalla teoria di bordo del bosone chirale. Come vedremo nel resto del capitolo, la stessa cosa

avviene con la teoria  $BF$  e la teoria del bosone scalare libero, con il valore dell'ordine topologico dato da  $k^3$  [50]. In questo paragrafo vogliamo derivare questo valore. Nel caso bidimensionale l'azione di Chern-Simons si riduce ad un'azione di un problema di singola particella, in cui le variabili coniugate secondo l'algebra (2.19) sono date dagli operatori (2.16), cioè dagli integrali del campo di gauge  $a$  lungo i cicli non contraibili del toro. L'azione  $BF$  ha un comportamento analogo, ma gli operatori canonicamente coniugati sono dati dagli integrali dei campi  $b$  e  $a$  sui tori  $\mathbb{T}^2$  e cicli non banali in cui è possibile decomporre il toro  $\mathbb{T}^3$ . Questa decomposizione può essere effettuata in tre modi diversi, corrispondenti a tre coppie di variabili coniugate:

$$\bar{b}_{ij}(t) = \int_{\mathbb{T}_{ij}^2} b, \quad \bar{a}_k(t) = \int_{S_k^1} a, \quad i \neq j \neq k = 1, 2, 3, \quad (3.31)$$

ognuna delle quali soddisfa l'algebra (2.19). Consideriamo ora gli operatori invarianti di gauge: come nel caso bidimensionale, sono dati dagli esponenziali delle variabili coniugate, e quindi si presentano anch'essi in tre coppie:

$$W_k = e^{i\bar{a}_k}, \quad \tilde{W}_{ij} = e^{i\bar{b}_{ij}}, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (3.32)$$

Ogni coppia  $(W_k, \tilde{W}_{ij})$  soddisfa l'algebra dei loop di Wilson della teoria di Chern-Simons (2.21) e quindi l'ordine topologico complessivo è  $k^3$ .

### 3.3.2 Ordine topologico e campi di bordo

Nel capitolo precedente abbiamo mostrato che quando la teoria topologica è definita su una varietà con bordo, le proprietà topologiche si manifestano nei modi solitonici dei campi di bordo: le condizioni al contorno del bosone chirale sono fissate dalle cariche delle eccitazioni di bulk. Nel caso tridimensionale sono presenti due tipi distinti di eccitazione: di quasi particella e di quasi vortice. La situazione è riassunta in figura (3.2) dove il toro pieno è rappresentato come un cilindro con le basi identificate. In figura (a) è rappresentata una quasi particella statica nella posizione  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  corrispondente ad una quadricorrente  $\mathcal{J}_{qp}^0 = N_0 \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ : integrando l'equazione di moto (3.11), otteniamo la seguente condizione su  $\zeta$ :

$$\int_{\partial V} d^2x \varepsilon^{ij} \partial_i \zeta_j = \frac{2\pi N_0}{k}. \quad (3.33)$$

Quindi la carica della quasi particella corrisponde al flusso di  $\zeta$  attraverso la superficie del toro  $\mathbb{T}^2$  che costituisce il bordo spaziale del sistema. Consideriamo ora una linea di quasi vortice statica che corre lungo uno dei due cicli non banali del toro, rappresentata in figura (b), con quadricorrente

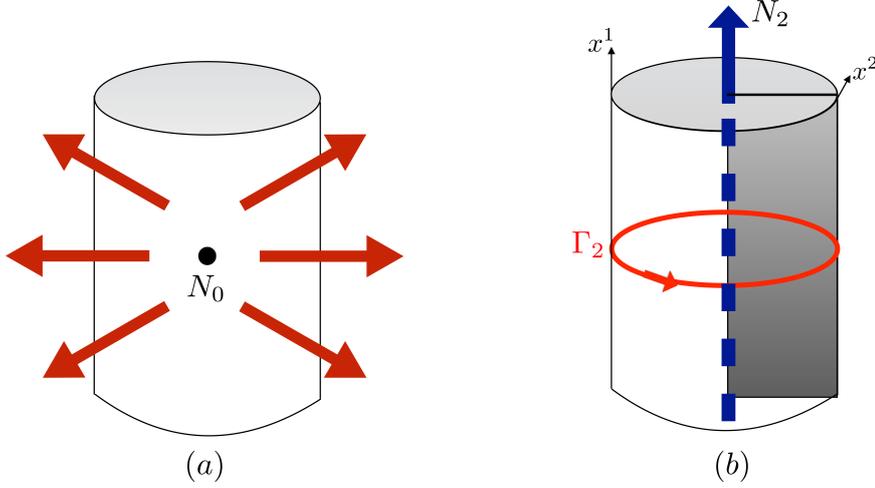


Figura 3.2: In figura sono rappresentate le eccitazioni di bulk del toro, rappresentato come un cilindro con le basi identificate. Figura adattata da [43].

$\mathcal{J}_{qv}^{01} = N_1 \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ . Integrando ora l'equazione di moto (3.12) otteniamo una condizione sulla circolazione di  $\partial_\mu \varphi$  lungo una linea sul bordo chiusa  $\Gamma_2$ :  $x_2 = cost$  che circonda il vortice:

$$\int_{\Gamma_2} dx_2 \partial_2 \varphi = \frac{2\pi N_1}{k}. \quad (3.34)$$

Considerando una eccitazione di quasi vortice lungo l'altro ciclo del toro, otteniamo una relazione simile per la circolazione di  $\partial_1 \varphi$  lungo una curva  $\Gamma_1 : x_1 = cost$ :

$$\int_{\Gamma_1} dx_1 \partial_1 \varphi = \frac{2\pi N_2}{k}. \quad (3.35)$$

Le quantità  $\Lambda_\mu = N_\mu/k$  con  $\mu = 0, 1, 2$  sono interpretabili rispettivamente come la carica della quasi particella ed il flusso di campo magnetico dei quasi vortici. Questo fatto si può dimostrare considerando l'azione indotta per il campo elettromagnetico in presenza di sorgenti in modo del tutto analogo a quanto fatto per la teoria di Chern-Simons nel paragrafo 2.1.1. Ci limitiamo qui ad osservare che tale relazione è consistente con le regole di trasformazione dei campi sotto inversione temporale. Innanzitutto, dalle proprietà di trasformazione dei campi di bulk  $a_\mu$  e  $b_{\mu\nu}$  (3.10) seguono quelle dei campi di bordo  $\varphi$  e  $\zeta_i$ :

$$\varphi(\mathbf{x}, t) \rightarrow -\varphi(\mathbf{x}, -t), \quad \zeta_i(\mathbf{x}, t) \rightarrow \zeta_i(\mathbf{x}, -t). \quad (3.36)$$

Infine, applicando le trasformazioni (3.10) alle condizioni (3.33), (3.34), (3.35), si dimostra che i parametri di bulk  $\Lambda_\mu$  trasformano per inversione tempora-

le rispettivamente come una carica elettrica per  $\mu = 0$  e come un flusso di campo magnetico per  $\mu = 1, 2$ :

$$\Lambda_0 \rightarrow \Lambda_0, \quad \Lambda_i \rightarrow -\Lambda_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.37)$$

### 3.3.3 Funzione di partizione delle eccitazioni di bordo bosoniche

In questa sezione riportiamo sinteticamente i principali passaggi nel calcolo della funzione di partizione della teoria di bordo con Hamiltoniana (3.20); per i dettagli rimandiamo ai lavori [43] e [49]. La definizione della funzione di partizione è:

$$Z = \text{Tr} \left[ e^{-\beta H - i\omega_0 P_1 - i\omega_2 P_2} \right], \quad (3.38)$$

dove  $P_1$  e  $P_2$  sono le componenti dell'operatore impulso lungo le direzioni di  $\boldsymbol{\omega}_1$  e  $\boldsymbol{\omega}_2$ , rispettivamente, e  $\beta = 2\pi T$ .

Riassumiamo i principali passaggi della quantizzazione canonica della teoria (3.21). Innanzitutto vanno risolte le equazioni di moto della teoria, scritte in forma Hamiltoniana in (3.22) ed equivalenti all'equazione delle onde per il campo  $\varphi$  e  $\Pi = (k/2\pi)\varepsilon^{ij}\partial_i\zeta_j$ . Le soluzioni a tali equazioni corredate con le condizioni sui campi (3.33), (3.34), (3.35) sono i seguenti (le notazioni sono spiegate sotto):

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}, t) = & \varphi_0 + 2\pi \sum_l \Lambda_l \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{x} \\ & + \frac{1}{\sqrt{mV^{(2)}}} \sum_{\mathbf{n} \neq 0} (a_{\mathbf{n}} e^{-iE_{\mathbf{n}}t + 2\pi i \mathbf{k}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}} + h.c.), \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \zeta_i = & \frac{\varepsilon_{ij}}{V^2} (\omega_{2j}\gamma_1 - \omega_{1j} + \pi\Lambda_0 x_i) \\ & + \sqrt{\frac{64\pi^4 m}{k^2 V^{(2)}}} \sum_{\mathbf{n}} \frac{\varepsilon_{ij} k_{\mathbf{n}l}}{\sqrt{(2E_{\mathbf{n}})^3}} (a_{\mathbf{n}} e^{-iE_{\mathbf{n}}t + 2\pi i \mathbf{k}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}} + h.c.). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Di seguito definiamo le varie quantità presenti in questi sviluppi:

- $V^{(2)}$  è l'area del toro  $\mathbb{T}^2$ , data da  $V^{(2)} = |\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2|$ .
- $\Lambda_\mu = N_\mu/k$ , con  $\mu = 0, 1, 2$ .

- $\mathbf{k}_\mu$  con  $\mu = 0, 1, 2$  sono i vettori del reticolo duale a quello che definisce il toro, e sono definiti da  $\boldsymbol{\omega}_\mu \times \mathbf{k}_\nu = 2\pi\delta_{\mu\nu}$ .
- Le energie  $E_{\mathbf{n}}$  e gli impulsi  $\mathbf{k}_{\mathbf{n}}$  delle eccitazioni oscillatorie sono specificati da due interi  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$  e sono rispettivamente:

$$E_{\mathbf{n}} = \frac{2\pi}{V^{(2)}} |n_1\boldsymbol{\omega}_2 - n_2\boldsymbol{\omega}_1|, \quad (3.41)$$

$$\mathbf{k}_{\mathbf{n}} = (k_{\mathbf{n}1}, k_{\mathbf{n}2}) = \frac{1}{V^{(2)}} (n_1\omega_{22} - n_2\omega_{12}, n_2\omega_{11} - n_1\omega_{21}). \quad (3.42)$$

- Le quantità  $\varphi_0$ , e  $\gamma_1, \gamma_2$  sono i modi solitonici dei campi.

Il passo successivo consiste nell'imporre le relazioni di commutazione canoniche  $[\varphi(\mathbf{x}, t), \Pi(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ : da queste deriva l'algebra soddisfatta dai vari modi dei campi, sia oscillatori che solitonici:

$$[a_{\mathbf{n}}, a_{\mathbf{m}}^\dagger] = \delta_{\mathbf{nm}}, \quad [\varphi_0, \Lambda_0] = \frac{i}{k}. \quad (3.43)$$

Se ora integriamo per parti la forma simplettica (3.18), otteniamo un'altra coppia di variabili coniugate,  $\zeta_i$  e  $\varepsilon^{ij}\partial_j\varphi$ : imponendo le relazioni di commutazione canonica otteniamo l'algebra soddisfatta dai modi solitonici del campo  $\zeta$ :

$$[\gamma_1, \Lambda_2] = -\frac{i}{k}, \quad [\gamma_2, \Lambda_1] = \frac{i}{k}. \quad (3.44)$$

Grazie alle algebre dei modi solitonici dei campi ed al fatto che  $\Lambda_\mu \in \mathbb{Z}/k$ , procedendo in modo analogo al caso del bosone chirale (si veda (2.40) e seguenti), si dimostra che i campi  $\varphi$  e  $\zeta_i$  sono compattificati con raggi  $r = r_i = 1$  con  $i = 1, 2$ .

Per calcolare la funzione di partizione è necessario calcolare l'Hamiltoniana  $H$  e le componenti dell'impulso  $P_1$  e  $P_2$  sulle soluzioni alle equazioni del moto (3.39): il risultato è che queste quantità si separano in una parte solitonica ed una parte oscillatoria. Questa separazione emerge anche nella funzione di partizione, che si fattorizza in due contributi:

$$Z = Z_{sol}Z_{osc}. \quad (3.45)$$

La forma dettagliata di  $Z$  è riportata in [43], per l'economia di questa tesi è sufficiente riportare la parte solitonica nella geometria del toro "ortogonale", corrispondente a  $\boldsymbol{\omega}_0 = (\beta, 0, 0)$ ,  $\boldsymbol{\omega}_1 = (0, 2\pi R_1, 0)$ ,  $\boldsymbol{\omega}_2 = (0, 0, 2\pi R_2)$ :

$$Z_{sol} = \sum_{\Lambda_\mu \in \mathbb{Z}^3/k} \exp \left\{ -\beta \left[ \frac{N_0^2}{8\pi^2 R_1 R_2 m} + 2\pi^2 \frac{m}{k^2} \left( N_1^2 \frac{R_2}{R_1} + N_2^2 \frac{R_1}{R_2} \right) \right] \right\}. \quad (3.46)$$

Osserviamo che la somma su  $\Lambda_\mu = N_\mu/k$ , corrispondente alla traccia sui modi solitonici, può essere riscritta in modo da rendere esplicita la presenza di  $k^3$  settori nella teoria di bordo, corrispondenti all'ordine topologico del bulk. Infatti ogni parametro  $\Lambda_\mu$  può essere decomposto nella somma di una parte intera ed una frazionaria, esattamente come la carica delle eccitazioni nell'effetto Hall (2.69):

$$\Lambda_\mu = M_\mu + \frac{m_\mu}{k}, \quad M_\mu \in \mathbb{Z}, \quad m_\mu = 0, 1, \dots, k-1, \quad \mu = 0, 1, 2. \quad (3.47)$$

La funzione di partizione può quindi essere espressa in termini di una somma sulle triplette  $(m_0, m_1, m_2)$  i cui valori definiscono i settori “anionici”:

$$Z_{sol} = \sum_{m_0, m_1, m_2=0}^{k-1} Z_{sol}^{(m_0, m_1, m_2)}. \quad (3.48)$$

dove le funzioni  $Z_{sol}^{(m_0, m_1, m_2)}$  contengono la somma sui coefficienti interi  $M_\mu$ .

# Capitolo 4

## Isolanti topologici, loop model e dualità

In questo capitolo analizziamo una teoria di campo bosonica a massa nulla che descrive il bordo dell'isolante topologico in  $(3+1)$  dimensioni. Questa teoria, detta *loop model* ed anche elettrodinamica (*QED*) non locale, ha il pregio di riprodurre la risposta del fermione libero (3.1) ad un campo elettromagnetico di background. Abbiamo quindi un primo passo per stabilire la relazione fra bosoni e fermioni in  $(2+1)$  dimensioni. Come vedremo, la non località dell'azione ne rende non banale lo studio e, soprattutto, la quantizzazione.

Notiamo, inoltre, che questa teoria è particolarmente interessante perché realizza esplicitamente tutte le trasformazioni di dualità delle teorie di campo in  $(2+1)$  dimensioni recentemente congetturate. Con dualità viene indicata la possibilità di rappresentare lo stesso sistema fisico in due o più descrizioni, ad esempio con campi diversi, bosonici e fermionici. Un famoso esempio di auto-dualità è dato dalla trasformazione di Kramers-Wannier nel modello di Ising bidimensionale [51], corrispondente ad un cambio di variabili nella funzione di partizione che mappa il sistema con temperatura  $1/\beta$  nello stesso sistema con temperatura proporzionale a  $\beta$ , stabilendo quindi una relazione fra le fasi di bassa ed alta temperatura e fra le variabili di ordine e disordine.

All'interno di questa tesi abbiamo già visto un esempio di dualità bosone-fermione in  $(2+1)$  dimensioni: nel capitolo 2, sezione (2.1.1), abbiamo mostrato che delle particelle bosoniche massive, acquisiscono una statistica fermionica se accoppiate in modo opportuno ad un campo di Chern-Simons. Recentemente è stato ipotizzato che questo meccanismo funzioni anche per particelle relativistiche [52] [53] [54]. Sulla base di questa congettura, sono state proposte numerose dualità che formano la cosiddetta "rete di dualità". A titolo di esempio, riportiamo di seguito la dualità che lega una teoria

bosonica ad una fermionica [53]:

$$\mathcal{L}_B[\varphi] + J_{B\mu}a_\mu + \frac{i}{4\pi}ada + \frac{i}{2\pi}adA \sim \mathcal{L}_F[\psi] + J_{F\mu}A_\mu - \frac{i}{8\pi}AdA \quad (4.1)$$

Trascurando per un momento la forma esplicita delle due Lagrangiane  $\mathcal{L}_B$  e  $\mathcal{L}_F$ , la struttura della dualità è la seguente: al lato sinistro abbiamo una corrente di particelle bosoniche accoppiata ad un campo di Chern-Simons  $a_\mu$  che associa un quanto di flusso ad ogni particella. Come abbiamo visto nel capitolo 2, questo provoca un cambiamento nella statistica delle particelle che diventano fermioniche. Fin qui non c'è niente di nuovo rispetto al meccanismo descritto nel capitolo 2: si tratta di un matching “cinematico” dei numeri quantici di carica e spin delle particelle. La novità di queste dualità è che viene congetturata una corrispondenza dinamica nel limite di bassa energia, anche per teorie a massa nulla: ad esempio è stato ipotizzato che uno scalare auto-interagente al punto fisso di Wilson-Fisher sia duale ad un fermione di Dirac libero [55]. Per verificare questa corrispondenza dovremmo risolvere esattamente la teoria interagente, obiettivo irrealizzabile con le tecniche odierne; quindi sono stati considerati dei limiti calcolabili, come ad esempio per grande numero di componenti  $N$  dei campi.

In questo contesto emerge l'importanza del loop model analizzato in questo lavoro di tesi. Per tale teoria è infatti possibile valutare esplicitamente cosa succede applicando le varie trasformazioni di dualità ed il risultato è che il loop model è auto-duale, cioè viene mappato in sé stesso con costante di accoppiamento  $g \rightarrow 1/g$ .

Il contributo originale di questa tesi, contenuto in questo capitolo, consiste nella soluzione di questa teoria, ovvero nel calcolo dello spettro delle eccitazioni solitoniche e della funzione di partizione nella geometria del toro  $\mathbb{T}^3$  e del “cilindro”  $\mathbb{R} \times S^2$ . In particolare in quest'ultima geometria lo spettro determina le dimensioni conformi dei campi e verifica esplicitamente la proprietà di auto-dualità per  $g \rightarrow 1/g$ .

## 4.1 Teoria di bordo non locale

Nel capitolo 3 abbiamo spiegato che la teoria topologica di bulk dell'isolante topologico (3.8), induce l'azione di bordo (3.16), che in segnatura euclidea diventa:

$$S_{bordo}[a, A] = \int \left( \frac{ik}{2\pi} \zeta da + i\zeta dA \right). \quad (4.2)$$

Come già osservato, la teoria del bulk determina solo la struttura simplettica della teoria del bordo ed occorre scegliere una dinamica. Aggiungiamo quindi

la seguente interazione per il campo idrodinamico  $a_\mu$ :

$$\begin{aligned} S_{int}[a] &= \frac{g_0}{8\pi} \int d^3x d^3y f_{\mu\nu}(x) \frac{1}{\sqrt{-\partial^2}}(x, y) f_{\mu\nu}(y) \\ &= \frac{g_0}{4\pi} \int d^3x d^3y a_\mu(x) \frac{1}{\sqrt{-\partial^2}}(x, y) (-\delta_{\mu\nu} \partial^2 + \partial_\mu^{(y)} \partial_\nu^{(y)}) a_\nu(y), \end{aligned} \quad (4.3)$$

dove  $g_0$  è una costante di accoppiamento adimensionale. Per comodità di scrittura d'ora in poi introduciamo le notazioni seguenti:

$$-\partial^2 \equiv -\partial_\mu \partial_\mu, \quad \partial \equiv \sqrt{-\partial^2}, \quad (4.4)$$

e sopprimiamo le dipendenze da  $x$  e  $y$  nel nucleo  $(-\partial^2)^{-1/2}(x, y)$ . Con queste posizioni, l'azione di bordo complessiva assume la seguente forma:

$$S_{bordo}[a, \zeta, A] = \frac{i}{2\pi} \int (k\zeta da + \zeta dA) + \frac{g_0}{4\pi} \int d^3x d^3y a_\mu \left( \frac{-\delta_{\mu\nu} \partial^2 + \partial_\mu \partial_\nu}{\partial} a_\nu \right). \quad (4.5)$$

Se integriamo adesso il campo  $\zeta$  otteniamo il vincolo  $a = A/k$  che implementato nella (4.5) dà luogo all'azione seguente:

$$S_{ind}[A] = \frac{g_0}{4\pi k^2} \int d^3x d^3y A_\mu \left( \frac{-\delta_{\mu\nu} \partial^2 + \partial_\mu \partial_\nu}{\partial} \right) A_\nu, \quad (4.6)$$

che coincide con l'azione indotta fermionica (3.1) per  $k = 1$  e  $g_0 = \pi e/8$ . L'interazione bosonica che abbiamo introdotto riproduce quindi la dinamica del fermione libero nel limite di campo di background  $A_\mu$  debole. Ricordiamo che la teoria di campo scalare locale (3.21) non era in grado di riprodurre questo risultato.

Poniamo ora  $A = 0$ : calcolando l'equazione di moto per  $a_\mu$ , otteniamo la generalizzazione della dualità (3.24):

$$i \frac{k}{2\pi} \varepsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu \zeta_\rho = \frac{g_0}{2\pi} \sqrt{-\partial^2} a_\mu. \quad (4.7)$$

Questa coincide, a meno di fattori, con l'equazione del moto (3.28) della teoria non locale (3.27) che avevamo introdotto euristicamente nel capitolo 3.

## 4.2 Loop Model

Il loop model è una teoria le cui variabili dinamiche sono correnti conservate che interagiscono tramite un'azione non locale [56] [57]:

$$S_{loop}[j] = \pi g \int d^3x d^3y j_\mu(x) \frac{1}{\partial}(x, y) j_\mu(y), \quad \partial_\mu j_\mu = 0. \quad (4.8)$$

Ricordando la forma del propagatore Euclideo in (2+1) dimensioni, abbiamo:

$$\frac{1}{-\partial^2}(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{|x-y|}}, \quad \frac{1}{\partial}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{|x-y|^2}. \quad (4.9)$$

Quindi il loop model possiede un'interazione inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Questa teoria invariante di scala (classicamente) contiene la costante di accoppiamento adimensionale  $g$ . Poiché una corrente conservata in (2+1) dimensioni può essere espressa in termini di un campo di gauge:

$$j_\mu = \frac{1}{2\pi} \varepsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu \zeta_\rho, \quad (4.10)$$

il loop model si può riscrivere come una teoria di gauge:

$$S_{loop}[\zeta] = \frac{g}{4\pi} \int d^3x d^3y \zeta_\mu \left( \frac{-\delta_{\mu\nu} \partial^2 + \partial_\mu \partial_\nu}{\partial} \right) \zeta_\nu, \quad (4.11)$$

corrispondente alla *QED* non locale. Conviene in realtà studiare una generalizzazione di questo modello che comprende anche un termine di Chern-Simons, con costante di accoppiamento  $f$ :

$$S_{loop}[\zeta] = \frac{1}{4\pi} \left[ g \int d^3x d^3y \zeta_\mu \left( \frac{-\delta_{\mu\nu} \partial^2 + \partial_\mu \partial_\nu}{\partial} \right) \zeta_\nu + i f \int d^3x \zeta d\zeta \right]. \quad (4.12)$$

In seguito riscriveremo quest'azione in termini di un nucleo integrale  $D_{\mu\nu}(g, f)$ :

$$S_{loop}[\zeta] = \frac{1}{4\pi} \int d^3x d^3y \zeta_\mu D_{\mu\nu}(g, f) \zeta_\nu, \quad (4.13)$$

$$D_{\mu\nu}(g, f) = g \frac{1}{\partial} (-\delta_{\mu\nu} \partial^2 + \partial_\mu \partial_\nu) + i f \varepsilon_{\mu\rho\nu} \partial_\rho. \quad (4.14)$$

Una proprietà importante è la seguente relazione che lega  $D_{\mu\nu}$  al suo inverso (dimostrata in Appendice A):

$$\int d^3x d^3y j_\mu D^{-1}(g, f)_{\mu\nu} j_\nu = \int d^3x d^3y \zeta_\mu D_{\mu\nu}(\hat{g}, \hat{f}) \zeta_\nu, \quad (4.15)$$

$$\hat{g} = \frac{g}{g^2 + f^2}, \quad \hat{f} = \frac{-f}{g^2 + f^2}, \quad j_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu \zeta_\rho. \quad (4.16)$$

Questa identità algebrica è valida per campi  $\zeta_\mu$  e  $j_\mu$  che soddisfano  $\partial_\mu \zeta_\mu = \partial_\mu j_\mu = 0$ . Come vedremo in seguito, questa formula è alla base dell'auto-dualità del loop model.

### 4.2.1 Relazione fra il loop model e il bordo dell'isolante topologico

Vogliamo dimostrare che la teoria di bordo (4.5) introdotta nel precedentemente può essere ricondotta al loop model. A tal scopo, integriamo sul campo  $a_\mu$  nella (4.5),

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}a \exp \left( - \frac{1}{4\pi} \int d^3x d^3y a_\mu D_{\mu\nu}(g_0, 0) a_\nu - i \int d^3x j_\mu a_\mu \right) \\ & = \exp \left( - \pi \int d^3x d^3y j_\mu D_{\mu\nu}^{-1}(g_0, 0) j_\nu \right), \end{aligned} \quad (4.17)$$

dove  $j_\mu$  è la corrente conservata  $j_\mu = (k/2\pi)\varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\nu\zeta_\rho$ .

Sfruttando la proprietà (4.15) otteniamo:

$$\begin{aligned} S_{bordo}[\zeta_\mu, A_\mu] = \\ \frac{k^2}{4\pi g_0} \int d^3x d^3y \zeta_\mu \left( \frac{-\delta_{\mu\nu}\partial^2 + \partial_\mu\partial_\nu}{\partial} \right) \zeta_\mu + i \int d^3x \zeta dA, \end{aligned} \quad (4.18)$$

che corrisponde all'azione del loop model (4.12) in assenza del termine di Chern-Simons ( $f = 0$ ), accoppiato al campo esterno  $A_\mu$ . Si identificano le costanti di accoppiamento delle due teorie:

$$g = \frac{k^2}{g_0}. \quad (4.19)$$

## 4.3 Dualità del loop model

In questo paragrafo discutiamo le trasformazioni di dualità in  $(2+1)$  dimensioni e le applichiamo al loop model. Conviene introdurre un loop model “bosonico” ed uno “fermionico” con azione  $S_F[A]$  ed  $S_B[A]$ , rispettivamente:

$$\left\{ \begin{aligned} S_B[A] &= \frac{1}{4\pi} \int d^3x d^3y A_\mu D_{\mu\nu}(g_B, f_B) A_\nu, \end{aligned} \right. \quad (4.20)$$

$$\left\{ \begin{aligned} S_F[A] &= \frac{1}{8\pi} \int d^3x d^3y A_\mu D_{\mu\nu}(g, f) A_\nu. \end{aligned} \right. \quad (4.21)$$

Le due azioni differiscono fra loro per un fattore 2: sarà chiaro a breve il senso di queste definizioni.

### 4.3.1 Dualità bosone-bosone

Questa dualità associa ad un bosone  $\phi$  due quanti di flusso: questo non modifica la fase statistica, e quindi la teoria duale descrive nuovamente un bosone, che indicheremo con  $\varphi$ . Schematicamente la dualità è:

$$\mathcal{L}_B[\phi] + j_\mu^{(\phi)} A_\mu \sim \tilde{\mathcal{L}}_B[\varphi] + j_\mu^{(\varphi)} a_\mu + \frac{i}{2\pi} adA. \quad (4.22)$$

Questa relazione è nota anche col nome "dualità particella-vortice" (*particle-vortex duality*) per la ragione seguente. Al lato sinistro abbiamo una corrente bosonica accoppiata direttamente al campo elettromagnetico, per cui la densità  $j_0^{(\phi)}$  corrisponde alla densità di carica dei bosoni. La corrente duale  $j_0^{(\varphi)}$  è invece accoppiata al campo esterno tramite il campo ausiliario  $a_\mu$ . Calcolando l'equazione di moto per  $a_0$ , otteniamo la relazione  $j_0^{(\varphi)} \propto \varepsilon^{ij} \partial_i A_j$ , da cui segue che la densità delle particelle duali è proporzionale al campo magnetico esterno. Dunque l'inserzione di un operatore di campo  $\varphi$ , che corrisponde ad una particella nella teoria duale, comporta l'aggiunta di una carica magnetica nella teoria di partenza. L'interpretazione è quindi che questo operatore crei ad un'eccitazione di vortice nella teoria di partenza, a cui è associata un flusso di campo magnetico.

Le funzioni di partizione delle due teorie sono legate fra loro da una relazione simile alla trasformata di Legendre:

$$Z[A] = \int \mathcal{D}a_\mu \tilde{Z}[a] \exp \left\{ \frac{i}{2\pi} \int adA \right\}, \quad (4.23)$$

dove abbiamo indicato con una tilde le quantità relative alla teoria duale. Per quanto le due funzioni di partizione  $\tilde{Z}[A]$  e  $Z[a]$  siano diverse, la (4.23) implica delle relazioni notevoli fra gli osservabili delle due teorie, come vedremo nella sezione 4.6.1.

Consideriamo la dualità (4.22) applicata al loop model bosonico (4.20). I lati sinistro e destro della dualità sono rispettivamente:

$$\left\{ \begin{aligned} S_B[A] &= \frac{1}{4\pi} \int d^3x d^3y A_\mu D_{\mu\nu}(g, f) A_\nu, \end{aligned} \right. \quad (4.24)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{S}_B[a, A] &= \frac{1}{4\pi} \int d^3x d^3y a_\mu D_{\mu\nu}(\tilde{g}, \tilde{f}) a_\nu + \frac{i}{2\pi} \int adA. \end{aligned} \right. \quad (4.25)$$

Integrando il campo  $a_\mu$  nella (4.25) ed usando la proprietà (4.15) con  $j_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho$  otteniamo:

$$\tilde{S}[A] = \frac{1}{4\pi} \int d^3x d^3y A_\mu D_{\mu\nu}(\hat{\tilde{g}}, \hat{\tilde{f}}) A_\nu. \quad (4.26)$$

Dunque il loop model bosonico è auto-duale rispetto alla dualità bosone-bosone, e la relazione fra gli accoppiamenti delle due teorie è data da [58]:

$$\tilde{g} = \frac{g^2}{f^2 + g^2}, \quad \tilde{f} = \frac{-f}{f^2 + g^2}. \quad (4.27)$$

Introducendo la costante di accoppiamento complessa  $\tau = f + ig$ , la trasformazione corrisponde a  $\tilde{\tau} = -1/\tau$ . Più in generale si può mostrare che il loop model soddisfa relazioni di dualità corrispondenti all'azione di  $SL(2, \mathbb{Z})$  su  $\tau$ , generata da  $\tau \rightarrow \tau + 1$  e  $\tau \rightarrow -1/\tau$  [58].

Nel paragrafo (4.2.1) abbiamo visto che la teoria di bordo (4.5) è equivalente al loop model (4.18). Stiamo considerando la descrizione bosonica delle eccitazioni di bordo, per cui abbiamo il loop model bosonico (4.20) con  $f = 0$ . La relazione di dualità (4.27) si riduce quindi a  $\tilde{g} = 1/g$ : in termini della costante di accoppiamento  $g_0$  della teoria di bordo, questa relazione risulta essere:

$$\tilde{g}_0 = \frac{k^2}{g_0}, \quad (4.28)$$

quando si utilizzi la (4.19).

### 4.3.2 Dualità fermione-fermione

Questa dualità associa ad un fermione  $\psi$  due quanti di flusso: questo non modifica la fase statistica, e dunque la teoria duale descrive nuovamente un fermione, che indicheremo con  $\chi$ . Schematicamente la dualità è:

$$\mathcal{L}_F[\psi] + j_\mu^{(\psi)} A_\mu \sim \tilde{\mathcal{L}}_F[\chi] + j_\mu^{(\chi)} a_\mu + \frac{i}{4\pi} adA. \quad (4.29)$$

Questa volta applichiamo la corrispondenza al loop model fermionico (4.21). I lati destro e sinistro della dualità diventano rispettivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{S}_F[a, A] = \frac{1}{8\pi} \int d^3x d^3y a_\mu D_{\mu\nu}(\tilde{g}, \tilde{f}) a_\nu + \frac{i}{4\pi} \int adA, \\ S_F[A] = \frac{1}{8\pi} \int d^3x d^3y A_\mu D_{\mu\nu}(g, f) A_\nu. \end{array} \right. \quad (4.30)$$

Integrando sul campo  $a_\mu$  la (4.30) Sfruttando la proprietà (4.15) con  $J_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho$  otteniamo:

$$\tilde{S}_F[A] = \frac{1}{8\pi} \int d^3x d^3y A_\mu D_{\mu\nu}(\tilde{g}, \tilde{f}) A_\nu. \quad (4.32)$$

Dunque il loop model (4.31) con costanti di accoppiamento  $g$  ed  $f$  è auto-duale con costanti di accoppiamento  $\tilde{g}$  e  $\tilde{f}$ , determinate dalle equazioni (4.15). Quindi le relazioni di dualità assumono la stessa forma nel loop model bosonico e fermionico. Questo risultato giustifica la scelta delle normalizzazioni della costanti di accoppiamento nelle rispettive azioni (4.20) e (4.21).

### 4.3.3 Dualità fermione-bosone

La dualità bosone-fermione introdotta nella (4.1) è equivalente alla seguente:

$$\mathcal{L}_F[\psi] + j_\mu^{(\psi)} a_\mu - \frac{i}{8\pi} ada + \frac{i}{2\pi} adA - \frac{i}{4\pi} AdA \sim \mathcal{L}_B[\phi] + j_\mu^{(\phi)} A_\mu, \quad (4.33)$$

che si ottiene introducendo ulteriori campi ausiliari ed effettuando integrazioni gaussiane. In questo caso la relazione fra le costanti di partenza e quelle duali è un po' più complicata. Consideriamo il lato fermionico della dualità:

$$\begin{aligned} S_F[A] &= \frac{1}{2\pi} \int d^3x d^3y \frac{1}{4} a_\mu D_{\mu\nu}(g, f) a_\nu \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \int -\frac{1}{4} ada + adA - \frac{1}{2} AdA. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Integriamo sul campo  $a_\mu$  ed otteniamo:

$$\begin{aligned} S[A] &= \frac{1}{2\pi} \int d^3x d^3y A_\mu D_{\mu\nu}(\widehat{g}, \widehat{f+1}) A_\nu - \frac{i}{4\pi} \int AdA \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d^3x d^3y A_\mu D_{\mu\nu}(\widehat{g}, \widehat{f+1} + \frac{1}{2}) A_\nu. \end{aligned} \quad (4.35)$$

L'azione (4.35) corrisponde quindi ad un loop model bosonico, con costanti di accoppiamento  $g_B$  e  $f_B$ :

$$S_B[A] = \frac{1}{4\pi} \int d^3x d^3y A_\mu D_{\mu\nu}(g_B, f_B) A_\nu. \quad (4.36)$$

Utilizzando ancora le (4.16) si ottengono le seguenti relazioni:

$$\left\{ \begin{aligned} g_B &= 2\widehat{g} = \frac{2g}{g^2 + (f+1)^2}, \end{aligned} \right. \quad (4.37)$$

$$\left\{ \begin{aligned} f_B &= 2(\widehat{f+1}) + 1 = \frac{g^2 + f^2 - 1}{g^2 + (f+1)^2}, \end{aligned} \right. \quad (4.38)$$

corrispondenti alla relazione fra le costanti complesse,

$$\tau_B = \frac{\tau - 1}{\tau + 1}, \quad \tau_B = g_B + if_B, \quad \tau = g + if. \quad (4.39)$$

In conclusione il loop model realizza esplicitamente tutte le relazioni di dualità descritte in letteratura.

## 4.4 Argomento di Peierls e diagramma delle fasi del loop model

Il loop model è una teoria invariante di gauge con gruppo di simmetria  $U(1)$ , come la  $QED$ . Ipotizzeremo nel seguito che tale gruppo sia compatto, ovvero che le variabili di campo prendano valori nel cerchio  $S^1$ . Una teoria di gauge compatta descrive in genere una fisica più ricca della controparte non compatta, dovuta alla presenza di eccitazioni solitoniche, come visto nel capitolo 2 per il bosone chirale in  $(1 + 1)$  dimensioni. Ad esempio, Polyakov ha dimostrato [59] che nella  $QED_3$  compatta in tre dimensioni esistono monopoli magnetici dinamici che causano uno schermaggio dell'interazione Coulombiana e danno luogo ad una fase massiva. Le teorie di gauge compatte, inoltre, hanno il vantaggio di ammettere in modo naturale una descrizione su reticolo, che ne fornisce una definizione non perturbativa.

Una stima qualitativa del diagramma delle fasi della teoria può essere ottenuta mediante l'argomento di Peierls, che consiste nel calcolare la probabilità  $P \propto e^{-\beta\Delta F}$  della creazione di una eccitazione nella fase ordinata, dove  $\Delta F$  è la variazione di energia libera definita da:

$$\beta\Delta F = \beta\Delta E - \Delta S, \quad (4.40)$$

in termini dell'energia  $E$  e dell'entropia  $S$ . Se nel limite termodinamico  $V \rightarrow \infty$  abbiamo  $\lim_{V \rightarrow \infty} \beta\Delta F = \infty$ , allora l'eccitazione è soppressa e la fase ordinata è stabile. Viceversa, se il limite è negativo, l'eccitazione può crearsi spontaneamente ed il sistema passa ad una fase disordinata. Quest'argomento è stato applicato con successo a molte teorie, come il modello di Ising, il modello  $XY$  e la  $QED$  in  $(2 + 1)$  dimensioni.

### 4.4.1 Argomento di Peierls per il modello $XY$

Cominciamo col ricordare l'argomento per il modello  $XY$ , definito su un reticolo quadrato di lato  $L$  e passo reticolare  $a$ . Il modello descrive spin

planari con simmetria globale  $O(2)$ , e Hamiltoniana [60]

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j, \quad (4.41)$$

dove  $J > 0$  è la costante di accoppiamento a primi vicini  $\langle ij \rangle$  e  $\mathbf{S}_i = e^{i\theta_i}$ ,  $\theta_i \sim \theta_i + 2\pi$ , è interpretabile come uno spin “classico”. Esistono delle configurazioni degli spin  $\mathbf{S}_i$  che descrivono un vortice localizzato nel centro di una cella del reticolo, la cui energia scala logicamente con la taglia del sistema [60]:

$$\Delta E = \lambda J \ln \left( \frac{L}{a} \right), \quad (4.42)$$

dove  $\lambda$  è una costante numerica. Supponiamo ora di essere nella fase ordinata, cioè con tutti gli spin allineati, e di creare un vortice isolato. Vogliamo calcolare la variazione di energia libera (4.40). La variazione di entropia<sup>1</sup>  $\Delta S$  associata alla possibilità di avere un vortice in una delle celle del reticolo, è data dal logaritmo del numero dei siti reticolari:

$$\Delta S = k_B \ln \left( \frac{L}{a} \right)^2. \quad (4.43)$$

La variazione di energia libera  $\Delta F$  è quindi:

$$\Delta F = \beta \Delta E - \Delta S = \ln \left( \frac{L}{a} \right) [\beta \lambda J - 2k_B]. \quad (4.44)$$

Osserviamo che per  $\beta > \beta_c = 2k_B/\lambda J$  il limite  $L \rightarrow \infty$  di  $\Delta F$  è positivo e quindi l'eccitazione è soppressa: la fase ordinata è stabile a basse temperature ed il gap è nullo. Viceversa per  $\beta < \beta_c$  i vortici proliferano e c'è una fase disordinata massiva. È noto che il modello  $XY$  è descritto nella fase ordinata  $\beta > \beta_c$  dalla teoria conforme bosonica con carica centrale  $c = 1$  del bosone compattificato descritta nel capitolo 2. La semiretta  $J > J_c$  corrisponde alla linea critica della teoria conforme [31].

#### 4.4.2 Argomento di Peierls per la $QED$ in $(2 + 1)$ dimensioni

Come caso intermedio fra il modello  $XY$  e il loop model, analizziamo la  $QED$  compatta in tre dimensioni su reticolo. I difetti sono in questo caso configurazioni di monopolo magnetico, situati nei centri dei cubi elementari

<sup>1</sup>Indicheremo con  $S$  sia l'azione che l'entropia.

del reticolo, e giocano un ruolo analogo a quello dei vortici nel modello  $XY$ . La variazione di entropia  $\Delta S$  è data come nel caso del modello  $XY$  dal logaritmo del numero dei cubi del reticolo in cui possiamo creare un monopolio isolato:

$$\Delta S = k_B \ln \left( \frac{L}{a} \right)^3. \quad (4.45)$$

Per calcolare l'energia del monopolio  $\Delta E$ , ricordiamo innanzitutto che l'Hamiltoniana è proporzionale all'azione euclidea  $\beta H = S$ , che ha l'espressione standard:

$$\beta H = \frac{1}{4e^2} \int d^3x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (4.46)$$

Il monopolio è descritto dalla seguente configurazione di campo:

$$F_{\mu\nu} = \frac{q}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho} \frac{x_\rho}{|x|^3}, \quad (4.47)$$

dove  $q = 1$  è la carica magnetica minima. L'energia è quindi data da:

$$\begin{aligned} \beta \Delta E &= \frac{1}{4e^2} \frac{16\pi^2}{4} \int dr r^2 \frac{1}{r^4} \\ &= \left( \frac{\pi}{e} \right)^2 \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{L} \right] \approx \left( \frac{\pi}{e} \right)^2 \frac{1}{a}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che  $L \gg a$ . Notiamo che l'energia non dipende dalla taglia del sistema  $L$ , quindi l'energia libera  $\beta \Delta F$  è sempre dominata dall'entropia ed ha limite termodinamico  $-\infty$ . Ne segue che i monopoli proliferano per ogni valore dell'accoppiamento (o, equivalentemente, della temperatura) dando luogo ad un'unica fase massiva. Questo semplice argomento introduce il risultato di Polyakov [59].

### 4.4.3 Argomento di Peierls per il loop model

L'analisi per il loop model è analoga a quella del paragrafo precedente, con la differenza che ora l'azione è diversa:

$$S^{(g)}[A] = \frac{g}{4\pi} \int d^3x d^3y F_{\mu\nu}(x) \frac{1}{|x-y|^2} F_{\mu\nu}(y). \quad (4.49)$$

Il calcolo dell'azione (4.49) sulla configurazione del monopolio (4.47), è svolto nell'appendice B, ed il risultato è:

$$\beta \Delta E = \frac{g}{2\pi} \ln \left( \frac{L}{a} \right)^2. \quad (4.50)$$

La variazione di entropia è data anche in questo caso dalla (4.45) e quindi la variazione totale di energia libera in seguito alla creazione di un monopolio è:

$$\Delta F = \frac{g}{2\pi} \ln\left(\frac{L}{a}\right)^2 - k_B \ln\left(\frac{L}{a}\right)^3. \quad (4.51)$$

Entrambi i contributi crescono logicamente con la taglia del sistema: come nel caso del modello  $XY$  c'è un valore critico della costante di accoppiamento  $g_c$ . Per  $g > g_c$  i monopoli isolati sono soppressi, mentre per  $g < g_c$  proliferano, in corrispondenza rispettivamente delle fasi massless e massiva. Quindi, a differenza della  $QED$  locale (4.46), il loop model, grazie all'interazione non locale, permette di avere una fase in cui i monopoli isolati sono soppressi e la teoria è invariante di scala.

Nella fase  $g > g_c$  possono formarsi dei loop chiusi di linee di flusso, schematizzabili come dei solenoidi di sezione infinitesima. Supponiamo quindi di creare uno di questi loop: vogliamo stimare la variazione  $\beta\Delta F$  per capire se le linee di flusso sono soppressi, cioè i loop sono piccoli, o se proliferano, cioè i loop sono estesi. Dato un loop di lunghezza  $R$ , il numero di possibili configurazioni è dato dal numero di cammini chiusi sul reticolo di lunghezza  $R$ . Nel limite termodinamico, questa quantità è data da  $5^{(R/a)}$  per un reticolo cubico (la chiusura del cammino dà un contributo sottodominante nel limite termodinamico). La variazione di entropia  $\Delta S$  a seguito della creazione del loop è quindi:

$$\Delta S = k_B \frac{R}{a} \ln(5). \quad (4.52)$$

Passiamo ora al calcolo del contributo energetico: per semplicità consideriamo una linea di flusso diretta lungo l'asse  $z$  di lunghezza  $R$ . La configurazione di campo associata alla linea di flusso ha come unica componente non nulla:

$$F_{12} = \Phi \delta(x) \delta(y) \theta(z) = -F_{21}, \quad (4.53)$$

dove  $\Phi$  è il flusso di campo magnetico (diverso da  $2\pi$ ). In appendice C è riportato il calcolo dell'energia (4.49) di questa configurazione, il risultato è un andamento lineare con la lunghezza del loop  $R$ :

$$\beta\Delta E = \frac{g\Phi^2}{2\pi} \frac{R}{a}. \quad (4.54)$$

Consideriamo anche il contributo all'energia del termine locale della  $QED_3$ :

$$S_{locale}[A] = \frac{t}{M} \int d^3x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (4.55)$$

Abbiamo introdotto una scala di massa  $M$  e l'accoppiamento  $t$  adimensionale. Per quanto visto nel paragrafo precedente, questo termine è trascurabile per l'energia dei monopoli isolati. Al contrario, nel caso delle linee di flusso determina una energia  $\propto R$  e quindi dello stesso ordine del termine non locale (4.54):

$$\beta\Delta E_{locale} = (8\pi^2 t) \frac{R}{Ma^2}. \quad (4.56)$$

In conclusione l'energia libera di un loop di lunghezza  $R$  è:

$$\beta\Delta F = \left[ \left( \frac{g\Phi^2}{2\pi^2} + 8\pi \frac{t}{Ma} \right) \pi - k_B \ln(5) \right] \frac{R}{a}, \quad (g > g_c), \quad (4.57)$$

nella regione “ordinata”  $g > g_c$  dove i monopoli isolati sono soppressi. L'espressione (4.57) mostra che esiste una retta nel piano  $(g, t)$  corrispondente alla condizione  $\beta\Delta F = 0$ , ovvero  $g + ct = c'$ , con  $c$  e  $c'$  costanti positive. Questa retta è una linea critica che separa la fase massiva in cui i loop sono soppressi,  $t > t_C(g)$  da quella in cui proliferano,  $t < t_C(g)$ . Poiché la costante di accoppiamento  $t$  è irrilevante nel limite di bassa energia, la linea critica corrisponde al loop model con  $t = 0$  già analizzato. La nostra analisi evidenzia anche la presenza di un'altra retta notevole, data da  $\beta\Delta E = 0$ , ovvero  $g + ct = 0$ . Questa linea separa la regione in cui l'azione euclidea del modello è positiva, da quella in cui è negativa, ovvero la teoria non è definita.

La dinamica dei loop chiusi con azione  $S[A] + S_{local}[A]$  è stata simulata numericamente su reticolo nel lavoro [61], in particolare è stato determinato il diagramma di fase per  $g > g_c$  riportato in figura (4.1). Come vediamo dalla figura, il risultato numerico su reticolo corrisponde alla pittura qualitativa che abbiamo ottenuto tramite l'argomento di Peierls.

## 4.5 Loop model come limite di grande $N_F$

Il loop model è una teoria di campo molto particolare perché non ha un termine cinetico standard, bosonico o fermionico. In questa sezione mostriamo che questa teoria corrisponde al limite di grande numero di componenti  $N_F$  di campo della  $QED_3$  e di una sua modifica detta  $QED_{4,3}$ .

### 4.5.1 Loop model e $QED_3$

L'azione dell'elettrodinamica quantistica in  $(2+1)$  dimensioni, con  $N_F$  campi fermionici è la seguente:

$$S_{QED_3}[\psi, A] = \int d^3x \sum_{n=1}^{N_F} \bar{\psi}_n (i\cancel{D} - A) \psi_n + \frac{1}{4e^2} \int d^3x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (4.58)$$

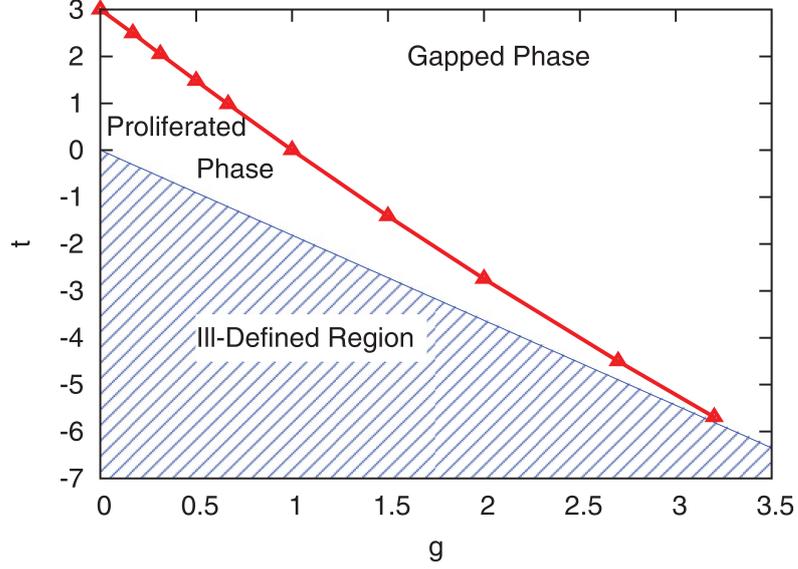


Figura 4.1: In figura è riportato il diagramma di fase del loop model per  $g > g_c$  ottenuto numericamente in [61]. Si distinguono le due fasi in cui i loop chiusi sono soppressi e proliferano, collocate rispettivamente sopra e sotto la linea critica  $t(g)$ , rappresentata in rosso in figura.

Consideriamo il limite di grande  $N_F$ , che è definito da:

$$N_F \rightarrow \infty, \quad e^2 \rightarrow 0, \quad \lambda \equiv e^2 N_F \text{ finito}. \quad (4.59)$$

Innanzitutto assorbiamo la costante di accoppiamento  $e^2$  nel campo elettromagnetico  $A_\mu \rightarrow eA_\mu$ , ed integriamo sui campi fermionici, ottenendo la funzione di partizione seguente:

$$Z = \int \mathcal{D}A \left\{ [\det(i\cancel{\partial} - e\mathbf{A})]^{N_F} \exp\left(-\frac{1}{4} \int d^3x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}\right) \right\}. \quad (4.60)$$

Com'è ben noto il determinante fermionico può essere sviluppato in serie del campo di background  $A_\mu$  ottenendo una serie di diagrammi di Feynman. Il primo termine non nullo, quadratico nei campi, è proporzionale ad  $e^2 = \lambda/N_F$ , mentre i termini successivi contengono potenze maggiori di  $e^2$ , e sono soppressi nel limite (4.59). Si ottiene quindi:

$$Z = \int \mathcal{D}A \exp \left\{ \text{tr} \left( -\frac{\lambda}{2} \frac{1}{i\cancel{\partial}} \mathbf{A} \frac{1}{i\cancel{\partial}} \mathbf{A} \right) - \frac{1}{4} \int d^3x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right\}, \quad (N_F \rightarrow \infty). \quad (4.61)$$

Il primo termine è proprio l'azione indotta del campo elettromagnetico dalla dinamica del fermione libero, l'espressione (3.1). L'azione effettiva a grandi  $N_F$  è quindi <sup>2</sup>:

$$S_{QED_3}[A] = \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \left[ A_\mu \left( \frac{1}{16} \frac{1}{\partial} + \frac{1}{\lambda} \right) (-\delta_{\mu\nu} \partial^2 + \partial_\mu \partial_\nu) A_\nu \right]. \quad (4.62)$$

In quest'espressione abbiamo riscaldato il campo  $A_\mu \rightarrow A_\mu/\sqrt{\lambda}$ . Poiché l'azione (4.62) è quadratica, possiamo leggere direttamente l'inverso del propagatore che, nello spazio degli impulsi, assume la forma seguente:

$$G_{\mu\nu}^{-1}(k) = \left( \frac{1}{16k} + \lambda \right) (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu). \quad (4.63)$$

Quindi:

$$G_{\mu\nu}(k) = (\delta_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) \frac{16\lambda}{\lambda k + 16k^2}. \quad (4.64)$$

Nel regime infrarosso ( $k \ll \lambda$ ) e ultravioletto ( $k \gg \lambda$ ), il propagatore ha i seguenti andamenti:

$$G_{\mu\nu}(k) = -(\delta_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) \begin{cases} \frac{\lambda}{k^2} & k \gg \lambda, \\ \frac{16}{k} & k \ll \lambda. \end{cases} \quad (4.65)$$

Abbiamo quindi dimostrato che il termine di Maxwell è irrilevante nel limite infrarosso per ogni valore di  $\lambda$ , e si disaccoppia dalla teoria:

$$S_{QED_3}[A] \sim \frac{1}{32} \int d^3x d^3y A_\mu \left( \frac{-\delta_{\mu\nu} \partial^2 + \partial_\mu \partial_\nu}{\partial} \right) A_\nu. \quad (4.66)$$

Confrontando l'azione (4.62) con l'azione del loop model (4.8), concludiamo che la  $QED_3$  nel limite di grande  $N_F$  è descritta dal loop model con costante di accoppiamento fissata a

$$g = \pi/8. \quad (4.67)$$

---

<sup>2</sup>Come spiegato nel capitolo 3, nell'azione indotta fermionica è presente anche il termine anomalo di Chern-Simons, che qui abbiamo trascurato. Questo perchè noi siamo in realtà interessati al loop model associato alla teoria di bordo dell'isolante topologico il cui bulk, come descritto nel capitolo 3, cancella l'anomalia della teoria di superficie.

## 4.6 QED mista di Hsiao e Son

Consideriamo l'elettrodinamica in  $(3 + 1)$  dimensioni, nella quale i fermioni sono confinati nell'iperpiano  $x_3 = 0$ , mentre il campo elettromagnetico permea tutto lo spazio: questa teoria è chiamata  $QED_{4,3}$ . L'azione euclidea è:

$$S_{QED_{4,3}}[\psi, A] = \int d^3x \sum_{n=1}^{N_F} \bar{\psi}(i\partial - \mathcal{A})\psi + \frac{1}{4e^2} \int d^4x F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (4.68)$$

La proprietà più interessante di questa teoria è la sua invarianza rispetto alla dualità fermione-fermione (4.29), evidenziata per la prima volta da Hsiao e Son [62]. Dimostriamo questa proprietà nel prossimo paragrafo, per semplicità nel caso di un solo fermione  $N_F = 1$ .

### 4.6.1 Autodualità della $QED_{4,3}$

Consideriamo la trasformazione di dualità (4.29) applicata all'azione (4.68):

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{QED_{4,3}}[\chi, a, A] &= \int d^3x \left[ \bar{\chi}(i\partial - \not{a})\chi - \frac{i}{4\pi} \varepsilon_{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu A_\rho \right] \\ &+ \frac{1}{4e_D^2} \int d^3x F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Concentriamoci ora sul secondo e terzo termine dell'azione (4.69) che dipendono da  $A_\mu$ : osserviamo che il termine lineare è definito in tre dimensioni, mentre quello quadratico, in quattro; conviene quindi riscriverla nella forma seguente,

$$\tilde{S}[a, A] = \int d^4x \left[ \frac{1}{4e_D^2} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - iJ_\mu A_\mu \right], \quad (4.70)$$

dove la corrente  $J_\mu$  è data da<sup>3</sup>:

$$J_\mu(x) = j_\mu(x)\delta(x_3), \quad j_\mu = \frac{1}{4\pi} \varepsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu a_\rho. \quad (4.71)$$

---

<sup>3</sup>Qui stiamo commettendo un abuso di notazione: l'indice  $\mu$  della corrente  $J_\mu$  è quadridimensionale  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , mentre il  $\mu$  nella corrente  $j_\mu$  è tridimensionale  $\mu = 0, 1, 2$ . Nel seguito continueremo ad usare questa scrittura, per non confondersi basterà ricordare che la lettera maiuscola  $J$  indicherà sempre una corrente in quattro dimensioni, mentre la lettera minuscola  $j$  indicherà sempre una corrente tridimensionale.

A questo punto possiamo integrare il campo  $A_\mu$ , dopo aver fissato il gauge di Lorentz  $\partial_\mu A_\mu = 0$ . Il risultato è l'azione seguente per il campo  $a_\mu$ :

$$\begin{aligned}\tilde{S}[a] &= \frac{e_D^2}{2} \int d^4x d^4y J_\mu(x) \frac{1}{-\partial_{(4)}^2}(x, y) J_\nu(y) = \\ &= \frac{e_D^2}{2} \int d^3x d^3y j_\mu(x) \left( \frac{1}{-\partial_{(4)}^2}(x, y) \right) \Big|_{x_3=y_3=0} j_\nu(y).\end{aligned}\quad (4.72)$$

La scrittura  $\partial_{(4)}^2$  indica il D'Alambertiano euclideo quadridimensionale, della cui funzione di Green dobbiamo calcolare la riduzione dimensionale da  $\mathbb{R}^4$  a  $\mathbb{R}^3$ , cioè all'iperpiano su cui sono vincolati i fermioni. Per comodità di notazione, indicheremo nel seguito  $p_\mu = (\tilde{p}, p_3)$  e  $x_\mu = (\tilde{x}, x_3)$ . Otteniamo:

$$\begin{aligned}\left( \frac{1}{-\partial_{(4)}^2}(x, y) \right) \Big|_{x_3=y_3=0} &= \\ = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\tilde{p}\cdot(\tilde{x}-\tilde{y})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_3}{2\pi} \frac{1}{\tilde{p}^2 + p_3^2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\partial}(x, y),\end{aligned}\quad (4.73)$$

corrispondenti all'espressione non locale già introdotta nelle (4.4) e (4.9). Sostituendo poi l'espressione delle correnti (4.71) in termini del campo  $a_\mu$  e ripristinando anche il termine fermionico, l'azione complessiva della teoria è:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{QED_{4,3}}[\chi, a] &= \int d^3x \bar{\chi}(i\cancel{\partial} - \cancel{a})\chi \\ &+ \frac{e_D^2}{64\pi^2} \int d^3x d^3y a_\mu \left( \frac{-\delta_{\mu\nu}\partial^2 + \partial_\mu\partial_\nu}{\partial} \right) a_\nu.\end{aligned}\quad (4.74)$$

Integrando infine su  $a_\mu$  (dopo aver imposto il gauge di Lorentz), otteniamo un'interazione non locale per i fermioni (confronta con la sezione 4.2):

$$\tilde{S}_{QED_{4,3}}[\chi] = \int d^3x (\bar{\chi})(i\cancel{\partial})\chi + \frac{16\pi^2}{e_D^2} \int d^3x d^3y j_\mu^{(\chi)} \frac{1}{\partial} j_\nu^{(\chi)},\quad (4.75)$$

dove abbiamo indicato con  $j_\mu^\chi$  la corrente fermionica:

$$j_\mu^{(\chi)} = \bar{\chi}\gamma_\mu\chi.\quad (4.76)$$

Torniamo adesso alla  $QED_{4,3}$  originale, (4.68), ed integriamo direttamente sul campo elettromagnetico (sempre nel gauge di Lorentz). Ripetendo gli

stessi passaggi effettuati per arrivare all'azione (4.74), otteniamo un'azione fermionica che ha la stessa forma della (4.75)

$$S_{QED_{4,3}}[\psi] = \int d^3x \bar{\psi}(i\cancel{\partial})\psi + \frac{e^2}{4} \int d^3x d^3y j_\mu^{(\psi)} \frac{1}{\partial} j_\nu^{(\psi)}, \quad (4.77)$$

dove  $j^{(\psi)}$  è di nuovo la corrente fermionica, questa volta relativa al campo  $\psi$ :

$$j_\mu^{(\psi)} = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi. \quad (4.78)$$

Confrontando le (4.75) e (4.77) concludiamo che le azioni della  $QED_{4,3}$  e della sua duale hanno la stessa forma. Le costanti di accoppiamento delle due teorie sono legate dalla relazione:

$$\frac{e_D^2}{4} = \frac{16\pi^2}{e^2} \rightarrow e_D = \frac{8\pi}{e}. \quad (4.79)$$

Dalle relazione (4.23) fra le funzioni di partizione delle due teorie e prendendo due derivate rispetto al campo esterno  $A_\mu$  si dimostra il risultato per le conducibilità  $\sigma_{ij}(e)$  e per la sua duale [62]

$$\sigma_{ij}(e)\tilde{\sigma}_{jk}(e_D) = \frac{1}{(4\pi)^2}\delta_{ik}, \quad i, j = 1, 2. \quad (4.80)$$

Questa relazione ricorda le identità di Maxwell dei potenziali termodinamici in meccanica statistica. In particolare, al punto auto-duale  $e = e_D$  si ottiene il risultato esatto per la conducibilità longitudinale:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}, \quad e = e_D = \sqrt{8\pi}. \quad (4.81)$$

#### 4.6.2 Limite di grande $N_F$ della $QED_{4,3}$

Vogliamo calcolare il limite di grande  $N_F$  della  $QED_{4,3}$ : conviene partire dall'azione duale (4.74) dopo aver integrato il campo elettromagnetico:

$$S_{QED_{4,3}}[\chi, a] = \int d^3x \sum_{n=1}^{N_F} \bar{\chi}_n(i\cancel{\partial} - \not{a})\chi_n + \frac{e_D^2}{64\pi^2} \int d^3x d^3y a_\mu \left( \frac{-\delta_{\mu\nu}\partial^2 + \partial_\mu\partial_\nu}{\partial} \right) a_\nu. \quad (4.82)$$

Il limite di grande  $N_F$  è definito anche in questo caso dal limite in (4.59), e sviluppando il determinante fermionico come nel caso della  $QED_3$ (con le

stesse precisazioni fatte nel caso della  $QED_3$  riguardo al termine di Chern-Simons), otteniamo la seguente azione:

$$S_{QED_{4,3}}[a] = \left( \frac{1}{32} + \frac{e_D^2}{64\pi^2 N_F} \right) \int d^3x, d^3y a_\mu \left( \frac{-\delta_{\mu\nu} \partial^2 + \partial_\mu \partial_\nu}{\partial} \right) a_\nu, \quad (4.83)$$

dove abbiamo riscaldato il campo  $a_\mu$  come  $a_\mu \rightarrow a_\mu / \sqrt{N_F}$ . Infine, osserviamo che dalla (4.79) e (4.59) deriva che  $e_D^2 / N_F = 32\pi^2 / \lambda$ , per cui l'azione è infine:

$$S_{QED_{4,3}}[a] = \left( \frac{1}{32} + \frac{2}{\lambda} \right) \int d^3x, d^3y a_\mu \left( \frac{-\delta_{\mu\nu} \partial^2 + \partial_\mu \partial_\nu}{\partial} \right) a_\nu. \quad (4.84)$$

Concludiamo che anche la  $QED_{4,3}$  nel limite di grande  $N_F$  è descritta da un loop model: confrontando le azioni (4.84) e (4.8) emerge che le costanti di accoppiamento sono legate dalla relazione:

$$g = \pi \left( \frac{1}{8} + \frac{8}{\lambda} \right). \quad (4.85)$$

In questa teoria la costante di accoppiamento  $\lambda$  è adimensionale e quindi rimappa la linea critica del loop model<sup>4</sup>. La  $QED_3$  nel limite  $N_F = \infty$  si ritrova in questa linea al punto  $\lambda = \infty$ .

L'analisi nel limite  $N_B = \infty$  della  $QED_3$  e della  $QED_{4,3}$  con campi scalari è analogo e riproduce ancora il loop model a meno di fattori numerici nelle costanti di accoppiamento. Infatti, gli sviluppi quadratici del determinante bosonico e fermionico sono della stessa forma, modulo il termine di Chern-Simons.

## 4.7 Funzione di partizione del loop model sul toro $\mathbb{T}^3$

In questa sezione calcoliamo la funzione di partizione della teoria di bordo (4.18) nella geometria spaziale del toro  $\mathbb{T}^2$ , a temperatura  $T = k_B / \beta$ . La varietà spazio-temporale complessiva è quindi  $\mathcal{M} = \mathbb{T}^2 \times S_\beta^1 = \mathbb{T}^3$ , dove  $S_\beta^1$  è il cerchio di raggio  $\beta$  su cui è compattificato il tempo euclideo. Per semplicità, consideriamo il campo elettromagnetico nullo e il toro ortogonale. La funzione di partizione è data dall'integrale funzionale:

$$Z = \int \mathcal{D}a \mathcal{D}\zeta e^{-S_{bordo}}, \quad (4.86)$$

---

<sup>4</sup>La teoria possiede una linea critica anche per  $N_F$  finito. Si veda il lavoro [63] per la dimostrazione che la funzione  $\beta(e^2)$  del gruppo di rinormalizzazione è nulla.

dove l'azione  $S_{bordo}$  è l'azione (4.5) con  $A = 0$ :

$$S_{bordo} = \int d^3x \left[ \frac{ik}{2\pi} \zeta da + \frac{g_0}{4\pi} \int d^3y a_\mu \left( \frac{-\delta_{\mu\nu} \partial^2 + \partial_\mu \partial_\nu}{\partial} \right) a_\nu \right]. \quad (4.87)$$

Questa azione va corredata con le opportune condizioni sui modi solitonici dei campi, che sono state derivate nel capitolo 3:

$$\int_{\mathbb{T}^2} d^2x \varepsilon^{ij} \partial_i \zeta_j = \frac{2\pi N_0}{k}, \quad N_0 \in \mathbb{Z}, \quad (4.88)$$

$$\int_{\Gamma_2} dx_2 a_2 = \frac{2\pi N_1}{k}, \quad N_1 \in \mathbb{Z}, \quad (4.89)$$

$$\int_{\Gamma_1} dx_1 a_1 = \frac{2\pi N_2}{k}, \quad N_2 \in \mathbb{Z}. \quad (4.90)$$

Inoltre, la compattezza del campo di gauge  $a_\mu$  permette delle condizioni periodiche non banali sul toro corrispondenti a “monopoli globali”, ovvero a flussi di campo magnetico non nulli sul toro:

$$\int_{\mathbb{T}^2} \varepsilon_{ij} \partial_i a_j = \frac{2\pi}{q_0} M_0, \quad M_0 \in \mathbb{Z}. \quad (4.91)$$

Qui  $q_0$  è la carica minimale delle eccitazioni rispetto al campo  $a_\mu$ .

Le configurazioni solitoniche del campo corrispondono a soluzioni non banali delle equazioni di moto della teoria, attorno alle quali si valuta il path-integral (4.86). Questa analisi non è possibile nella teoria non locale (4.87) che non è ben definita on-shell. La strategia che adottiamo sarà quella di riformulare il loop model in una teoria locale in  $(3+1)$  dimensioni. Prendiamo spunto dalla  $QED_{4,3}$ , descritta precedentemente nel paragrafo (4.6), nella quale il fotone vive in  $(3+1)$  dimensioni e si accoppia ad una corrente sulla superficie in  $(2+1)$  dimensioni, dando luogo ad una teoria ridotta non locale. Il nostro problema è opposto: abbiamo la teoria non locale in  $(2+1)$  dimensioni da riformulare in  $(3+1)$  dimensioni.

Il primo passo è quindi capire quale varietà quadridimensionale vada considerata. Innanzitutto consideriamo la geometria spazio-temporale in  $(2+1)$  dimensioni: questa è, come già detto, costituita dal toro  $\mathbb{T}^3$  ortogonale. In particolare, i vettori primitivi spaziali  $\omega_i$  con  $i = 1, 2$  e quello temporale  $\omega_0$  hanno le seguenti componenti:

$$\omega_1 = (0, 2\pi R_1, 0), \quad \omega_2 = (0, 0, 2\pi R_1), \quad \omega_0 = (2\pi T = \beta, 0, 0). \quad (4.92)$$

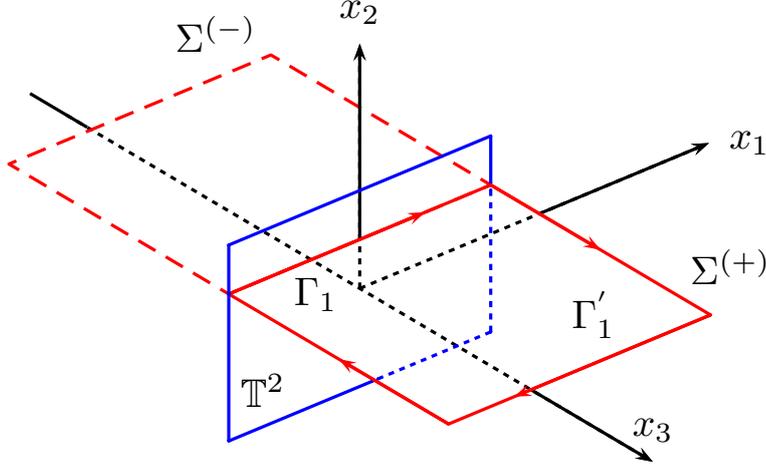


Figura 4.2: Geometria spaziale che realizza l'estensione tridimensionale del toro  $\mathbb{T}^2$ . Il toro originale è disegnato in blu, mentre le superfici  $\Sigma^{(+)}$  e  $\Sigma^{(-)}$  sono invece in rosso.

dove  $R_1$  ed  $R_2$  sono i raggi dei due cicli non banali del toro spaziale. Le coordinate che parametrizzano la lunghezza lungo le direzioni dei tre vettori primitivi saranno indicate con  $x_0, x_1, x_2$ , rispettivamente. La scelta più naturale per aggiungere una dimensione, è introdurre una terza direzione spaziale  $x_3$ , ortogonale a  $x_1$  e  $x_2$ : la varietà di partenza è ottenuta ponendo  $x_3 = 0$ . Questa geometria è rappresentata in figura (4.2).

Indicheremo d'ora in poi con  $\mathcal{M}_3$  la varietà spaziotemporale su cui è definita la teoria non locale di partenza, e con  $\mathcal{M}_4$  la varietà quadridimensionale su cui è definita la teoria locale associata. Basandoci sull'analisi della  $QED_{4,3}$  effettuate in (4.6), consideriamo la seguente azione in  $(3 + 1)$  dimensioni:

$$S_4[\hat{a}, \zeta] = \frac{1}{4e_0^2} \int_{\mathcal{M}_4} d^4x \hat{f}_{\mu\nu} \hat{f}_{\mu\nu} + i \frac{k}{2\pi} \int_{\mathcal{M}_3} a d\zeta. \quad (4.93)$$

Il campo  $\hat{a}$  è l'estensione quadridimensionale del campo  $a_\mu$  dell'azione (4.87), cioè coincide con quest'ultimo su  $\mathcal{M}_3$ , e gioca il ruolo del campo elettromagnetico della  $QED_{4,3}$ . Il termine tridimensionale può essere scritto in modo analogo al termine di corrente nella  $QED_{4,3}$ , come un integrale quadridimensionale:

$$i \int_{\mathcal{M}_4} d^4x J_\mu \hat{a}_\mu, \quad (4.94)$$

dove  $J_\mu$  è definita analogamente alla (4.71):

$$J_\mu = \delta(\mathcal{M}_3) j_\mu = \delta(\mathcal{M}_3) \frac{k}{2\pi} \varepsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu \zeta_\rho. \quad (4.95)$$

La  $\delta(\mathcal{M}_3)$  è una delta di Dirac sulla varietà in  $(2 + 1)$  dimensioni su cui vogliamo definire la teoria non locale: in questo caso, come abbiamo detto,  $\delta(\mathcal{M}_3) = \delta(x_3)$ . Infine,  $e_0$  è una costante di accoppiamento che determineremo successivamente.

Analogamente al caso della  $QED_{4,3}$  (Cap. 4.6.1), l'integrazione del campo  $\hat{a}_\mu$  determina una interazione non locale in  $(2 + 1)$  dimensioni per il campo  $\zeta_\mu$  che corrisponde alla teoria (4.18), che riscriviamo per  $A_\mu = 0$ ,

$$S_{bordo}[\zeta] = \frac{k^2}{2\pi g_0} \int d^3x d^3y \zeta_\mu \left( \frac{-\delta_{\mu\nu} \partial^2 + \partial_\mu \partial_\nu}{\partial} \right) \zeta_\mu. \quad (4.96)$$

Questa espressione è equivalente alla (4.87) integrata sul campo  $a_\mu$ .

È necessaria ora una precisazione. Abbiamo finora svolto le integrazioni gaussiane sui campi che compaiono quadraticamente nell'azione. Tuttavia questo è corretto solo per la parte oscillatoria dei campi: se sono presenti componenti solitoniche a causa delle condizioni al contorno non banali, come la (4.88) e seguenti, è necessario procedere in modo diverso. Decomponiamo quindi i campi in una parte solitonica ed una parte oscillatoria :

$$\hat{a} = \hat{a}_{sol} + \hat{a}_{osc}, \quad \zeta = \zeta_{sol} + \zeta_{osc}. \quad (4.97)$$

Come conseguenza di questa scomposizione, la funzione di partizione si fattorizza:

$$Z = \int \mathcal{D}\hat{a}_{sol} \mathcal{D}\zeta_{sol} e^{-S_4[\hat{a}_{sol}, \zeta_{sol}]} \int \mathcal{D}\hat{a}_{osc} \mathcal{D}\zeta_{osc} e^{-S_4[\hat{a}_{osc}, \zeta_{osc}]}. \quad (4.98)$$

I modi solitonici devono soddisfare le condizioni (4.88) e quindi la loro forma funzionale è fissata, ma dipenderanno dai numeri  $N_0, N_1, N_2, M_0$ : segue che la parte solitonica della funzione di partizione è in realtà data da una somma su tali parametri:

$$Z_{sol} = \sum_{N_0, N_1, N_2, M_0 \in \mathbb{Z}} e^{-S_4(\hat{a}_{sol}, \zeta_{sol})}. \quad (4.99)$$

Per quanto riguarda le parti oscillatorie dei campi, gli integrali gaussiani svolti precedentemente sono corretti. L'integrazione del campo  $\hat{a}_\mu$  nella (4.93) determina la (4.96) con costante di accoppiamento:

$$e_0 = \frac{4\pi}{g_0}. \quad (4.100)$$

Con questi accorgimenti, la teoria quadridimensionale (4.93) definisce la teoria non locale (4.87) sulla sottovarietà  $\mathcal{M}_3$ .

Infine, dobbiamo scegliere il gauge in cui lavorare. Per entrambi i campi consideriamo il gauge di Lorentz:

$$\partial_\mu \hat{a}_\mu = 0, \quad \partial_\mu \zeta_\mu = 0. \quad (4.101)$$

### 4.7.1 Modi solitonici

In questo paragrafo calcoliamo i modi solitonici dei campi  $\hat{a}$  e  $\zeta$  imponendo le condizioni (4.88) e seguenti.<sup>5</sup> Osserviamo che, pur essendo formulate in termini del campo  $a_\mu$ , queste devono essere soddisfatte anche dall'estensione  $\hat{a}$  in quanto fanno riferimento solo alla parte (2+1) dimensionale del problema, dove  $a_\mu$  e  $\hat{a}$  coincidono. Poiché le configurazioni di campo solitoniche sono statiche, la loro azione euclidea è data da  $S_4[\hat{a}_{sol}, \hat{\zeta}_{sol}] = \beta H$ , dove  $H$  è l'Hamiltoniana Minkowskiana: calcoleremo dunque quest'ultima a partire dalla versione Minkowskiana dell'azione (4.93):

$$S_4[\hat{a}, \zeta] = -\frac{1}{4e_0^2} \int_{\mathcal{M}_4} d^4x f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - \int_{\mathcal{M}_4} d^4x J_\mu \hat{a}^\mu, \quad (4.102)$$

dove la corrente  $J_\mu$  è data da:

$$J^\mu = j^\mu \delta(x_3), \quad j^\mu = \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \zeta_\rho. \quad (4.103)$$

L'azione  $S_4$  descrive la  $QED_4$ , la cui Hamiltoniana è:

$$H = \frac{1}{2e_0^2} \int d^3x (\mathbf{B}^2 + \mathbf{E}^2), \quad (4.104)$$

dove l'integrale corre sulla parte spaziale di  $\mathcal{M}_4$ , cioè sulle coordinate  $x_1, x_2$  e  $x_3$ , mentre  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono il campo elettrico e magnetico derivati dal potenziale vettore  $\hat{a}_\mu$ .

La condizione (4.88) su  $\zeta_\mu$  è soddisfatta ponendo:

$$\varepsilon^{ij} \partial_i \zeta_j = \frac{2\pi N_0}{kV^{(2)}}. \quad (4.105)$$

La corrente  $j_\mu$  ha quindi come unica componente non nulla  $j_0$ :

$$j^0 = \frac{k}{2\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i \zeta_j = \frac{N_0}{V^{(2)}}. \quad (4.106)$$

---

<sup>5</sup>Per comodità sopprimiamo il pedice *sol*.

Consideriamo adesso l'equazione di moto per  $\hat{a}_0$  derivante dall'azione (4.102):

$$\nabla^2 \hat{a}_0 = -e_0^2 J_0 = -e_0^2 \frac{N_0}{V^{(2)}} \delta(x_3). \quad (4.107)$$

Questa equazione ha per soluzione:

$$\hat{a}_0(x_3) = -\frac{e_0^2 N_0}{V^{(2)}} \frac{|x_3|}{2}. \quad (4.108)$$

La configurazione (4.108) corrisponde ad un campo elettrico diretto lungo la direzione  $x_3$  pari a:

$$E_3 = -\frac{d}{dx_3} a_0 = \frac{e_0^2 N_0}{2V^{(2)}} \text{sign}(x_3). \quad (4.109)$$

Il contributo all'Hamiltoniana di questa configurazione è divergente: per regolarizzarlo introduciamo un cut-off infrarosso limitando l'intervallo di definizione della coordinata  $x_3 \in [-1/(2M), 1/(2M)]$  ed imponiamo condizioni al contorno di Dirichlet. Il valore di  $M$  sarà fissato in seguito, per ora consideriamolo un parametro piccolo. Ora possiamo calcolare il contributo elettrico dell'Hamiltoniana:

$$\begin{aligned} H_{el} &= \frac{1}{2e_0^2} \int d^3x \mathbf{E}^2 \\ &= \frac{1}{2e_0^2} \int_0^{2\pi R_1} dx_1 \int_0^{2\pi R_2} dx_2 \int_{-1/2M}^{1/2M} dx_3 \frac{N_0^2}{4V^{(2)2}} \\ &= \frac{e_0^2 N_0^2}{8V^{(2)} M}. \end{aligned} \quad (4.110)$$

Passiamo ora alla condizione (4.89): questa può essere trasformata da un integrale di linea lungo la curva  $\Gamma_1$  in uno di superficie sulla superficie  $\Sigma^{(+)}$  tramite il teorema di Stokes. Osserviamo che poiché in realtà la curva  $\Gamma_1$  è chiusa, i bordi di  $\Sigma^{(+)}$  sono costituiti dalla stessa  $\Gamma_1$  e dalla curva  $\Gamma'_1$ . Tuttavia il campo  $\hat{a}$  lungo tale curva è nullo a causa delle condizioni al contorno imposte.

$$\begin{aligned} \frac{2\pi N_1}{k} &= \oint_{\Gamma_1} dx_\mu \hat{a}_\mu = \int_{\Sigma^{(+)}} d^2x \varepsilon_{ijk} \partial_i \hat{a}_j \hat{n}_k \\ &= \int_0^{2\pi R_1} dx_1 \int_0^{\frac{1}{2M}} dx_3 \varepsilon_{ij} \partial_i \hat{a}_j, \quad i, j = 1, 3. \end{aligned} \quad (4.111)$$

dove  $\hat{n}$  è la normale alla superficie  $\Sigma^{(+)}$ , orientata lungo la direzione  $x_2$ . Questa condizione è soddisfatta da un campo magnetico diretto lungo  $x_2$  dato da:

$$B_2 = \frac{2\pi N_1}{k} \frac{2M}{2\pi R_1} \text{sign}(x_3) = \frac{2M}{k} \frac{N_1}{R_1} \text{sign}(x_3). \quad (4.112)$$

La funzione segno compare perché, invece di  $\Sigma^{(+)}$  avremmo potuto considerare la superficie  $\Sigma^{(-)}$ , in linea tratteggiata in figura. In questo caso la normale ha segno opposto, che viene compensato dalla funzione segno. Con considerazioni analoghe, dalla (4.90) otteniamo un campo magnetico diretto lungo  $x_1$ :

$$B_1 = \frac{2M}{k} \frac{N_2}{R_2} \text{sign}(x_3). \quad (4.113)$$

Infine, la (4.91) produce una configurazione di campo magnetico costante diretta lungo l'asse  $x_3$ :

$$\varepsilon^{ij} \partial_i \hat{a}_j = \frac{2\pi M_0}{q_0 V^{(2)}}, \quad i, j = 1, 2 \rightarrow B_3 = \frac{2\pi M_0}{q_0 V^{(2)}}. \quad (4.114)$$

Il contributo magnetico all'Hamiltoniana è in conclusione:

$$\begin{aligned} H_{mag} &= \frac{1}{2e_0^2} \int d^3x \left( B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 \right) \\ &= \frac{8\pi^2 M}{e_0^2} \left( \frac{N_1^2}{k^2} \frac{R_2}{R_1} + \frac{N_2^2}{k^2} \frac{R_1}{R_2} + \frac{M_0^2}{q_0^2 V^{(2)} M^2} \right). \end{aligned} \quad (4.115)$$

L'Hamiltoniana totale è data dalla somma della parte elettrica (4.110) e magnetica (4.115):

$$H = \left[ \frac{8\pi^2 M}{e_0^2} \left( \frac{N_1^2}{k^2} \frac{R_2}{R_1} + \frac{N_2^2}{k^2} \frac{R_1}{R_2} + \frac{M_0^2}{4q_0^2 V^{(2)} M^2} \right) + \frac{e_0^2 N_0^2}{8V^{(2)} M} \right]. \quad (4.116)$$

In conclusione, la funzione di partizione dei modi solitonici sul toro ha la forma:

$$\begin{aligned} Z_{sol} = \sum_{N_0, N_1, N_2, M_0 \in \mathbb{Z}} \exp \left\{ -\beta \left[ \frac{8\pi^2 M}{e_0^2} \left( \frac{N_1^2}{k^2} \frac{R_2}{R_1} + \frac{N_2^2}{k^2} \frac{R_1}{R_2} + \frac{M_0^2}{4q_0^2 V^{(2)} M^2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{e_0^2 N_0^2}{8V^{(2)} M} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.117)$$

Questa formula descrive la parte non banale della dinamica del loop model sul toro  $\mathbb{T}^3$ .

Osserviamo il sorprendente risultato che l'espressione (4.117) è identica (per  $M_0 = 0$ ) alla corrispondente quantità della semplice teoria bosonica locale discussa al capitolo 3, eq. (3.46), modulo il riscaldamento della massa  $M = e_0^2 m/4$ . Per comprendere questa relazione occorre fare un'analisi approfondita del cut-off infrarosso nel loop model che ci porterà ad una definizione più precisa di questa teoria.

## 4.8 Cut-off infrarosso nel loop model

### 4.8.1 Corrispondenza con la teoria bosonica locale

Abbiamo già notato che l'espressione (4.87) della Lagrangiana del loop model in  $(2 + 1)$  dimensioni presenta alcuni problemi: non esiste la formulazione Hamiltoniana e la Lagrangiana è singolare sulle equazioni del moto (on-shell). Per ovviare a questi problemi abbiamo riformulato la teoria in  $(3 + 1)$  dimensioni come una teoria locale con Hamiltoniana standard ed abbiamo calcolato il contributo dei modi solitonici. Ciononostante, il calcolo richiede l'introduzione di un cut-off infrarosso  $M$  nella dimensione aggiuntiva.

In questa sezione riformuliamo il loop model introducendo esplicitamente una massa per il "fotone". Questa può essere introdotta in  $(3 + 1)$  o  $(2 + 1)$  dimensioni in modo equivalente, ottenendo ( $\partial = \sqrt{-\partial_{(3)}^2}$ ):

$$\begin{aligned} & \bullet \left( \frac{1}{-\partial_{(4)}^2} \right) \Big|_{x_3=y_3=0} \rightarrow \left( \frac{1}{-\partial_{(4)}^2 + \tilde{m}^2} \right) \Big|_{x_3=y_3=0} = \frac{1}{\pi \partial} \arctan \left( \frac{\partial}{\pi \tilde{m}} \right), \\ & \bullet \frac{1}{\partial} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{-\partial_{(3)}^2 + m^2}}. \end{aligned}$$

Le due espressioni eliminano in modo analogo le singolarità infrarosse del termine non locale. Nel seguito scegliamo la seconda regolarizzazione per ragioni di semplicità. Siamo quindi condotti a definire la seguente estensione "massiva" del loop model:

$$\begin{aligned} S_m[a, \zeta] &= \frac{i}{2\pi} \int k \zeta da \\ &+ \frac{g_0}{4\pi} \int d^3x d^3y a_\mu \left( \frac{\delta_{\mu\nu}(-\partial^2 + m^2) + \partial_\mu \partial_\nu}{\sqrt{-\partial^2 + m^2}} a_\nu \right). \end{aligned} \quad (4.118)$$

Nel gauge di Lorentz  $\partial_\mu a_\mu = 0$ , l'azione si riduce a:

$$S_m[a, \zeta] = \frac{i}{2\pi} \int k\zeta da + \frac{g_0}{4\pi} \int d^3x d^3y a_\mu \sqrt{-\partial^2 + m^2} a_\mu. \quad (4.119)$$

L'equazione di moto per  $a_\mu$  di questa teoria è:

$$i \frac{k}{2\pi} \varepsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu \zeta_\rho = \frac{g_0}{2\pi} \sqrt{-\partial^2 + m^2} a_\mu \rightarrow \begin{cases} \frac{g_0}{2\pi} \partial a_\mu, & \text{UV,} \\ \frac{g_0}{2\pi} m a_\mu, & \text{IR.} \end{cases} \quad (4.120)$$

Concludiamo che il loop model massivo interpola fra il modello non locale originale e la teoria bosonica locale (3.21) a livello delle equazioni del moto. Se inoltre consideriamo l'equazione del moto per  $\zeta_\mu$ :

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu a_\rho = 0 \rightarrow a_\mu = \partial_\mu \varphi, \quad (4.121)$$

e la sostituiamo nell'azione otteniamo:

$$S_m = \frac{m^2 g_0}{4\pi} \int d^3x \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi, \quad (\text{on-shell}). \quad (4.122)$$

In conclusione, l'azione del loop model massivo (4.118) e del bosone locale (3.23) coincidono on-shell, a meno di fattori moltiplicativi. Questo fatto spiega perché il risultato per l'azione dei modi solitonici è identico nelle due teorie, (4.117) e (3.46). Abbiamo quindi ottenuto una verifica del calcolo effettuato mediante la riformulazione del loop model in  $(3+1)$  dimensioni.

## 4.8.2 Loop model invariante di scala

La regolarizzazione del loop model con un parametro di massa fissato non è soddisfacente perché viola l'invarianza di scala a livello quantistico, in disaccordo con la dinamica fermionica. È possibile introdurre un'altra regolarizzazione infrarossa compatibile con l'invarianza di scala: possiamo sostituire la massa  $M$ , parametro esterno, con la dimensione spaziale del sistema  $1/\sqrt{R_1 R_2}$ . Otteniamo quindi la seguente espressione della funzione di partizione solitonica sul toro (con  $e_0^2 = 4\pi/g_0$ ):

$$Z_{sol} = \sum_{N_0, N_1, N_2, M_0 \in \mathbb{Z}} \exp \left\{ -\beta \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}} \left[ \frac{N_0^2}{8\pi g_0} + \frac{2\pi g_0}{k^2} \left( N_1^2 \frac{R_2}{R_1} + N_2^2 \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{M_0^2}{q_0^2} \frac{g_0}{8\pi} \right] \right\},$$

che è manifestamente invariante di scala e invariante modulare per  $R_1 \Leftrightarrow R_2$ .

### 4.8.3 Modi oscillatori

La parte oscillatoria dell'azione non contiene modi nulli soluzioni delle equazioni del moto, quindi non ha bisogno di regolatori: la riduzione dimensionale produce l'azione del loop model,

$$S = \frac{k^2}{2\pi g_0} \int d^3x d^3y \zeta_\mu \left( \frac{-\delta_{\mu\nu} \partial^2 + \partial_\mu \partial_\nu}{\partial} \right) \zeta_\mu, \quad (4.123)$$

Passando nello spazio degli impulsi ed imponendo il gauge di Lorentz sul campo  $\zeta_\mu$ , quest'azione diventa:

$$S = \frac{k^2}{2\pi g_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}^3 \neq (0,0,0)} \zeta_{\mu,n} \sqrt{\mathbf{k}_n^2} \zeta_{\mu,n}, \quad (4.124)$$

dove  $\mathbf{k}_n = (\omega_{n_0}, k_{1n_1}, k_{2n_2})$  è l'autovalore di  $-\partial^2$  sul tri-toro. Se stessimo studiando la *QED* in  $(2+1)$  dimensioni, ci sarebbe solo una polarizzazione fisica del campo  $\zeta_\mu$ . Infatti, oltre al vincolo del gauge di Lorentz,  $\zeta_0$  non è quantizzato poiché il relativo impulso  $\pi_0$  è nullo. Nel loop model, tuttavia,  $\pi_0$  è non nullo a causa della non località dell'azione, e quindi abbiamo due gradi di libertà scalari. Dunque la parte oscillatoria della funzione di partizione è data dal quadrato del determinante di  $\partial$ , cioè di  $-\partial^2$ :

$$Z_{osc} \propto \left[ \det' \left( \sqrt{\partial} \right) \right]^{-2} = \det' \left( \sqrt{-\partial^2} \right)^{-1}, \quad (4.125)$$

dove l'apice indica l'eliminazione dei modi zero. Notiamo che questa espressione è proprio la forma lagrangiana della funzione di partizione del bosone libero massless, cioè della teoria locale discussa nel capitolo 3. Ciononostante, il loop model presenta dei modi solitonici differenti dopo la scelta del cut-off infrarosso consistente con l'invarianza di scala.

In conclusione l'espressione della funzione di partizione sul toro  $\mathbb{T}^3$  del loop model è data da:

$$Z = Z_{sol} Z_{osc}, \quad (4.126)$$

dove  $Z_{sol}$  e  $Z_{osc}$  sono date rispettivamente da:

$$Z_{sol} = \sum_{N_0, N_1, N_2, M_0 \in \mathbb{Z}} \exp \left\{ \frac{\beta}{\sqrt{R_1 R_2}} \left[ \frac{N_0^2}{8\pi g_0} + \frac{2\pi g_0}{k^2} \left( N_1^2 \frac{R_2}{R_1} + N_2^2 \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{M_0^2 g_0}{q_0^2 8\pi} \right] \right\}, \quad (4.127)$$

$$Z_{osc} = e^F \prod_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} \left( 1 - \exp \left( -\frac{\beta}{2\pi} \sqrt{\frac{n_1^2}{R_1^2} + \frac{n_2^2}{R_2^2}} \right) \right)^{-1}, \quad (4.128)$$

in cui  $F$  è il contributo dell'energia di punto zero adeguatamente regolarizzato [43]

$$F = \frac{\beta}{2R_1^2 R_2^2} \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} \left[ \frac{n_1^2}{R_1^2} + \frac{n_2^2}{R_2^2} \right]^{-3/2}. \quad (4.129)$$

La forma della funzione di partizione oscillatoria della teoria bosonica locale  $Z_{osc}$  è ripresa dai lavori [43] [49].

## 4.9 Funzione di partizione del loop model sul cilindro $S^2 \times \mathbb{R}$

In questa sezione affrontiamo il calcolo della funzione di partizione del loop model nella geometria spaziale della sfera  $S^2$ . La compattificazione del tempo  $\beta$  sarà ottenuta nuovamente dalla traccia. Si dimostra [31] che lo spettro dell'Hamiltoniana di una teoria conforme definita su  $\mathbb{R} \times S^2$  corrisponde allo spettro dell'operatore di dilatazione sullo spazio piatto, cioè allo spettro delle dimensioni conformi dei campi. Tale spettro caratterizza tutte le proprietà delle osservabili della teoria. La funzione di partizione sul cilindro è dunque schematicamente data da:

$$Z \sim \sum_{\Delta} e^{-(\beta/R)\Delta}, \quad (4.130)$$

dove  $\Delta$  indica la generica dimensione conforme, e la somma corre su tutto lo spettro conforme.

La strategia con cui affrontiamo il calcolo rimane quella adottata nel caso del toro: per calcolare i modi solitonici studiamo l'estensione locale quadridimensionale del loop model che è definito in questo caso su  $\mathcal{M}_4 = S^3 \times \mathbb{R}$ . In questa estensione, la sfera  $S^2$  corrisponde all'equatore della tri-sfera spaziale. Più precisamente, la tri-sfera di raggio  $R$  in coordinate radiali è parametrizzata da tre angoli  $\psi, \theta, \varphi$ , con metrica:

$$ds_{S^3}^2 = R^2 [d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] , \quad (4.131)$$

$$\psi, \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (4.132)$$

È evidente che restringendoci all'equatore  $\psi = \pi/2$  la metrica sopra descrive una usuale sfera  $S^2$  di raggio  $R$ . La  $\delta(\mathcal{M}_3)$  è in questo caso data dalla delta covariante sulla sfera  $S^2$ :

$$\delta(\mathcal{M}_3) = \frac{\delta(\psi - \pi/2)}{R \sin(\psi)^2}. \quad (4.133)$$

Sulla sfera non ci sono cicli non contraibili, quindi le uniche condizioni sui modi solitonici sono quelle di flusso:

$$\int_{S^2} d^2x \varepsilon^{ij} \partial_i a_j = \int_{S^2} da = \frac{2\pi}{q} M_0, \quad (4.134)$$

$$\int_{S^2} d^2x \varepsilon^{ij} \partial_i \zeta_j = \int_{S^2} d\zeta = \frac{2\pi}{k} N_0. \quad (4.135)$$

Nel prossimo paragrafo calcoliamo il contributo solitonico della funzione di partizione. Il calcolo del contributo oscillatorio, invece viene rimandato a sviluppi futuri di questo lavoro di tesi. Il motivo è che, a causa della curvatura della sfera, l'azione (4.93) va opportunamente estesa a varietà curve con metrica  $g_{\mu\nu}$ :

$$S_4[\hat{a}, \zeta] = \frac{1}{4e_0^2} \int_{\mathcal{M}_4} d^4x \sqrt{g} \hat{f}_{\mu\nu} \hat{f}_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + i \frac{k}{2\pi} \int_{\mathcal{M}_3} ad\zeta. \quad (4.136)$$

Il calcolo dello spettro e la regolarizzazione del determinante presentano delle difficoltà maggiori del caso della geometria del toro e non sono stati completati.

### 4.9.1 Modi Solitonici

Calcoliamo ora il contributo solitonico alla funzione di partizione: come nel paragrafo (4.7.1) omettiamo i pedici “*sol*” ai campi, sottintendendo che stiamo lavorando con i modi solitonici. A differenza del toro, la sfera ha una curvatura non nulla, quindi è necessario scrivere l'azione (4.93) in segnatura Minkowskiana su spazi curvi:

$$S[\hat{a}, \zeta] = -\frac{1}{4e_0^2} \int_{\mathcal{M}_4} dx \sqrt{-g} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \hat{f}_{\mu\nu} \hat{f}_{\alpha\beta} - \frac{k}{2\pi} \int_{\mathcal{M}_3} ad\zeta. \quad (4.137)$$

dove  $\mathcal{M}_4 = S^3 \times \mathbb{R}$  e  $\mathcal{M}_3 = S^2 \times \mathbb{R}$  e la metrica quadridimensionale è data da:

$$ds^2 = dt^2 - ds_{S^3}^2. \quad (4.138)$$

A questo punto imponiamo le condizioni (4.134) e (4.135): entrambe impongono un contributo di monopolo per  $da$  e  $d\zeta$ . Cominciamo dalla condizione su  $\zeta$ :

$$\frac{2\pi N_0}{k} = \int_{S^2} d\zeta \rightarrow d\zeta = \frac{N_0}{2k} \sin(\theta) d\theta d\varphi. \quad (4.139)$$

Il termine tridimensionale nell'azione (4.137) è dunque:

$$\frac{k}{2\pi R^2} \int_{\mathcal{M}_3} \frac{N_0}{2k} R^2 \sin(\theta) a_0 dt d\theta d\varphi. \quad (4.140)$$

Inserendo la delta covariante (4.133) possiamo scrivere il termine di corrente come un integrale quadridimensionale:

$$\begin{aligned} & \frac{k}{2\pi R^2} \int_{\mathcal{M}_3} \frac{N_0}{2k} R^2 \sin(\theta) a_0 dt d\theta d\varphi \\ &= \frac{k}{2\pi R^2} \int_{\mathcal{M}_4} \frac{N_0}{2k} R^2 \sin(\theta) \sin^2(\psi) a_0 \frac{\delta(\psi - \pi/2)}{R^2 \sin^2(\psi)} dt d\psi d\theta d\varphi \\ &= \frac{N_0}{4\pi R^2} \int_{\mathcal{M}_4} d^4x \sqrt{-g} \hat{a}_0. \end{aligned} \quad (4.141)$$

Come nel caso del toro, la condizione sul flusso di  $\zeta$  produce un modo solitonico per  $\hat{a}_0$  attraverso l'equazione di moto:

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \hat{a}_0 = e_0^2 \left( \frac{N_0}{4\pi R^2} \right) \frac{\delta(\psi - \pi/2)}{R \sin^2(\psi)}. \quad (4.142)$$

L'operatore  $\nabla^\mu \nabla_\mu$  è il laplaciano vettore nella metrica (4.138) agente su  $\hat{a}_0$ . Il termine di sorgente, è definito solo sull'equatore di  $S^3$  e quindi per simmetria, la soluzione non omogenea dell'equazione (4.142) dipenderà solo da  $\psi$ . Come mostrato nell'appendice D, quest'ansatz permette di ridurre l'equazione di moto (4.142):

$$\partial_\psi^2 \hat{a}_0 + \frac{2}{\tan(\psi)} \hat{a}_0 = -\frac{e_0^2 N_0}{4\pi R} \frac{\delta(\psi - \pi/2)}{\sin^2(\psi)}. \quad (4.143)$$

La soluzione di quest'equazione è calcolata in appendice C, ed è:

$$\hat{a}_0 = -\frac{N_0 e_0^2}{8\pi R} |\tan(\psi - \pi/2)|. \quad (4.144)$$

Consideriamo ora la condizione (4.134) che produce un contributo di monopolo magnetico al centro di  $S^2$ :

$$\frac{2\pi M_0}{q_0} = \int_{S^2} f \rightarrow \hat{f}_{\theta\varphi} = \frac{M_0}{2q_0} \sin(\theta). \quad (4.145)$$

L'Hamiltoniana della teoria (4.137) si ottiene integrando la componente  $T^{00}$  del tensore energia-impulso. Indicando con  $g_{ij}$  il tensore metrico di  $S^3$ ,  $i, j = \psi, \theta, \varphi$ , l'Hamiltoniana è data da:

$$H = \frac{1}{2e_0^2} \int_{S^3} d^3x \sqrt{g} \left[ \hat{f}_{i0} \hat{f}_{j0} g^{ij} + \frac{1}{2} \hat{f}_{ij} \hat{f}_{lk} g^{il} g^{jk} \right]. \quad (4.146)$$

Riconosciamo in quest'espressione il contributo elettrico e magnetico.

Osserviamo che il termine di sorgente  $\int ad\zeta$  in (4.137) non dà contributo poiché la corrente contiene una delta  $\delta(\psi - \pi/2)$ , ma la soluzione dell'equazione di moto (4.143) data da (4.144) si annulla proprio per  $\psi = \pi/2$ . La soluzione solitonica (4.144) contribuisce alla componente  $\hat{f}_{\psi 0} = \partial_{\psi} a_0$  e quindi al termine elettrico nell'Hamiltoniana:

$$\begin{aligned} H_{el} &= \frac{1}{2e_0^2} \int_{S^3} d^3x \sqrt{g} g^{\psi\psi} \hat{f}_{\psi 0}^2 \\ &= \frac{N_0 e_0^2}{8\pi} \frac{2\pi}{R} \int_0^{\pi} d\psi \frac{1}{\sin^2(\psi)} \\ &= \frac{N_0 e_0^2}{8\pi} \frac{2\pi}{R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha \frac{1}{\cos^2(\alpha)}. \end{aligned} \quad (4.147)$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo introdotto la variabile  $\alpha = \pi/2 - \psi$  per simmetrizzare l'integrale. Osserviamo che tale integrale diverge in corrispondenza dei poli di  $S^3$ , situati in corrispondenza di  $\alpha = \pm\pi/2$ . Come nel caso del toro, è necessario introdurre un cut-off infrarosso  $\delta$  nella dimensione aggiuntiva per definire l'energia dei modi solitonici. Quindi restringiamo il dominio di integrazione di  $\alpha$  per evitare i poli,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\cos^2(\alpha)} \rightarrow \int_{-\pi/2+\delta}^{\pi/2-\delta} \frac{d\alpha}{\cos^2(\alpha)} = \frac{2}{\tan \delta}. \quad (4.148)$$

Con questa prescrizione, il contributo elettrico dell'energia è:

$$H_{el} = \frac{1}{2e_0^2} \frac{N_0^2 e_0^2}{16\pi} \frac{1}{\tan(\delta)}. \quad (4.149)$$

Il termine magnetico dell'Hamiltoniana riceve contributo dalla componente  $\hat{f}_{\theta\varphi}$  (4.145) associata alla condizione (4.134):

$$\begin{aligned} H_{mag} &= \frac{1}{2e_0^2} \int_{S^3} d^3x \sqrt{g} \hat{f}_{\theta\varphi}^2 (g^{\theta\varphi})^2 \\ &= \left(\frac{M_0}{2q_0}\right) \frac{2\pi}{Re_0^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha \frac{1}{\cos^2(\alpha)}. \end{aligned} \quad (4.150)$$

Come nel termine elettrico, regolarizziamo l'integrale introducendo il cut-off  $\delta$ , ottenendo:

$$H_{mag} = \left(\frac{M_0}{q_0}\right)^2 \frac{\pi}{Re_0^2 \tan(\delta)}. \quad (4.151)$$

Sommando i due contributi (4.149) e (4.151) l'Hamiltoniana solitonica complessiva assume la forma:

$$H = \frac{1}{4R \tan(\delta)} \left( \frac{e_0^2}{4\pi} N_0^2 + \frac{M_0^2}{q_0^2} \frac{4\pi}{e_0^2} \right) = \frac{1}{4R \tan(\delta)} \left( g_0 N_0^2 + \frac{M_0^2}{q_0^2} \frac{1}{g_0} \right). \quad (4.152)$$

Nella seconda eguaglianza abbiamo reintrodotta la costante di accoppiamento della teoria di bordo tramite la (4.100). In conclusione, la funzione di partizione nella geometria dal cilindro  $\mathbb{R} \times S^2$  è data da:

$$Z_{sol} = \sum_{N_0, M_0 \in \mathbb{Z}} \exp \left\{ -\beta \left[ \frac{1}{4R \tan(\delta)} \left( g_0 N_0^2 + \frac{M_0^2}{q_0^2} \frac{1}{g_0} \right) \right] \right\}. \quad (4.153)$$

In analogia con quanto discusso precedentemente per la geometria del toro, l'espressione (4.153) necessita di una scelta per il cut-off infrarosso. Nel caso di un parametro esterno  $M$ , avremo  $\delta = O(MR)$  poiché il cut-off sull'angolo è adimensionale. Questa scelta è di nuovo incompatibile con l'invarianza di scala del loop model a livello quantistico. Scegliamo quindi un altro cut-off che rispetta questa invarianza, ovvero  $M = \lambda/R$ , dove  $\lambda$  è una costante numerica, cioè  $\delta = \lambda$ . Come si vede dalla espressione esplicita dello spettro, la costante  $\delta$  può essere inclusa in una ridefinizione delle unità di lunghezza spaziale o temporale, ovvero della velocità di Fermi, una quantità non universale. Possiamo quindi porre  $\tan(\delta) = 1$  nella (4.153).

## 4.9.2 Dualità nella funzione di partizione

Nelle sezioni precedenti, abbiamo calcolato la parte solitonica della funzione di partizione del loop model (4.87) nelle geometrie del toro e del cilindro: in questo paragrafo discutiamo i risultati ottenuti. In particolare considereremo il regime  $k = 1$ : come spiegato in [65] in questo caso la carica minima delle eccitazioni cariche della teoria vale  $q_0 = 1$ . Inoltre la relazione di dualità dell'accoppiamento  $g_0$  (4.28) diventa  $\tilde{g}_0 = 1/g_0$ .

Cominciamo dalla funzione di partizione sul toro, data dalla (4.117). Per  $k = q_0 = 1$  questa si riduce a:

$$Z_{sol} = \sum_{N_0, N_1, N_2, M_0 \in \mathbb{Z}} \exp \left\{ -\frac{\beta}{\sqrt{R_1 R_2}} \left[ \frac{1}{8\pi} \left( \frac{N_0^2}{g_0} + M_0^2 g_0 \right) + 2\pi g_0 \left( N_1^2 \frac{R_2}{R_1} + N_2^2 \frac{R_1}{R_2} \right) \right] \right\}. \quad (4.154)$$

L'espressione (4.154) non è invariante per  $g_0 \rightarrow 1/g_0$ : questo non è in contraddizione con l'ipotizzata autodualità della teoria di bordo. Infatti, come

spiegato in sezione (4.3.1), la dualità non conduce ad una uguaglianza fra le funzioni di partizione della teoria e la sua duale; come abbiamo visto, esiste una relazione fra le conducibilità delle due teorie, che coinvolge le derivate seconde di  $Z$  rispetto al campo esterno, non calcolabili dall'espressione (4.154).

Passiamo ora alla funzione di partizione sul cilindro  $\mathbb{R} \times S^2$ . Per  $q_0 = 1$ , questa assume la forma:

$$Z_{sol} = \sum_{N_0, M_0 \in \mathbb{Z}} \exp \left\{ -\beta \left[ \frac{1}{4R} \left( g_0 N_0^2 + M_0^2 \frac{1}{g_0} \right) \right] \right\}. \quad (4.155)$$

Questa volta, l'invarianza rispetto alla dualità  $g_0 \rightarrow 1/g_0$  è manifesta. Come già detto, la funzione di partizione nella geometria del cilindro determina lo spettro delle dimensioni conformi dei campi che caratterizza molti osservabili della teoria. Poiché il loop model è auto-duale, tale spettro deve essere simmetrico rispetto alla trasformazione  $g_0 \rightarrow 1/g_0$ . La formula (4.155) rappresenta un risultato importante di questa tesi.

Notiamo tuttavia che questo risultato non fornisce una dimostrazione completa dell'invarianza conforme del loop model. A livello classico, la formulazione locale di questo modello in (3+1) dimensioni soddisfa tutti i criteri che promuovono l'invarianza di scala a invarianza conforme. La verifica completa a livello quantistico richiede il calcolo della parte oscillatoria  $Z_{osc}$  sul cilindro ed il suo confronto con le rappresentazioni dell'algebra conforme in (2+1) dimensioni. Questa analisi viene lasciata agli sviluppi successivi di questo lavoro di tesi.

## 4.10 Conclusioni

In questo capitolo abbiamo analizzato una teoria che potenzialmente può descrivere la dinamica massless del bordo di un isolante topologico, il loop model. Abbiamo inizialmente passato in rassegna le sue proprietà rispetto alle trasformazioni di dualità, già note in letteratura, ma esposte qui in maniera organica.

Abbiamo poi mostrato che l'argomento di Peierls applicato al loop model è in grado di riprodurre, a livello qualitativo, il risultato numerico ottenuto in [61]. Il risultato di quest'analisi è che il loop model possiede una linea critica, analoga a quella della teoria conforme del bosone compattificato in (1+1) dimensioni.

Nella seconda parte, basandoci sul lavoro di Son sulla  $QED_{4,3}$  abbiamo elaborato un approccio per trattare il calcolo del contributo solitonico alla

funzione di partizione del loop model. Abbiamo quindi calcolato tale quantità sul toro, concludendo che il loop model necessita di un cut-off infrarosso per essere ben definito. Abbiamo poi capito che la scelta di tale cut-off consistente con l'invarianza di scala classica è data dalla taglia stessa del sistema. In seguito, abbiamo ripetuto il calcolo della parte solitonica della funzione di partizione nella geometria del cilindro, ed abbiamo dimostrato che soddisfa la proprietà di auto-dualità, come ci aspettavamo. Il calcolo del contributo oscillatorio alla funzione di partizione non è stato ultimato nel lavoro di tesi: il suo completamento permetterà di chiarire se il loop model è invariante conforme a livello quantistico. In caso di risposta affermativa, il loop model fornirebbe un esempio di teoria conforme non banale in  $(2+1)$  dimensioni, che potrebbe descrivere sistemi di fermioni interagenti, analogamente a quanto avviene in  $(1+1)$  dimensioni con la teoria del bosone compattificato.

Un'altra linea di sviluppo del lavoro tesi consiste nel ripetere il calcolo della funzione di partizione nella geometria del toro includendo anche il campo elettromagnetico di background, in modo tale da poter verificare le relazioni fra le conducibilità (4.80).

# Appendice A

## Proprietà del nucleo $D_{\mu\nu}(g, f)$

In quest'appendice dimostriamo la proprietà 4.15 del nucleo integrale definito in 4.14 usata nelle varie integrazioni gaussiane del capitolo 4. Iniziamo ricordando la definizione del nucleo  $D_{\mu\nu}(g, f)$ :

$$D_{\mu\nu}(g, f) = \frac{1}{\partial} (x, y) (-\delta_{\mu\nu} \partial_{(y)}^2 + \partial_{\mu}^{(y)} \partial_{\nu}^{(y)}) + i f \delta(x - y) \varepsilon_{\mu\rho\nu} \partial_{\rho}^{(y)} \quad (\text{A.1})$$

La proprietà da dimostrare è:

**Proprietà.** Se  $D_{\mu\nu}$  agisce su campi  $\zeta_{\mu}$  soggetti al gauge di Lorentz, e  $D_{\mu\nu}^{-1}$  agisce su correnti conservate  $j_{\mu}$ :

$$\partial_{\mu} \zeta_{\mu} = \partial_{\mu} j_{\mu} = 0 \quad (\text{A.2})$$

allora vale la seguente relazione fra  $D_{\mu\nu}$  ed il suo inverso:

$$D_{\mu\nu}^{-1}(g, f) = \int d^3 z \left( \frac{1}{-\partial^2} \right) (x, z) D_{\mu\nu}(z, y; \tilde{g}, \tilde{f}) \quad (\text{A.3})$$

$$\tilde{g} = \frac{g}{g^2 + f^2}, \quad \tilde{f} = \frac{-f}{g^2 + f^2} \quad (\text{A.4})$$

Per dimostrare la suddetta proprietà, conviene lavorare nello spazio di Fourier, in cui il nucleo A.1 assume la forma seguente: ( $k \equiv \sqrt{k^2}$ )

$$D_{\mu\nu}(k; g, f) = g \frac{1}{k} (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_{\mu} k_{\nu}) - f \varepsilon_{\mu\rho\nu} k_{\rho} \quad (\text{A.5})$$

È dunque naturale assumere la seguente struttura tensoriale per il nucleo inverso:

$$D_{\mu\nu}^{-1}(k; g, f) = A(k) (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_{\mu} k_{\nu}) + B(k) \varepsilon_{\mu\rho\nu} k_{\rho} \quad (\text{A.6})$$

dove  $A(k)$  e  $B(k)$  sono due funzioni incognite del modulo dell'impulso  $k$ . Le condizioni A.2 nello spazio degli impulsi si traducono in  $k_\mu \zeta_\mu = k_\mu j_\mu = 0$  e quindi i termini proporzionali a  $k_\nu$  vengono eliminati in entrambi i nuclei. A questo punto sfruttiamo la definizione di inverso per ottenere la forma delle funzioni  $A$  e  $B$ :

$$\begin{aligned} &= D_{\mu\rho} D_{\rho\nu}^{-1} = \left( g \frac{1}{k} k^2 \delta_{\mu\rho} - f \varepsilon_{\mu\alpha\rho} k_\alpha \right) (A \delta_{\rho\nu} k^2 + B \varepsilon_{\rho\beta\nu} k_\beta) \\ &= k^2 (gA + fB) \delta_{\mu\nu} + k (gB - fA) \varepsilon_{\mu\gamma\nu} k_\gamma \equiv \delta_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Quindi le funzioni  $A$  e  $B$  sono determinate come segue:

$$A(k) = \frac{g}{f^2 + g^2} \frac{1}{k^2}, \quad B(k) = \frac{f}{f^2 + g^2} \frac{1}{k^2} \quad (\text{A.8})$$

Osserviamo che, poiché  $D_{\mu\nu}^{-1}$  agisce su correnti conservate, possiamo aggiungere nuovamente il termine in  $k_\mu k_\nu$  in quanto dà contributo nullo. In conclusione la forma di  $D_{\mu\nu}^{-1}$  nello spazio degli impulsi è:

$$D_{\mu\nu}^{-1}(k; g, f) = \tilde{g} \frac{1}{k^2} (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) + \tilde{f} \frac{1}{k^2} \varepsilon_{\mu\rho\nu} k_\rho = \frac{1}{k^2} D_{\mu\nu}(k, \tilde{g}, \tilde{f}) \quad (\text{A.9})$$

Tornando nello spazio delle coordinate, otteniamo infine la A.3. Nelle applicazioni compare sempre l'integrale di  $D^{-1}$  contratto con due correnti conservate  $j_\mu = (1/2\pi) \varepsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu \zeta_\rho$ :

$$\int d^3x d^3y j_\mu D^{-1}(g, f)_{\mu\nu} j_\nu \quad (\text{A.10})$$

Sostituendo la A.3 ed integrando opportunamente per parti, otteniamo:

$$\int d^3x d^3y \zeta_\mu D_{\mu\nu}(\tilde{g}, \tilde{f}) \zeta_\nu \quad (\text{A.11})$$

# Appendice B

## Argomento di Peierls

In quest'appendice raccogliamo i calcoli relativi all'argomento di Peierls per il loop model, esaminato nel paragrafo (4.4.3).

### B.1 Azione del monopolio

Calcoliamo l'azione euclidea del loop model (4.49) sulla configurazione di monopolio (4.47). L'integrale da calcolare è il seguente:

$$\begin{aligned} S &= \frac{g}{8\pi^3} \int d^3x_1 d^3x_2 F_{\mu\nu}(x_1) \frac{1}{|x_1 - x_2|^2} F_{\mu\nu}(x_2) \\ &= \frac{gq^2}{16\pi^3} \int \frac{d^3x_1}{|x_1|^3} \frac{d^3x_2}{|x_2|^3} \frac{x_1 \cdot x_2}{|x_1 - x_2|^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Per calcolare questo integrale, conviene passare in coordinate sferiche ed orientare l'asse  $z$  relativo alle coordinate che descrivono il punto  $x_2$  lungo la direzione del punto  $x_1$ . In questo modo otteniamo, ponendo  $y = \cos(\theta_2)$ :

$$S = \frac{gq^2}{2\pi} \int_0^{+\infty} dr_1 \int_0^{+\infty} dr_2 \int_{-1}^1 dy \frac{y}{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2y}, \quad (\text{B.2})$$

A questo punto esponenziamo il denominatore:

$$\begin{aligned} S &= \frac{gq^2}{2\pi} \int_0^{+\infty} dr_1 \int_0^{+\infty} dr_2 \int_{-1}^1 dy \int_0^{+\infty} d\alpha y e^{-(r_1^2+r_2^2-2r_1r_2y)\alpha} \\ &= \frac{gq^2}{2\pi} \int_0^{+\infty} ds_1 \int_0^{+\infty} ds_2 \int_0^1 dy \int_0^{+\infty} \frac{d\alpha}{\alpha} y (e^{-(r_1^2+r_2^2-2r_1r_2y)\alpha} - e^{-(r_1^2+r_2^2+2r_1r_2y)\alpha}), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

dove abbiamo posto  $s_i = r_i/\sqrt{\alpha}$  con  $i = 1, 2$ . Ora l'integrale è fattorizzato in un contributo divergente dato dall'integrale su  $\alpha$ , ed uno convergente dato dall'integrale sulle rimanenti variabili. Osserviamo innanzitutto che, essendo  $\alpha$  coniugato a  $r^2$ , abbiamo che  $\alpha \sim 1/r^2$ . Possiamo quindi regolarizzare l'integrale su  $\alpha$  nel modo seguente:

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\alpha}{\alpha} \rightarrow \int_{1/L^2}^{1/a^2} \frac{d\alpha}{\alpha} = 2 \ln\left(\frac{L}{a}\right), \quad (\text{B.4})$$

dove  $a$  ed  $L$  sono rispettivamente il passo reticolare e la taglia del sistema. Dunque abbiamo dimostrato la (4.50), a meno di coefficienti numerici dati dal fattore convergente. Questo può essere calcolato in coordinate polari sul piano  $(s_1, s_2)$ , ponendo  $s_1 = s \cos(\eta)$ ,  $s_2 = s \sin(\eta)$ . Utilizzando tecniche standard, otteniamo il risultato citato nel testo.

## B.2 Energia della linea di vortice

Calcoliamo ora l'azione della linea di vortice (4.53):

$$S = \frac{g}{8\pi} \int d^3x_1 d^3x_2 2 \frac{F_{12}(x_1)F_{12}(x_2)}{|x_1 - x_2|^2} \quad (\text{B.5})$$

$$= \frac{g}{4\pi} \Phi^2 \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \frac{1}{(z_1 - z_2)^2} \quad (\text{B.6})$$

$$= \frac{g}{4\pi} \Phi^2 \int_0^\infty dz_+ 2 \int_0^\infty dz_- \frac{1}{z_-^2}, \quad (\text{B.7})$$

dove abbiamo introdotto  $z_\pm = z_1 \pm z_2$ . Introducendo come sopra un cut-off IR ed uno UV, dati rispettivamente dal passo reticolare  $a$ , e dalla lunghezza della linea di vortice  $R$ , e considerando solo i termini dominanti in  $R/a$ , otteniamo infine il risultato (4.54) citato nel testo.

# Appendice C

## Modi solitonici su $S^3 \times \mathbb{R}$

In questa appendice svolgiamo alcuni conti relativi all'equazione di moto (4.142) che determina il modo solitonico del campo  $\hat{a}_0$ .

L'equazione è la seguente:

$$\nabla_\mu \nabla^\mu a_0 = e_0^2 \left( \frac{N_0}{4\pi R^2} \right) \frac{\delta(\psi - \pi/2)}{R \sin^2(\psi)}. \quad (\text{C.1})$$

L'azione del laplaciano vettore per una metrica generica è piuttosto complicata, tuttavia la metrica di  $S^3 \times \mathbb{R}$  è tale che  $g_{00} = 1$ ,  $g_{0i} = 0$  e  $g_{ij}$  non dipende dal tempo. Per una metrica con queste caratteristiche, il laplaciano vettore agisce in modo semplice:

$$\nabla_\mu \nabla^\mu a^0 = g^{\mu\alpha} \partial_\mu \partial_\alpha a^0 - (g^{\mu\alpha} \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda) \partial_\lambda a^0. \quad (\text{C.2})$$

Imponiamo ora l'ansatz  $a^0 = a^0(\psi)$ :

$$\nabla_\mu \nabla^\mu a^0 = g^{\psi\psi} \partial_\psi \partial_\psi a^0 - (g^{\mu\alpha} \Gamma_{\mu\alpha}^\psi) \partial_\psi a^0. \quad (\text{C.3})$$

Sostituendo infine la forma esplicita dei simboli di Christoffel e della metrica inversa (riportate in fondo all'appendice), otteniamo l'equazione di moto nella forma (4.142).

### C.1 Soluzione dell'equazione di moto

Osserviamo innanzitutto che, poiché vogliamo calcolare i modi solitonici, ci interessa la soluzione particolare dell'equazione (4.143). Effettuiamo la sostituzione  $\tan(\pi/2 - \psi) = y$ :

$$\partial_y^2 a^0 = -\frac{e_0^2 N_0}{4\pi R} \delta(y), \quad y \in [-\infty, +\infty] \quad (\text{C.4})$$

La soluzione particolare è quindi evidentemente:

$$a^0 = -\frac{N_0}{4\pi R} \frac{|y|}{2} = -\frac{N_0}{8\pi R} |\tan(\pi/2 - \psi)|, \quad (\text{C.5})$$

che è la soluzione (4.144) data nel testo.

## C.2 Quantità metriche di $S^3 \times \mathbb{R}$

La metrica  $g_{\mu\nu}$  di  $S^3 \times \mathbb{R}$  nelle coordinate  $(t, \psi, \theta, \varphi)$  definite nel testo è:

$$g_{\mu\nu} = R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin^2(\psi) \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (\text{C.6})$$

I simboli di Christoffel non nulli associati a questa metrica sono:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\theta}^{\psi} &= -\frac{1}{2} \sin(2\psi), & \Gamma_{\varphi\varphi}^{\psi} &= -\frac{1}{2} \sin(2\psi) \sin^2(\theta), \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} &= -\frac{1}{2} \sin(2\theta), & \Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi} &= \frac{1}{\tan(\theta)}, & \Gamma_{\theta\psi}^{\theta} &= \Gamma_{\varphi\psi}^{\varphi} = \frac{1}{\tan(\psi)}. \end{aligned}$$

# Bibliografia

- [1] R. E. Prange, S. M. Girvin, “The Quantum Hall Effect”, Springer, (1990).
- [2] K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, “New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance”, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).
- [3] D. C. Tsui, H. L. Stormer, A. C. Gossard, “Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit”, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559 (1982).
- [4] X.-L. Qi, S.-C. Zhang, “Topological insulators and superconductors”, Rev. Mod. Phys. **83**, 1057 (2011).
- [5] A. Cappelli, E. Randellini, “Partition Functions and Stability Criteria of Topological Insulators”, J. High Energy Phys. **101**, 2013 (2013).
- [6] A. Cappelli, G. V. Dunne, C. A. Trugenberger, G. R. Zemba, “Conformal Symmetry and Universal Properties of Quantum Hall States”, Nuclear Physics **B398**, 532-567 (1993).
- [7] G. V. Dunne, “Edge Asymptotics of Planar Electron Densities”, Nuclear Physics **B398** (1993) 531-567.
- [8] R. B. Laughlin, “Anomalous Quantum Hall Effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations”, Phys. Rev. Lett. **18**, 1395-1398 (1983).
- [9] F. D. M. Haldane, “Model for a Quantum Hall Effect without Landau Levels: Condensed-Matter Realization of the ”Parity Anomaly”, Phys. Rev. Lett. **61**, 2015 (1988).

- [10] Cui-Zu Chang et al. “Experimental Observation of the Quantum Anomalous Hall Effect in a Magnetic Topological Insulator”, *Science*, Vol. 340 no. 6129 167-170 (2013).
- [11] G. Jotzu et al. “Experimental realization of the topological Haldane model with ultracold fermions”, *Nature*, **515**, 237–240 (2014).
- [12] A. Bohm, A. Mostafazadeh, H. Koizumi, Q. Niu, J. Zwanziger, “The Geometric Phase in Quantum Systems: Foundations, Mathematical Concepts, and Applications in Molecular and Condensed Matter Physics”, Springer (2003).
- [13] J. Zak, “Berry’s Phase for Energy Bands in Solids”, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2747 (1989).
- [14] M. Nakahara, “Geometry, Topology and Physics”, CRC Press 2nd edition (2003).
- [15] P. Goddard e I. Olive, “Magnetic Monopoles in Gauge Field Theories”, *Rep. Prog. Phys.***41**, (1978).
- [16] E. Fradkin, “Field Theories of Condensed Matter Physics”, Cambridge University Press (2013).
- [17] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale e M. den Nijs, “Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential”, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 405 (1982).
- [18] C. L. Kane e E. J. Mele, “ $\mathbb{Z}_2$  Topological Order and the Quantum Spin Hall Effect”, *Phys. Rev. Lett.* **95** 146802 (2005).
- [19] J. J. Sakurai, J. Napolitano, “Modern Quantum Mechanics”, Cambridge University Press, (2017).
- [20] M. König, S. Wiedmann, C. Brüne, A. Roth, H. Buhmann, L. W. Molenkamp, X.-L. Qi, S.-C. Zhang, “Quantum Spin Hall Insulator State in HgTe Quantum Wells”, *Science* **318**, 766 (2007).
- [21] B. A. Bernevig, T. L. Hughes, S.-C. Zhang, “Quantum Spin Hall Effect and Topological Phase Transition in HgTe Quantum Wells”, *Science*, **314**, 1757 (2006).

- [22] J. E. Moore e L. Balents, “Topological Invariants of Time-Reversal-Invariant Band Structures”, *Phys. Rev.* **B75**, 121306 (2007).
- [23] G. Hsieh, D. Qian, L. Wray, Y. Xia, Y. S. Hor, R. J. Cava, M. Z. Hasan, “A Topological Dirac Insulator in a Quantum Spin Hall Phase”, *Nature* **452**, 970 (2008).
- [24] L. Fu, C. L. Kane, “Topological Insulators with Inversion Symmetry”, *Phys. Rev.* **B76**, 045302 (2007).
- [25] C.-K. Kai, C. Y. Jeffrey, A. P. Schnyder, S. Ryu, “Classification of topological quantum matter with symmetries”, *Rev. Mod. Phys.* **88**, 035005 (2016).
- [26] A. Altland, M. R. Zirnbauer, “Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structures”, *Phys. Rev. B* **55**, 1142 (1997).
- [27] X.-G. Wen, “Topological orders and edge excitations in fractional quantum Hall states”, *Advances in Physics* **44:5**, 405 (1995).
- [28] F. Wilczek, “Fractional Statistics and Anyon Superconductivity”, Singapore World Scientific (1990).
- [29] F. D. M. Haldane, E. H. Rezayi, “Periodic Laughlin-Jastrow wave functions for the fractional quantized Hall effect”, *Phys. Rev. B* **31**, 2529 (1985).
- [30] R. Floreanini, R. Jackiw, “Self-Dual Fields as Charge-Density Solitons”, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1873 (1987).
- [31] P. Di Francesco, P. Mathieu e D. Sénéchal, “Conformal Field Theory”, Springer (1997).
- [32] R. B. Laughlin, “Quantized Hall conductivity in two dimensions”, *American Physical Society* **23**, 5632 (1981).
- [33] S. Weinberg, “The Quantum Theory of Fields”, Cambridge University Press (2013).
- [34] A. Cappelli e G. Zemba, “Modular Invariant Partition Functions in the Quantum Hall Effect”, *Nucl. Phys.* **B490**, 595 (1997).

- [35] A. Cappelli e G. Viola, “Partition Functions of Non-Abelian Quantum Hall States”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** 075401 (2011).
- [36] A. Cappelli, G. Viola e G. Zemba, “Chiral Partition Functions of Quantum Hall Droplets”, *Ann. Phys.* **325**, 465 (2010).
- [37] S. Ryu, A. Schnyder, A. Furusaki, A. Ludwig, “Topological insulators and superconductors: ten-fold way and dimensional hierarchy”, *New J. Phys.* **12**, 065010 (2010).
- [38] A. LeClair, D. Bernard, “Holographic classification of Topological Insulators and its 8-fold periodicity”, *J. Phys.* **A45** (2012) 435202.
- [39] A. P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki, A. W. W. Ludwig ”Classification of topological insulators and superconductors in three spatial dimensions“, *Phys. Rev. B* **78**, 195125 (2008).
- [40] R. Jackiw, C. Rebbi, “Solitons with Fermion Number 1/2”, *Phys. Rev.* **D13**, 3398 (1976).
- [41] D. Z. Freedman, A. Van Proeyen, “Supergravity”, Cambridge University Press (2012).
- [42] G. V. Dunne, “Aspects of Chern-Simons Theory”, arXiv:hep-th/9902115.
- [43] A. Cappelli, E. Randellini, J. Sisti, “Three-dimensional topological insulators and bosonization”, *Journal of High Energy Physics* **2017**, 135 (2017).
- [44] X.-L. Qi, T. L. Hughes, S.-C. Zhang, “Topological field theory of time-reversal invariant insulators”, *Phys. Rev. B* **78**, 195424 (2008).
- [45] A. Vishwanath, T. Senthil, “Physics of Three-Dimensional Bosonic Topological Insulators: Surface-Deconfined Criticality and Quantized Magnetoelectric Effect”, *Phys. Rev. X* **3**, 011016 (2013).
- [46] Y. Xu, I. Miotkowski, C. Liu, J. Tian, H. Nam, N. Alidoust, J. Hu, C.-K. Shih, M. Z. Hasan, Y. P. Chen, “Observation of topological surface state quantum Hall effect in an intrinsic

- three-dimensional topological insulator”, *Nature Physics* **10**, 956 (2014).
- [47] X.-L. Qi, R. Li, J. Zang, S.-C. Zhang, “Inducing a Magnetic Monopole with Topological Surface States”, *Science* **323**, 1184 (2009).
  - [48] G. Y. Cho, J. E. Moore, “Topological BF field theory description of topological insulators”, *Annals of Physics* **326**, 1515 (2011).
  - [49] X. Chen, A. Tiwari, S. Ryu, “Bulk-boundary correspondence in (3+1)-dimensional topological phases”, *Phys. Rev. B* **94**, 045113 (2016).
  - [50] M. Bergeron, G. W. Semenoff, R. J. Szabo, “Canonical BF-type topological field theory and fractional statistics of strings”, *Nucl. Phys. B* **437**, 695 (1995).
  - [51] H. A. Kramers, G. H. Wannier “Statistics of the Two-Dimensional Ferromagnet. Part I”, *Phys. Rev.* **60**, 252 (1941).
  - [52] T. Senthil, D. T. Son, C. Wang, C. Xu, “Duality between  $(2 + 1)d$  Quantum Critical Points”, [arXiv:1810.05174](https://arxiv.org/abs/1810.05174).
  - [53] A. Karch, D. Tong, “Particle-Vortex Duality from 3D Bosonization”, *Phys. Rev. X* **6**, 031043 (2016).
  - [54] N. Seiberg, T. Senthil, C. Wang, E. Witten, “A duality web in (2+1) dimensions and condensed matter physics”, *Annals of Physics* **374**, 395 (2016).
  - [55] A. Karch, B. Robinson, D. Tong, “More Abelian dualities in  $2 + 1$  dimensions”, *JHEP* **2017**, 17 (2017).
  - [56] E. Fradkin, S. Kivelson, “Modular invariance, self-duality and the phase transition between quantum Hall plateaus”, *Nucl. Phys. B* **474**, 543 (1996).
  - [57] H. Goldman, E. Fradkin, “Loop models, modular invariance, and three-dimensional bosonization”, *Phys. Rev. B* **97**, 195112 (2018).

- [58] AtMa P. O. Chan, T. Kvorning, S. Ryu, E. Fradkin, “Effective hydrodynamic field theory and condensation picture of topological insulators”, *Phys. Rev. B* **93**, 155122 (2016).
- [59] A. M. Polyakov, “Gauge Fields and Strings”, *Contemp. Concepts Phys.* **3** (1987) 1.
- [60] J. B. Kogut, “An Introduction to Lattice Gauge Theory and Spin Systems”, *Rev. Mod. Phys.* **51**, 659 (1979).
- [61] S. D. Geraedts, O. I. Motrunich, “Line of continuous phase transitions in a three-dimensional U(1) loop model with  $1/r^2$  current-current interactions”, *Phys. Rev. B* **85**, 144303 (2012).
- [62] W.-H. Hsiao, D. T. Son, “Duality and universal transport in mixed-dimension electrodynamics”, *Phys. Rev. B* **96**, 075127 (2017).
- [63] D. Dudal, A. J. Mizher, P. Pais, “Exact quantum scale invariance of three-dimensional reduced QED theories”, *Phys. Rev. D* **99**, 045017 (2019).
- [64] W.-H. Hsiao, D. T. Son, “Self-Dual  $\nu = 1$  Bosonic Quantum Hall State in Mixed Dimensional QED”, arXiv:1809.06886.
- [65] P. Ye, M. Cheng, E. Fradkin, “Fractional S-duality, classification of fractional topological insulators and surface topological order”, 10.1103/PhysRevB.96.085125 *Phys. Rev. B* **96**, 085125 (2017).