

Лъчезар Стоянов Георгиев

ДИСЕРТАЦИЯ

за получаване на
научната и образователна степен
"Доктор"

**КОНФОРМНИ КВАНТОВИ ТЕОРИИ НА ПОЛЕТО
И ТЯХНОТО ПРИЛОЖЕНИЕ ЗА ОПИСАНИЕ НА
ДРОБНИЯ КВАНТОВ ЕФЕКТ НА ХОЛ
(С ФАКТОР НА ЗАПЪЛВАНЕ 1/2)**

Научен ръководител:
акад. Иван Тодоров Тодоров
*Институт за Ядрени Изследвания
и Ядрена Енергетика, София*

Научен консултант:
проф. Андреа Капели
*Национален Институт по
Ядрена Физика, Флоренция*

София, 1998 г.

Съдържание

1	Увод	5
2	Квантов ефект на Хол	15
2.1	Класически ефект на Хол	15
2.2	Целочислен и дробен квантов ефект на Хол	17
2.2.1	Основни характеристики на квантовия ефект на Хол	19
2.2.2	Условия за наблюдаване на квантовия ефект на Хол	20
2.2.3	Йерархии от плата	23
2.2.4	Фактори на запълване с четни знаменатели	23
2.3	Елементарна теория на квантовия ефект на Хол	26
2.3.1	Задача на Ландау	26
2.4	Пробни функции и класове на универсалност. Гранични вълни	30
2.4.1	Вълнови функции на Лафлин. Несвиваеми квантови флуиди	31
2.5	Ефективни теории на полето. Теории от типа Черн–Саймънс	32
3	Ефективна теория на полето за 331 модела	34
3.1	Общи сведения	34
3.2	Конформни трансформации в d -мерно пространство	35
3.3	Конформни трансформации в двумерно пространство	38
3.4	Конформна квантова теория на полето в двумерно пространство-време	40
3.4.1	Евклидов цилиндър и конформна равнина	40
3.4.2	Хирални вертексни алгебри	42
3.4.3	Радиално квантуване. Разложения на операторни произведения	44
3.5	Рационални конформни теории. Статистически суми и правила на сливане	45
3.6	Конформна теория на полето с $\widehat{u(1)^N}$ алгебра на токове	48
3.7	Рационални разширения на $\widehat{u(1)^N}$ алгебрата на токове	54
3.8	Неприводими представяния на рационалните разширения $\mathcal{A}(\Gamma)$ на $\widehat{u(1)^N}$ алгебрата на токове	57
3.9	Рационално разширение на $\widehat{u(1)^2}$ с матрица на Грам G_{331}	60
4	331 моделът като \mathbb{Z}_N орбифолд на $\mathcal{W}_1 \otimes \widehat{su(2)}_1$	62
4.1	Локално разширение на 331 модела до $\mathcal{W}_1 \otimes \widehat{su(2)}_1$	62
4.2	Метод на слепването	64
4.3	Целочислени разширения L на решетката G_{331}	66
4.4	Калибровъчната група Γ^*/L^*	68
4.5	Намиране на калибровъчната група за 331 модела	70
4.6	Твистираны представяния на хиралните алгебри	71
4.6.1	Токове и тензор на напреженията в твистираните представяния	72
4.7	Приводимост на твистираните модули. Проектиране върху неприводимите представяния	74

4.8	Неприводими представяния на калибровъчно-инвариантната алгебра и техните характеристики	79
4.9	Пресмятане на характеристиките на \mathbb{Z}_M орбифолда на алгебрата $\mathcal{A}(L)$	81
4.10	Статистическа сума. Модуларни трансформации. Правила на сливане	86
4.10.1	Термодинамичен потенциал	86
4.10.2	S -матрица за обобщения 331 модел	89
4.10.3	T^2 , U и V трансформации	90
4.10.4	Правила на сливане	91
4.10.5	Вълнови функции на нееквивалентните квазидупки. Магнитен поток	91
5	Пфафов модел	94
5.1	Общи сведения	94
5.2	Проекция на операторите	95
5.3	Корелационни функции	95
5.4	Проекция на характеристиките	96
5.5	Неабелева статистика	100
6	Модел на Халдейн–Резай	101
6.1	Общи сведения	101
6.2	Конформна теория на полето за "неутралната" част	102
6.2.1	Конформна размерност на полетата Ψ^\pm	102
6.2.2	Тензор на напреженията	102
6.2.3	Локални антикомутиционни съотношения за полетата $\Psi_\pm(z)$. Нарушение на връзката между спина и статистиката	103
6.2.4	Корелационната функция	104
6.3	Фермионната двойка духове ξ – η	106
6.4	Първични полета относно алгебрата $\text{Vir}(c = -2)$. $SU(2)$ -мултиплетите	110
6.4.1	Първични полета	115
6.4.2	$SU(2)$ симетрия	118
6.4.3	Първични полета породени от $\xi(z)$	120
6.4.4	$U(1)$ -алгебра на токове и снемане на израждането	120
6.5	Отрицателни норми	121
6.6	БРС заряд и физическо фактор-пространство	122
7	331 моделът като унитарна рационална конформна теория за състоянието на Халдейн–Резай	125
7.1	Предефиниране на тензора на енергията и импулса	125
7.2	Ермитово спрягане и бозонизация	127
7.3	Основното състояние на Халдейн–Резай като възбудено състояние в модела 331	129
7.4	Взаимно-еднозначно съответствие между първичните полета на ξ – η системата и тези на Дирак–Вайловите фермиони	129
7.5	Рационално разширение на хиралната алгебра в $c = -2$ теорията. Идентификация с четната част на Дирак–Вайловата хирална алгебра	133

7.6	Съответствие между характерите. Статистическа сума на Рийд и Милованович за модела на Халдейн–Резай и нейното подобрене	134
7.7	Абелева и неабелева статистика. Правила на сливане	137
8	Максимално симетрично $c = 3$ описание на сдвоени Холови състояния	139
8.1	Рационално разширение на алгебрата $\widehat{u(1)}^3$ – модел на Фрьолих	139
8.2	Калибровъчни редукции на модела на Фрьолих: 331 модел и Пфафов модел	142
Допълнение А Аналитична δ -функция		143
Допълнение В Неприводими представяния на абелевата група \mathbb{Z}_N		145
Допълнение С Пфафианът като антисиметризация на детерминантата		147
Заклучение. Приноси на дисертанта		148
Благодарности		149
Списък на публикациите		150
Литература		150

Списък на фигурите

1	Опитна постановка за наблюдаване на ефекта на Хол	15
2	Класическа зависимост $\sigma_H(v)$	16
3	Целочислен квантов ефект на Хол	17
4	Дробен квантов ефект на Хол	18
5	Експериментално наблюдавани платата	19
6	Схематичен разрез на силициев MOSFET	21
7	Потенциална енергия $V_T(z)$ в напречно направление.	22
8	Платото $1/2$ наблюдавано в експериментите [35]	25
9	Платото $1/2$ съгласно експеримента [34]	26
10	Пространствено разпределение на заряда за едночастичните орбитали	29
11	Радиално разпределение на плътността на вероятността $ f(z, \bar{z}) ^2$ за едночастичните състояния	30
12	Елементарната клетка на решетката Γ с матрица на Грам (3.9.1) и точките от Γ^* попадащи в нея.	59
13	Първоначалната решетка Γ като подрешетка на ортогоналната решетка L	68
14	Съответствие между характерите на $(c = -2)$ и $(c = 1)$ теориите върху пространството \mathcal{H}_λ за $\lambda = 1/2$	135
15	Контурите C_R и C_ρ по които се извършва интегрирането при Лорановото развитие на δ -функцията	143

Списък на таблиците

1	Сектори на суперотбор в $(m+1)(m+1)(m-1)$ модела	67
2	Съответствието $(c = -2) \iff (c = 1)$	134
3	Сектори на суперотбор за модела ФЩТ	140

1 Увод

Откриването на целочисления квантов ефект на Хол [1] през 1980 г., а по-късно и на дробния квантов ефект [2, 3, 4] разкри нови хоризонти както пред експерименталната физика на кондензираната материя така и пред теоретичната физика. Дробният ефект е колективно явление, дължащо се главно на Кулоновото взаимодействие, в двумерни корелирани електронни системи поставени в силно магнитно поле, така че всички подходи за описание в приближение на невзаимодействащи частици се оказват неприложими. Това не са просто системи с безпорядък, а топологически несвиваеми флуиди притежаващи изключително богата вътрешна структура различна от порядъка в познатите системи. За да бъдат описани тези "нови" състояния на материята [5] е въведено ново понятие наречено **топологически порядък** (или **топологичен ред**¹) заменящо стандартния вътрешен порядък на системите.

Топологичният ред [5] е съвкупност от нови квантови числа характеризиращи даден Холов флуид, които не зависят от детайлите на взаимодействието (напр. ефективни маси, товари и т.н.) и са устойчиви относно действието на произволни пертурбации. Тези свойства на универсалност позволяват на топологичния ред да разграничава нееквивалентните Холови флуиди, т.е. техните *класове на универсалност*.

Елементарните заредени възбуждания на Холовите флуиди, наречени *квазидупки* [6, 7], се оказват изключително интересни обекти, чиито свойства силно се различават от тези на познатите ни частици. В частност, за дробния ефект на Хол, те притежават дробен електричен заряд [8, 9, 10] (в единици заряда на електрона) и дробна *обменна статистика* [8, 11]. Оказва се, че тези квазичастици не се подчиняват нито на статистиката на Бозе–Айнщайн нито на Ферми–Дирак, а на т.нар. *дробни изключващи статистики* (fractional exclusion statistics), въведени от Халдейн [12] и изследвани в работите на Йонг–Ши–У и съавтори [13], които обобщават изключващия принцип на Паули за фермионите.

Поради тези особености изследването на тези обекти от гледна точка на квантовата теория на полето е истинско предизвикателство за теоретичната физика. Съществуването на екзотични квазичастици с дробен заряд и дробна статистика беше експериментално потвърдено [9, 10] при изследването на обратно разсеяни шумови токове (backscattering shot-noise) в т. нар. квантови точкови контакти (quantum point contacts), а за откриването и описанието на тези нови квантови флуиди Лафлин, Цюи и Щормер получиха Нобеловата награда за 1998 г.

От друга страна двумерните **Конформни Теории на Полето (КТП)** претърпяха забележително развитие след знаменитата работата на Белавин, Поляков и Замолдчиков [14]. Известна е и тяхната връзка [15, 16] със статистическите модели описващи двумерни критични явления, затова не е чудно, че именно те играят основна роля при описанието на квантовия ефект на Хол. Съществуването на частици подчиняващи се на изключващи статистики в конформните теории на полето е предмет на интензивно изследване през последните няколко години [17].

В § 2 е направен кратък обзор на основните понятия и физични величини измервани

¹английският термин е "topological order"

в класическия и квантовия ефект на Хол. Разгледани са по-специално условията необходими за наблюдаване на квантовия ефект. Основните резултати при изследването на зависимостта на Холовата проводимост от фактора на запълване в няколко различни експеримента са показани графично за сравнение на класическия и квантовия ефект.

В § 2.2.4 е обсъдена ролята на платата с четни знаменатели в еднослойни и двуслойни Холови флуиди.

Основен момент при теоретичното описание на Холовите системи е задачата на Ландау за описанието на (двумерни) заредени частици в хомогенно напречно магнитно поле, която е разгледана подробно в § 2.2.3.

Вълновите функции на Лафлин [8], които представляват първия успешен опит за описание на несвиваеми Холови флуиди, съответстващи на фактори на запълване $\nu = 1/m$, (m - нечетно), са въведени в § 2.4.1.

В § 2.4.1 е представена идеологията на ефективните квантови теории на полето, които се прилагат за описание на несвиваеми квантови флуиди. Изследванията на Уен [5] и съавтори и Фрьолих [18] и съавтори показват, че условието за несвиваемост на електронния флуид (респ. липсата на дисипация) в термодинамичната мащабна граница води до ефективно действие за системата, което е от типа **Черн-Саймънс (ЧС)**, т.е. ефективните теории на полето за описание на квантовия ефект са топологични теории. Фрьолих в частност показва, че системите в които диагоналните елементи на тензора на проводимостта се анулират, по необходимост се описват с ефективно действие от типа ЧС.

Благодарение на работата на Уитън [19] вече повече от 10 години е известно съответствието между топологичните квантови теории от типа ЧС върху $2 + 1$ мерно пространство време \mathcal{M} и **Рационалните Конформни Теории на Полето (РКТП)** върху $1 + 1$ мерната граница $\partial\mathcal{M}$. Тази еквивалентност, от една страна, изразява добре известния факт, че динамиката на двумерна капка от несвиваем флуид е локализирана върху нейната границата и може да бъде описана класически чрез алгебрата w_∞ [20, 21, 22], на дифеоморфизмите в равнината запазващи площта. Поради тази причина квантовата версия $W_{1+\infty}$ на алгебрата w_∞ , която се получава като *централно разширение* на последната, се оказва *динамична симетрия* на несвиваемите квантови флуиди, в които се наблюдава квантовия ефект на Хол. Тази хидродинамична аналогия е в основата на подхода на Капели и съавтори [20, 21, 22], при който несвиваемите флуиди се класифицират според тяхната $W_{1+\infty}$ симетрия.

От друга страна тази връзка позволява да разглеждаме ефективната теория на полето за Холовите системи директно като РКТП върху цилиндръра представляващ границата на производението от двумерния диск и оста на времето. За първи път този подход е използван от Мур и Рийд [23], които забелязват, че вълновата функция за основното състояние на Холовите флуиди е произведение от традиционната Гаусова експонента и холоморфна функция на (комплексните) координати на електроните. Оказва се, че последната може да бъде реализирана като корелационна функция в конформна теория на полето.

Възбудените състояния на Холовата система, наречени "гранични възбуждания" (или "повърхнинни вълни") (edge excitations) съответстват еднозначно на възбудени състояния в конформната теория на полето. Тези възбуждания осигуряват конструи-

тивен метод [5] характеризиращ топологичния порядък при класификацията на нееквивалентните класове на универсалност. С други думи РКТП описва напълно динамиката на възбужданията по границата на несвиваемите флуиди (респ. класовете на универсалност).

Този вече установен КТП подход към ефекта на Хол позволява да бъдат оползотворени мощния разработен апарат и многобройните резултати постигнати в КТП през последните 15 години.

За описанието на платото $\nu = 5/2$ в т.нар. *еднослойни* флуиди и на $\nu = 1/2$ в *двуслойни* флуиди [7] са били предложени три различни модела: Модел "331" (331) [24], Пфафов модел (Pf) [23] и Модел на Халдейн–Резай (HR) [25], които могат да бъдат характеризирани чрез вълновите функции на основното състояние на съответния флуид:

$$\Phi_{QH}(z_i, w_i; \bar{z}_i, \bar{w}_i) = \Phi_{\text{pair}}(z_i; w_j) \Phi_2(z_i; w_j) \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^N (|z_i|^2 + |w_i|^2)\right), \quad (1.1.1)$$

където със z_i, w_j ($i, j = 1, \dots, N$) сме означили координатите (в комплексната равнина) на електроните в двата слоя съответно. Вълновата функция $\Phi_2(z_i; w_j)$ е еднаква за трите модела и съвпада с Лафлиновата за четен показател (т.е. описваща бозони) отговарящ на четния знаменател $m = 2$ във фактора на запълване

$$\Phi_m(z_i; w_i) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m (w_i - w_j)^m \prod_{i, j} (z_i - w_j)^m, \quad m = 2, 4, \dots \quad (1.1.2)$$

Трите модела се различават по първият фактор $\Phi_p(z_i; w_j) := \Phi_{\text{pair}}(z_i; w_j)$, който изразява интуитивната представа за сдвояване на електроните в двата слоя (подобно на формирането на Купърови двойки във свръхпроводниците) и гарантира антисиметрията на пълната вълнова функция (тъй като останалите фактори са симетрични) относно размяната на z_i и w_j поотделно, както се очаква за тъждествени частици с фермионна статистика:

- **Модел "331"**

$$\Phi_p^{331}(z_i; w_j) = \det\left(\frac{1}{z_i - w_j}\right) \quad (1.1.3a)$$

- **Пфафов модел**

$$\Phi_p^{\text{Pf}}(z_i; w_j) = \text{Pf}\left(\frac{1}{z_i - w_j}\right) \quad (1.1.3b)$$

- **Модел на Халдейн–Резай**

$$\Phi_p^{\text{HR}}(z_i; w_j) = \det\left(\frac{1}{(z_i - w_j)^2}\right) \quad (1.1.3c)$$

Лафлиновата вълнова функция (1.1.2) се реализира като корелационна функция [23] в рационална конформна теория, с централен товар на Вирасоро $c = 1$, известна с много имена: Гаусов модел [16, 15, 26, 27] с компактификационен радиус $R^2 = m$, безмасов (рационален) модел на Тиринг, хирален (рационален) флуид на Лутингер–Томонага

[28], а за нас това ще бъде рационалното разширение на алгебрата на токове $\widehat{u(1)}$ чрез едномерна целочислена зарядова решетка с метрика m [27]. В най-интересния случай ($m = 2$) тази РКТП съвпада с алгебрата на токове $\widehat{su(2)}_1$. При него въпросната функция се изразява чрез полета $Y(\lambda, z)$ наречени *хирални вертексни оператори* [27, 11, 29]

$$\Phi_m(z_i; w_j) = \langle 2N\sqrt{m} | Y(\sqrt{m}, z_1) Y(\sqrt{m}, w_1) \dots Y(\sqrt{m}, z_N) Y(\sqrt{m}, w_N) | 0 \rangle, \quad (1.1.4)$$

където "out"-състоянието $\langle 2N\sqrt{m} |$ (което от друга страна екранира зарядите, така че корелационната функция да бъде ненулева) се дефинира с формулата $\langle 2N\sqrt{m} | \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z_0 \rightarrow \infty} z_0^{4mN^2} \langle 0 | Y^*(-2N\sqrt{m}, z_0)$. Естествено възниква следната задача.

Задача: Да се намерят конформните теории на полето реализиращи първите фактори Φ_p^{331} , Φ_p^{Pf} , Φ_p^{HR} като корелационни функции на подходящи оператори, които ще играят ролята на електронни полеви оператори.

Изчерпателното изследване на тази задача изисква определяне на алгебрата на Вирасоро, нейните първични полета и неприводими представяния, пресмятане на характеристиките, техните модулари трансформации както и правилата на сливане за различните сектори на суперотбор. Заключителната стъпка е написването на модуларино инвариантна статистическа сума, която да определя термодинамичния потенциал описващ системата в термодинамичната граница.

Основното състояние на 331 модела е частен случай ($m = m' = 3, n = 1$) на т.нар. " m, m', n "-състояния, които са йерархични обобщения на Лафлиновите вълнови функции, предложени от Халперин [24] за неполяризиран (или частично поляризиран) Холови състояние в двуслойни системи, в които спиновите ефекти могат да бъдат значителни. Както е показано в § 3 холорморфната част на тази функция се реализира в РКТП получена чрез разширение на абелевата алгебра на токове $\widehat{u(1)}^2$ с първични полета, чийто заряди образуват *целочислена решетка* с метрика $G_{331} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. От тук идва и името на модела, тъй като числата m, m', n се появяват като степенни показатели във вълновата функция за съответното основно състояние. Съществува канонична процедура за записване на характеристиките на такива РКТП [30, 31] чрез обобщени θ -функции.

Вълнова функция за основното състояние на Пфафовия модел [23, 32], предложена от Мур и Рийд [23], е пример на Холов флуид при който квазичастиците носят половин квант на магнитния поток (поради което се раждат винаги по двойки) и имат неабелева обменна статистика. По-късно Грейтер и съавтори [33] забелязват връзката между моделите 331 и Pf, съгласно която последният се получава от първия, когато потенциалната бариера между слоевете клони към нула, респ. когато тунелирането е значително. Математическите аргументи в полза на тази идея се базират на тъждеството на Коши за детерминантата (1.1.3а) и на аналогично тъждество на Форбениус за θ -функциите, но не са разработени достатъчно добре. Също така те представят допълнителни аргументи за възможността двата различни експеримента [34, 35], в които

е наблюдавано платото $1/2$ да се регистрирали два нееквивалентни Холови флуида, и Пфафовия е подходящ за експеримента [34], докато експеримента [35] описва модела 331.

Вълновата функция (1.1.3с) за сдвоената част на основното състояние на модела HR е предложена от Халдейн–Резай [25] с аргумента, че тя най-добре би описвала наблюдавания флуид при $\nu = 5/2$, тъй като има известни съображения [36], че основното състояние за това плато е неполяризирано (или частично поляризирано). В такъв случай може да се очаква, че вълновата функция е спин-синглет, т.е. удовлетворява Фоковите условия [37, 38] за фермионна система с пълнен спин нула. Тази функция е била открита с помощта на числено диагонализирание на т.нар. "псевдопотенциален Хамилтониан" [25] отчитащ проекцията на Кулоновото взаимодействие върху най-ниското ниво на Ландау.

Изследването на трите модела 331, Pf, HR, от гледна точка на КТП, е започнато от Уен и съавтори [39, 40], които изследват конформната теория за съответните неутрални фактори.

Особено място в изследването на тези три модела (чрез методи на КТП) заема работата на Рийд и Милованович [41]. Съгласно техния анализ пълната рационална конформна теория за всеки от моделите се строи като тензорно произведение на РКТП за Лафлиновата част и тази за неутралните фермиони, но при допълнително условие (еднакво в трите случая) за допустимите комбинация от представяния на фермионната и анионната части наречено **Правило на Четност (ПЧ)** (Parity Rule) [41]². Това правило налага ограничения върху наблюдаемите полета в тензорното произведение от двете хирални алгебри, което може да бъде формулирано така: хиралните наблюдаеми се реализират като тензорни произведения от полета в неутралната и в заредената части на теорията при които броят F на неутралните фермиони (отговарящи на неутралната КТР) и броят N на Лафлиновите бозони участващи в конструкцията на дадена наблюдаема имат еднаква четност, т.е. $F \equiv N \pmod{2}$. Физически това ПЧ може да бъде интерпретирано като изискването съставните частици с четен заряд да бъдат бозони, а тези с нечетен – фермиони.

Според [41] неутралната част на 331 модела се оказва теория на (релятивистични, безмасови и хирални) Вайлови фермиони $\Psi^*(z)$, $\Psi(z)$ със $u(1)$ -товари ± 1 и конформна размерност $1/2$, нормалното произведение на които дефинира локален $u(1)$ -ток пораждащ алгебрата на токове $\widehat{u(1)}$. Тензорът на енергията и импулса е със централен товар $c = 1$ и се изразява чрез тока по формулата на Сугавара. Хиралната алгебра породена от Вайловите фермиони, която ще означаваме със \mathcal{W}_1 е всъщност рационално разширение [A] на алгебрата на токове $\widehat{u(1)}$ с квадрат на заряда 1. При това вълновата функция (1.1.3а) се реализира като вакуумно средно на Вайловите фермиони. Физически смисъл обаче има само бозонната подалгебра съдържаща само четни комбинации от Вайлови фермиони. Характерите на нейните четири сектора на суперотбор се изразяват чрез θ -функции и η -функцията на Дедекинд.

Характерите на пълната теория, съгласно ПЧ, се представят като комбинации от

²Авторите използват термина "projection rule" със същото значение

характерите на алгебрата \mathcal{W}_1 и тези на анионната част, така че да се получат твистиранни и нетвистиранни характерни с определена комбинирана четност $(-1)^{N+F}$. За случая $m = 2$ хиралната алгебра на модела 331 може да се запише като $\mathcal{A}_{331} = \left(\mathcal{W}_1 \otimes \widehat{su(2)}_1 \right) / \mathbb{Z}_2$, където факторизирането по \mathbb{Z}_2 изразява правилото на четност. Тази процедура е всъщност най-простият възможен пример на *орбифолд* – една доста популярна конструкция на РКТП използвана в теорията на суперструнните модели [42, 43, 16]. Диагоналната статсума построена по този начин се оказва инвариантна относно действието на групата $SL(2, \mathbb{Z})$ както трябва да се очаква за теория дефинирана върху тора. В допълнение към стандартната модуллярна инвариантност, теориите описващи квантовия ефект на Хол трябва да удовлетворяват две нови условия формулирани за първи път от Капели и Земба [30]. Това са т.нар. условия за U - и V - инвариантност налагани върху модуллярните параметри τ, ζ , които изразяват естествени физически изисквания и реализират *спектралния поток* [8, 30] лежащ в основата на механизма за протичане на Холовия ток.

Строгата математическа теория на орбифолдите, основите на която са положени в [42], беше доразвита наскоро в работата [43] на Кац и Тодоров. Това позволява да бъде приложена общата орбифолдна конструкция за математически по-прецизно обосноваване на получените резултати в тази област.

Изглежда естествено да се очаква, че подходът към 331 модела от гледна точка на решетъчните разширения на алгебрата $\widehat{u(1)}^2$ е еквивалентен на орбифолдния подход, основан на ПЧ на Рийд–Милованович. В § 4 на дисертацията се изследва съответствието между двата подхода. ПЧ се интерпретира, в рамките на орбифолдния подход, като инвариантност спрямо калибровъчната група \mathbb{Z}_2 .

Рийд и Милованович [41], а преди това Уен и съавтори [39, 40], идентифицират неутралната част на Пфафовия модел с модела на Изинг [27, 16] с централен товар $c = 1/2$, а пълната хирална алгебра се получава като тензорно произведение от хиралната алгебра на модела на Изинг и (Лафлиновата) анионна хирална алгебра факторизирано по \mathbb{Z}_2 съгласно ПЧ, т.е. $\mathcal{A}_{\text{Pf}} = \left(\mathcal{A}_{\text{Ising}} \otimes \widehat{su(2)}_1 \right) / \mathbb{Z}_2$. Пресметнати са пълните характерни и е построена (диагоналната) статсума удовлетворяваща всички модуллярни условия [41]. Не е изследвана обаче връзката между Пфафовия модел и 331, което е следващата основна задача поставена в дисертацията. В § 5 е направен анализ на операторното съдържание на модела, пресметанти са характерите чрез операторна редукция на 331 модела, възпроизвеждайки резултатите от [41].

Предните два модела бяха сравнително добре разработени, т.е. макар че в тях имаше неуточнени детайли общата идеология беше ясна. Не така стои обаче въпроса при модела на Халдейн–Резай. Още от самото начало моделът HR се оказва доста проблематичен. Уен и съавтори [39, 40] изследват конформната симетрия на неутралната част на модела. При предположение за първичност на полетата (което неявно се прави в [39, 40]) се оказва, че централният товар на Вирасоро е $c = -2$ така, че моделът (който се оказва свързан [44, 45, 46] със ξ - η системата от фермионни духове използвана в суперструнните теории) съдържа състояния с отрицателен квадрат на нормата и попада извън границата на унитарните минимални конформни модели. Квантовата теория обаче изисква отделянето на **физическо подпространство** в което

скаларното произведение е положително дефинитно. Причината за тази неунитарност е много дълбока. Оказва се, че полетата реализиращи като вакуумно средно вълновата функция на основното състояние нарушават връзката между спина и статистиката: те са антикомутиращи полета със цял спин. Съгласно теоремата за връзката между спина и статистиката теория съдържаща такива полета не може да бъде с положителна метрика.

Рийд и Милованович [41] пресмятат характеристиките на неутралните фермиони и те се оказват почти същите както тези на $c = 1$ теорията на алгебрата $\widehat{u}(1)$ разширена с квадрат на товара 4, отговарящи на неутралната част на 331 модела. Същите резултати за характеристиките разкриващи дълбоката връзка между КТП със централни товари $c = -2$ и $c = 1$ са използвани преди това от Кауш [45]; те бяха преоткрити в [D], а след това и от Лудвиг и съавтори [47]. Сдвояването на характеристиките от неутралната част и тези на заредената, за модела HR според [41], обаче е различно от това за модела 331 макар, че ПЧ е по принцип същото. При това получените пълни характери за HR модела (противно на твърдението на Рийд и Милованович) се оказват модулаторно нековариантни, т.е. съвкупността от характери не е затворена относно S -трансформация. Това е следващия много сериозен проблем в модела HR. С цел да бъде намерено неговото решение Флор и съавтори [48] разширяват теорията включвайки логаритмични полета. За съжаление обаче това не се оказва много плодотворно, т.е. модулаторната инвариантност не е възстановена, така че проблемът продължава да бъде открит. Тук трябва да отбележим, че тези характери нямат смисъл на хирални статсуми тъй като са пресметнати като следи върху пространства с индефинитна метрика нарушаващи статистическата интерпретация. Затова не е чудно, че са нарушени и други основни принципи, напр. модулаторната инвариантност.

Друг проблем засягащ модела на HR е неговия топологичен порядък. Според Рийд и Милованович броят на топологически нееквивалентните основни състояния върху тора (респ. сектори на суперотбор) е 8 (макар, че при тях няма модулаторно инвариантна статсума така, че не е ясен смисъла на теорията върху тора), а според Уен техния брой е 10.

Също така не са ясни свойствата на квазидупките описващи заредените възбуждания в модела. Според възприетото мнение те носят (както при Пфафовия модел) половин квант на магнитния поток и имат неабелева обменна статистика. Според Рийд и Резай [49] размерностите на пространствата на възбужданията съдържащи $2n$ квазидупки са 2^{2n-3} за разлика от 2^{n-1} за Пфафовия модел и 2^{2n-1} за 331, което се използва като аргумент в подкрепа на хипотезата за неабелева статистика. Подробен обзор на досегашното разбиране (както и на проблемите възникващи при описанието) на състоянието HR е направен в § 6.

Трябва да подчертаем, че проблемите възникващи при описанието на състоянието HR остават нерешени вече повече от 15 години, което дава известна представа за тяхната сериозност, както и обяснение за мотивировката на изследването.

В § 7 на дисертацията е предложен качествено нов подход към модела HR, който намира радикално решение на почти всички проблеми. Според него съществува възможност за предефиниране на тензора на енергията и импулса в неутралната част на теорията, запазвайки конформната симетрия, в резултат на което централния товар

се променя от $c = -2$ до $c = 1$. Новият тензор на енергията допуска (за разлика от стария) положително дефинитно скалярно произведение, което е съществено различно от старото. При това, съществува взаимно еднозначно съответствие между конформните размерности на първичните полета в двете теории (със $c = -2$ и $c = 1$) и взаимноеднозначно съответствие между определен клас първични полета в двете теории. Това е дълбокото съдържание на установеното по-рано съответствие между характеристиките на тези две теории.

В допълнение към това, основното състояние на модела HR се реализира като възбудено състояние в модела 331 и същото важи за останалите състояния в модела HR.

Намерено е решение и на проблема с модулариантата инвариантност. Оказва се, че секторите на суперотбор в двете теории (със $c = -2$ и $c = 1$) буквално съвпадат, а двата хирални Хамилтониана (нулевите моди на съответните тензори на енергията и импулса) са свързани чрез оператора на $u(1)$ -заряда така, че характеристиките върху един и същ сектор на двете теории съвпадат като множества, но има отместване на индексите. След прилагане на ПЧ, предложено от Рийд и Милованович за модела HR, върху отместените характеристики, т.е. характеристиките на подобрения тензор на енергията, пълните характеристики за HR съвпадат с пълните характеристики на модела 331. Това означава, че диагоналната статсума построена от поправените характеристики ще удовлетворява всички модулариантни условия и ще съвпада с тази за модела 331. Допълнително беше направен подробен анализ на допустимите модулариантни инварианти построени върху максималното множество от 32 характера получени като произведения на характеристиките на бозонните хирални подалгебри на \mathcal{W}_1 и $\widehat{su(2)}_1$ от които са построени характеристиките на Рийд и Милованович както за модела 331 така и за HR. Резултатът показва, че в класа на решетъчните РКТП само статсумата за модела 331 удовлетворява всички физически изисквания и модулариантни условия.

Така стигаме до основния извод – единствената унитарна конформна теория (с положително дефинитно скалярно произведение) удовлетворяваща всички изисквания за модела HR е теорията 331, т.е. двете състояния описват един и същи клас на универсалност. Оказва се обаче, че основното състояние на Халдейн–Резай в модела 331 притежава допълнителна \mathbb{Z}_2 симетрия, която се реализира като товароспрягане на основните полета. Това позволява да бъде отделен модела HR от 331 като допълнителен \mathbb{Z}_2 орбифолд относно действието на товароспрягането. Този проблем не е решен в дисертацията – по него все още се работи.

Накрая, в § 8 е разгледан "максимално симетричния" модел, със фактор на запълване $1/2$, попадащ в класификацията на Фрьолих [50]. Този модел е рационално разширение на алгебрата на токове $\widehat{u(1)}^3$ с тримерна решетка и съдържа локална $su(2) \otimes su(2)$ симетрия – едната $SU(2)$ отчита спина, а другата изразява симетрията относно преминаването от единия слой в другия. Интересно е да отбележим, че и трите предишни модела се получават като подходящи калибровъчни редукции на този максимално симетричен модел. Следователно съществува единно описание на всичките конформни модели предложени за описание на платото $1/2$.

Нека резюмираме основните въпроси разгледани в дисертацията.

Основни задачи поставени в дисертацията:

• Модел 331

1. Да се установи връзката между двата различни подхода (на решетъчната РКТП на Халперин и \mathbb{Z}_2 орбифолда относно правилото на четност на Рийд–Милованович) към модела 331.
2. Да се изследва модела от гледна точка на теория на орбифолдите, разработена от Кац и Тодоров [43], с цел получаване на математически строги резултати (възпроизвеждащи тези на Рийд–Милованович) за структурата на хиралната алгебра, нейните представяния, характери, модулари трансформации и статистическа сума.
3. Да се изследват физическите следствия от прилагането на орбифолдната конструкция – квазичастици, топологичен ред и правила на сливане.

• Пфафов модел

1. Да се изследва Пфафовия модел като калибровъчна редукция на модела 331 съответстваща на ниско-барьерната граница. Да се осмисли модела като \mathbb{Z}_2 -орбифолд от вида $(\text{Ising} \otimes \widehat{su(2)}_1) / \mathbb{Z}_2$.
2. Да се покаже, че след проекцията в 331 модела корелационните функции възпроизвеждат Пфафиана, а Вайловите характери преминават в тези за модела на Изинг.
3. Да се изследват правилата на сливане, статсумата на модела и нарушението на динамичната симетрия $W_{1+\infty}$.

• Модел на Халдейн–Резай

1. Да се изследва хиралната алгебра на модела и връзката с модела на фермионните духове ξ - η .
2. Да се намери решение на проблема с присъствието на състояния с отрицателна норма в модела без да се нарушава конформната симетрия. Да се намери физическо подпространство (или фактор-пространство) с положително дефинитно скаларно произведение.
3. Да се изследват първичните полета в модела и да се анализира тяхната $SU(2)$ симетрия.
4. Да се изследва $SU(2)$ симетрията на вълновите функции на основното състояние и на възбудените състояния съдържащи квазидупки.
5. Да се изследва възможността за неабелва обменна статистика на квазичастиците.
6. Да се открие причината за липсата на модулари ковариантност на характерите на Рийд–Милованович и да се построи модулари инвариантна статсума. Да се изследва възможността за съществуване на други правила на четност съвместими с модулари инвариантност.

- **Модел на Фрьолих**

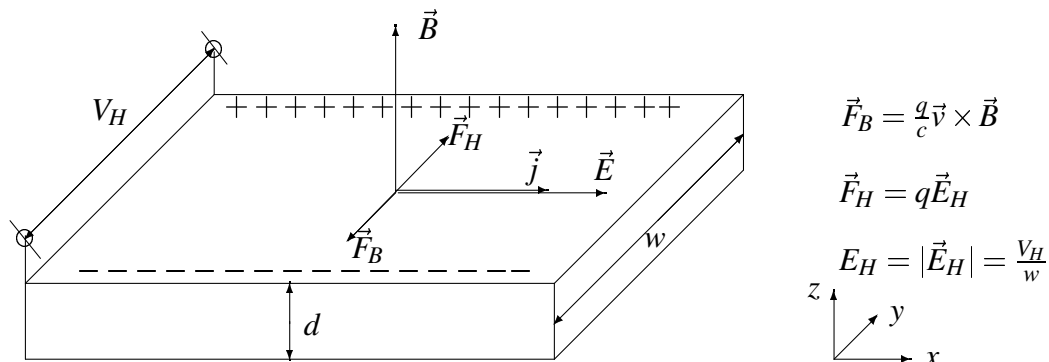
1. Да се изследва възможността за "максимално симетрично" описание на платото $\nu = 1/2$ на базата на локална $SU(2) \times SU(2)$ динамична симетрия.
2. Да се намерят калибровъчни редукции към моделите 331, Pf, HR.

2 Квантов ефект на Хол

2.1 Класически ефект на Хол

Да разгледаме проводящата пластинка изобразена на Фиг. 1 поставена във хомогенно магнитно поле с индукция \vec{B} и постоянно електрично поле с интензитет \vec{E} създадено от потенциална разлика между левия и десния край на пластинката обуславяща протичането на електричен ток с обемна плътност \vec{j} .

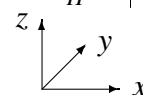
Фигура 1: Опитна постановка за наблюдаване на ефекта на Хол



$$\vec{F}_B = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{F}_H = q \vec{E}_H$$

$$E_H = |\vec{E}_H| = \frac{V_H}{w}$$



Големината на протичащия, през напречното сечение на пластинката, ток е $I = jwd$, където d е дебелината а w – ширината на пластинката. Съгласно класическата електронна теория големината на плътността на тока се пресмята по формулата $j = |\vec{j}| = nqv$, където n е броя на токоносителите, q – техния заряд, а $v = |\vec{v}|$ – големината на скоростта на дрейф. Под действие на магнитната компонента на силата на Лоренц \vec{F}_B траекториите на токоносителите се закривяват и те започват да се натрупват върху двата противоположни ръба на пластинката в зависимост от знака на заряда си. Това поражда потенциална разлика между двата ръба (наречена *Холово напрежение*), която расте докато създадената от нея електрична сила $\vec{F}_H = q\vec{E}_H$ (насочена обратно на \vec{F}_B) компенсира \vec{F}_B , установявайки стационарно разпределение на зарядите между двата ръба, т.е.

$$|\vec{F}_H| = |q||\vec{E}_H| = |q| \frac{V_H}{w} = \frac{|q|vB}{c} = |\vec{F}_B|. \quad (2.1.1)$$

Като заместим $v = j/(nq)$ и $j = I/(wd)$, в уравнение (2.1.1), за Холовото напрежение получаваме

$$V_H = R_H \frac{IB}{d}, \quad R_H = \frac{1}{qnc}, \quad (2.1.2)$$

където R_H се нарича константа на Хол. Появата на потенциалната разлика V_H , в направление ортогонално на първоначално протичащия ток се нарича ефект на Хол (1880).

От гледна точка на тензорите на специфичната проводимост ρ и специфичната проводимост σ , дефинирани чрез

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix}, \quad \sigma = \rho^{-1}, \quad (2.1.3)$$

ефекта на Хол означава появата на недиагонални елементи (тензорът на специфичната проводимост, респ. на специфичното съпротивление, е винаги антисиметричен – това изразява факта, че магнитната компонента на силата на Лоренц води до топлинни загуби). В този случай, $\rho_{xy} = -\rho_{yx} =: \rho_H$ се определя от

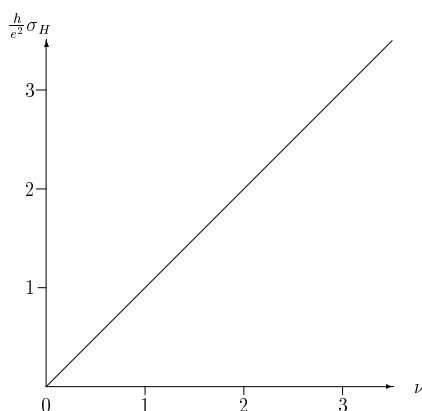
$$|\vec{E}_H| = \rho_H |\vec{j}| \quad \implies \quad \rho_H = R_H B = \frac{B}{n q c}. \quad (2.1.4)$$

Тогава, за Холовата проводимост $\sigma_H := \sigma_{yx} = -\sigma_{xy} = 1/\rho_H$ получаваме (за удобство ще умножим с нормировъчния фактор h/e^2 , където h е константата на Планк, а e - заряда на електрона)

$$\frac{h}{e^2} \sigma_H = \frac{n}{n_B} =: \nu, \quad n_B \stackrel{\text{def}}{=} \frac{eB}{hc} = \frac{B}{(hc/e)}. \quad (2.1.5)$$

Величината ν се нарича *фактор на запълване*, тъй като представлява отношение на две плътности: броя на частиците върху единица площ $n = N/S$ и броя на квантите hc/e на магнитния поток на единица площ, $n_B = \frac{1}{S} \frac{BS}{(hc/e)}$, определящ броя на едночастичните състояния на системата.

За сравнение с квантовия ефект на Хол ще ни бъде необходима графиката на зависимостта на нормираната Холова проводимост $(h/e^2)\sigma_H$ от фактора на запълване ν . Съгласно формула (2.1.5) графиката е права линия с наклон 1, което е изобразено на Фиг. 2.

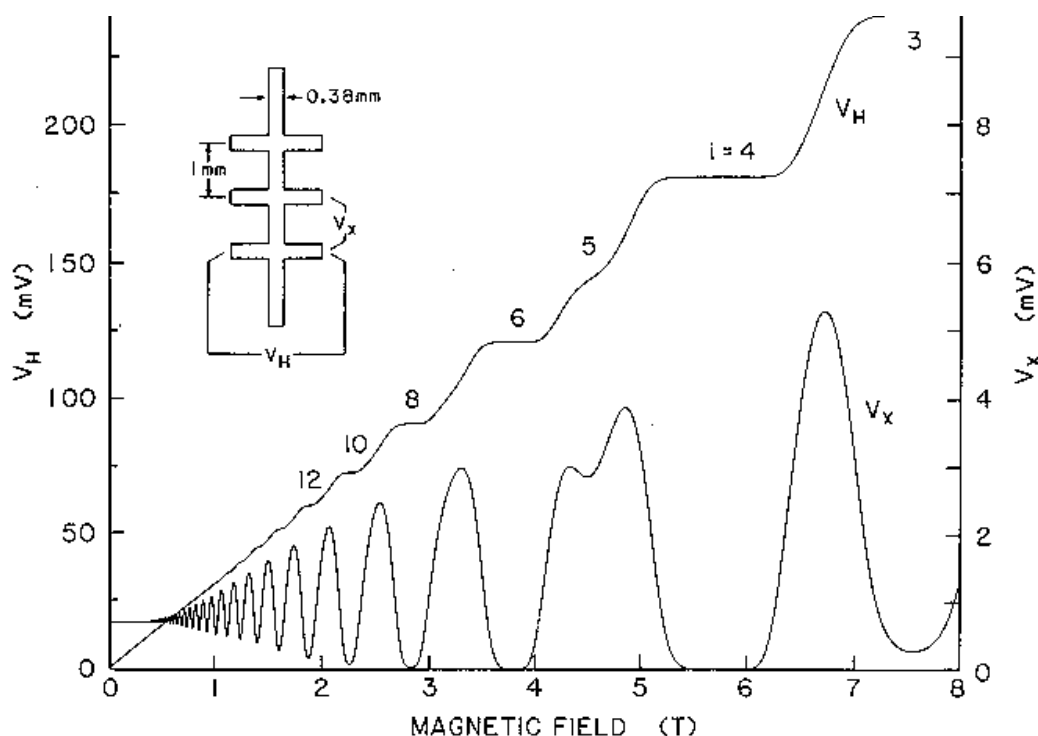


Фигура 2: Класическа зависимост $\sigma_H(\nu)$

2.2 Целочислен и дробен квантов ефект на Хол

Както се вижда от у-ние (2.1.5) факторът на запълване може да бъде променян по два независими начина: като изменяме плътността n на броя на частиците и чрез изменение на магнитното поле. Това позволява много точно да бъде проверено поведението на кривата изобразена на Фиг. 2.

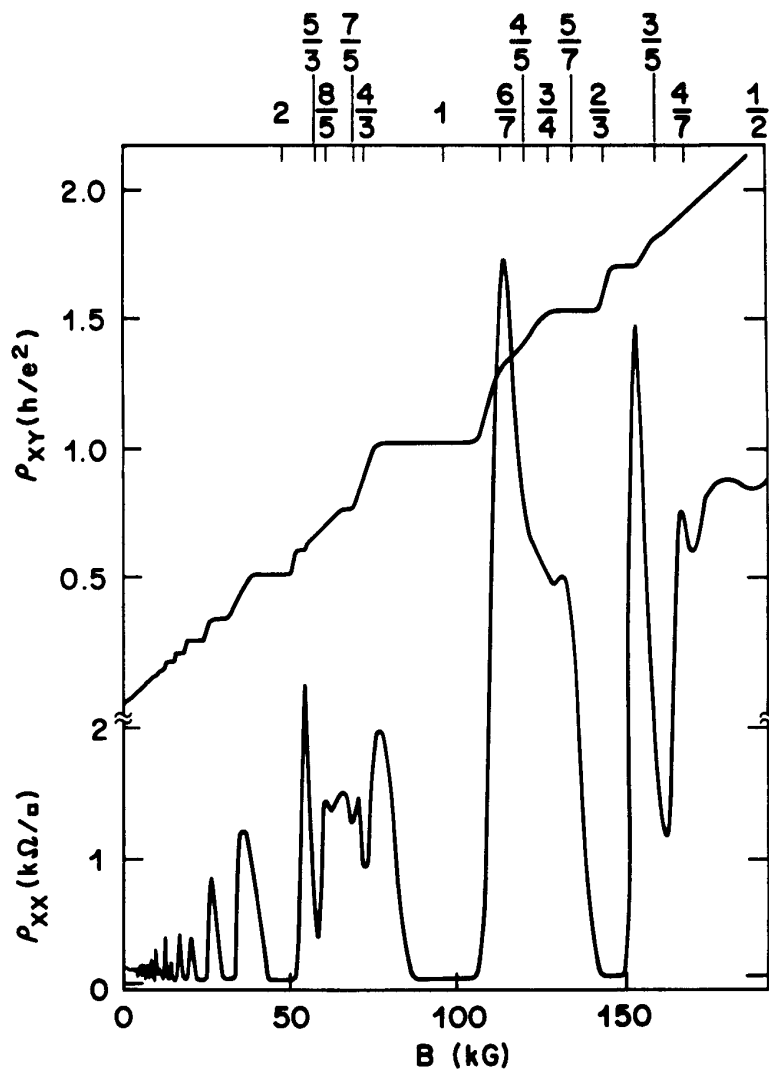
През 1980 г. Клаус фон Клицинг открива [1], че в много чисти и тънки полупроводникови пластинки, при много ниски температури и много силни магнитни полета линейната зависимост (2.1.5) на Холовата проводимост от фактора на запълване ν се заменя от сложна стъпаловидна крива с ясно изразени плато с целочислени височини, както е показано на Фиг. 3. Явлението е наречено (целочислен) квантов ефект на Хол и за него фон Клицинг получава Нобелова награда за физика през 1985 г.



Фигура 3: Целочислен квантов ефект на Хол – зависимостта на Холовата проводимост от фактора на запълване

През 1982 г. са открити още плато [51], чиито височини са рационални дроби с преобладаващи нечетни знаменатели. Последното е известно като *дробен квантов ефект на Хол*. Оказва се, че елементарните възбуждания при този ефект могат да носят дробни заряди [8] (в единици – заряда на електрона) и се подчиняват на дробни изключващи статистики [12, 13, 17]. Тяхното съществуване получи експериментално потвърждение при изследване на обратно разсеяни шумови токове в т. нар. квантови точкови контакти [9]. За откриването и описанието на тези нови квантови флуиди Лафлин, Цюи и Щормер получиха Нобеловата награда за 1998 г.

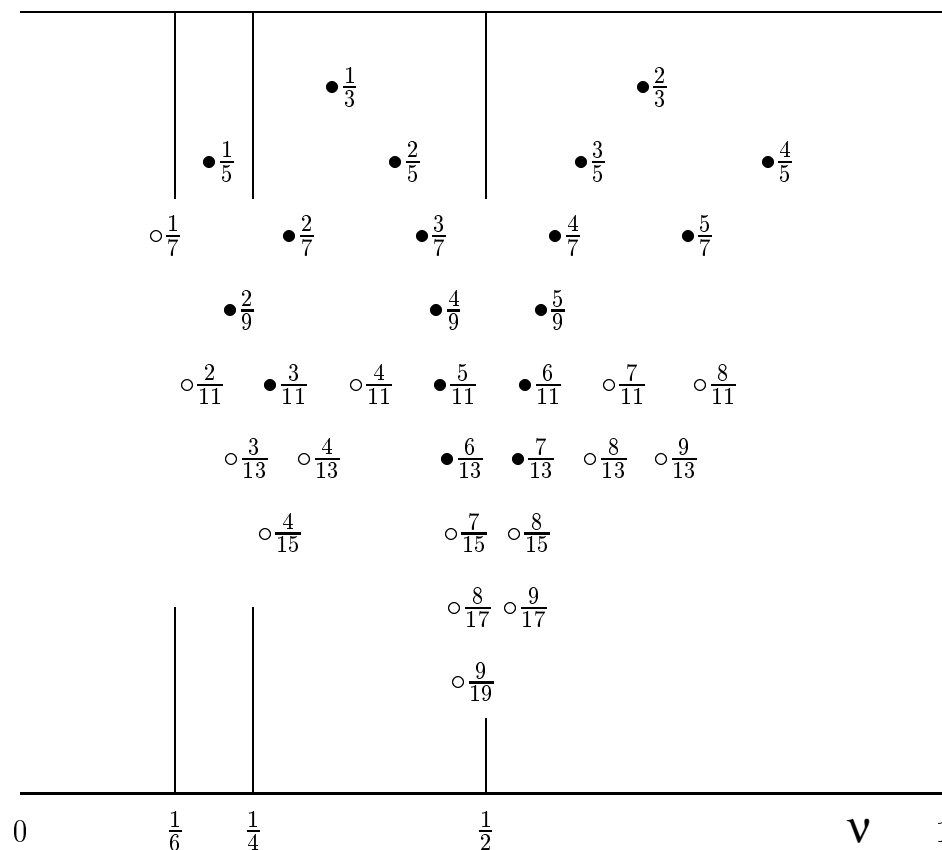
За сравнение с класическата зависимост на Холовото съпротивление ρ_H от фактора на запълване на Фиг. 3 е показано схематично разположението на целочислените платата. Разположението на дробните платата е изобразено на Фиг. 4.



Фигура 4: Дробен квантов ефект на Хол – зависимостта на Холовата проводимост от фактора на запълване

На Фиг. 4 е показана зависимостта на Холовото съпротивление $\rho_{xy} = \rho_H = 1/\sigma_H$ като функция на магнитното поле при дробния ефект. Естествено поведението на ρ_H при промяната на магнитното поле е обратно на поведението на Холовата проводимост, т.е. когато ν расте ρ_H също расте, докато σ_H намалява. На същата фигура е показано и поведението на надлъжното (омично) съпротивление, за да се подчертае връзката между платата на първото и нулевите стойности на второто. В горния ляв ъгъл е изобразена полупроводниковата пластинка със съответните номерирани контакти. В допълнение към Фиг. 4 и за създаване на по-ясна представа за броя и раз-

пределението на платата на Холовата проводимост, Фиг. 5 показва експериментално наблюдаваните плата в няколко серии експерименти³ на



Фигура 5: Експериментално наблюдавани плата: Холова проводимост е изобразена в единици (e^2/h). Символите (●) означават стабилни (т.е. широки) плата, които са били наблюдавани в няколко експеримента; символите (○) означават по-слабо изразени плата и такива открити в само в един експеримент. Трябва да отбележим, че стабилността намалява с нарастването на знаменателя на ν . Фазови преходи между флуиди с еднакви фактори на запълване са били наблюдавани при $\nu = 2/3, 2/5, 3/5, 5/7$.

2.2.1 Основни характеристики на квантовия ефект на Хол

Характерните особености на квантовия ефект на Хол могат да бъдат систематизирани по следния начин [6, 18]:

³тази фигура е използвана благодарение на любезното съдействие на Андреа Капели

- **Плата:** Зависимостта на (нормираната) Холова проводимост $h/e^2 \sigma_H$ от фактора на запълване ν е стъпаловидна крива, чийто плато се намират на рационална височина. Преобладават нечетните знаменатели. Целочислените плато са определени експериментално с астрономическа точност $\sim 10^{-8}$, докато дробните плато са определени с точност $10^{-5} \div 10^{-2}$.
- **Свърхпроводимост:** Когато точката с координати $(\nu, h/e^2 \sigma_H)$ се намира върху някое от платата надлъжното съпротивление клони към нула. Тъй като (недиагоналното) Холово съпротивление не допринася за създаването на Джаулова топлина, липсата на Омично съпротивление говори за липсата на загуби (дисипация) в системата., т.е. наблюдава се ефективна свърхпроводимост. Следователно, когато Холовата система се намира върху плато нейните тензори на специфично съпротивление и специфична проводимост приемат вида

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & \rho_H \\ -\rho_H & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_H \\ \sigma_H & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_H = \frac{1}{\rho_H} = \frac{e^2}{h} \nu. \quad (2.2.1)$$

- **Универсалност:** Точността на квантуване на платата на Холовата проводимост (както и стойностите им) са нечувствителни към детайлите при изработката на пробата, нейната форма, материала и неговата чистота. Поведението на Холовата проводимост встрани от платата е също универсално.
- **Дробни заряди:** При дробните плато се наблюдават възбуждания (квазичастици) със дробен електричен товар [3, 2, 9] и съответно *дробна обменна статистика*.
- **Неполяризирани основни състояния:** Изследванията на Холови системи в "наклонени магнитни полета" (tilted magnetic fields) показват, че при платата $\nu = 5/2, 8/5$ [4], $4/3$ [3] и $2/3$ [3, 4] основните състояния на системата могат да бъдат неполяризирани. За определени плато те могат да бъдат спин-синглети.
- **Фазови преходи:** При определени плато $\nu = 2/3, 3/5, 5/7$ са наблюдавани фазови преходи породени от магнитното поле или плътността.

Трябва да отбележим, че съществуването на платата на Холовата проводимост и съответно анулирането на надлъжното съпротивление изразяват факта, че в нискоенергетичния спектър на системата присъства (*забранен*) *енергетичен праг* (energy gap [6, 8, 18]) над енергията на основното състояние. Както ще видим по-нататък, въвеждайки хидродинамична аналогия, Холовите системи имат поведението на *несвиваеми квантови флуиди* [8, 22].

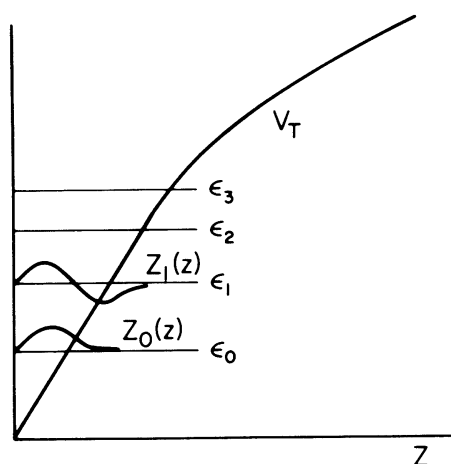
2.2.2 Условия за наблюдаване на квантовия ефект на Хол

Условията за наблюдаване на квантовия ефект на Хол се различават в зависимост от това кое плато ни интересува, в частност, дали е целочислено или дробно. Общо погледнато те могат да бъдат класифицирани по следния начин [6, 18]:

Забележка 2.1 От квантово-механична гледна точка замразяването на степените на свобода в перпендикулярно направление (т.е. по оста z) е резултат от разделянето на променливата z от променливите (x, y) благодарение на това, че векторния потенциал \vec{A} не зависи от z и в приближение на невзаимодействащи електрони и трансляционна инвариантност по границата. Тогава уравнението по z е от вида [6]

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V_T(z)\right) Z_n(z) = \epsilon_n Z_n(z), \quad (2.2.2)$$

където "триъгълния" потенциал V_T , с висока потенциална бариера на границата между изолатора и полупроводника, създаден от напрежението на гейта е изобразен на Фиг. 7.



Фигура 7: Потенциална енергия $V_T(z)$ в напречно направление.

Макар и доста подобни, целочисления и дробния ефекти на Хол се различават съществено. Докато първият може да бъде обяснен чрез свойствата на многофермионната система, в частност – чрез принципа на Паули и статистиката на Ферми–Дирак, дробният ефект на Хол въвежда качествено нови свойства – ефективните квазичастици носят дробен електричен товар (в единици – заряда на електрона) [8, 9]; тяхната обменна статистика, наречена *анионна* (anyon), не е нито от типа на Ферми–Дирак нито Бозе–Айнщайн и води до появата на комплексни фазови множители в квантово-механичните вълнови функции при размяна на тъждествени частици [7]. Нещо повече – вместо принципа на Паули се появява негово обобщение съгласно което в едно квантово състояние могат да се намират повече от една, но краен брой квазичастици. Такива статистики, известни като "Халдейн" (или още – "изключващи") статистики [12] са не просто екзотика, а конструктивен метод за въвеждане на по-обща статистически взаимодействия.

2.2.3 Йерархии от плата

- **Серия на Лафлин:** Серията носи името на Лафлин, понеже той предлага първото описание на тези плата чрез многочастична вълнова функция [8]

$$\nu = \frac{1}{2p+1}, \quad p \in \mathbb{N} \quad (2.2.3)$$

- **Серия на Джейн:** Това е по-обща серия (съдържаща тази на Лафлин), която обхваща почти всички наблюдавани плата

$$\nu = \frac{m}{2mp+1}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (2.2.4)$$

- **Други плата:** Това са плата оставащи извън серията на Джейн, например, $4/11$, $1/2$, $5/2$, ...

2.2.4 Фактори на запълване с четни знаменатели

Основната част от експериментално наблюдаваните плата на проводимостта се характеризират [6] с нечетните знаменатели на фактора на запълване ν . За обикновените (еднослойни) Холови флуиди този факт се свързва с условието електрона да присъства измежду заредените възбуждания на Холовата система, тъй като фермионната статистика е възможна само когато знаменателя е нечетно цяло число [6]. Една от причините за това е, че в еднослойните проби спиновите степени на свобода са замразени [7], т.е. електроните са напълно поларизирани по посока на магнитното поле, тъй като енергията на Зеeman е пропорционална на B докато тази на Кулоновото взаимодействие е пропорционална на $\ell^{-1} \sim \sqrt{B}$. Трябва да отбележим, разбира се, че тъй като $B \sim \frac{\hbar}{e\nu} n$ то при ниски концентрации n двете енергии могат да станат сравними.

От гледна точка на многочастичните вълнови функции нечетния знаменател гарантира антисиметрията относно размяната на координатите на електроните. Когато, обаче, спиновите степени на свобода се размразят (а това се случва в неполаризирани проби) във вълновата функция се появява допълнителен (спинов, неутрален) антисиметричен фактор, така че заредената част (свързана с фактора на запълване) може да бъде симетрична, т.е. фактора на запълване може да бъде с четен знаменател [36].

Изискването за ниски концентрации показва, че създаването на неполаризирани проби в еднослойни системи е свързано с технически трудности. Не случайно единственото наблюдавано плато с нечетен знаменател в еднослойни проби [36] е загадъчното $\nu = 5/2$. В литературата [7] е широко разпространено схващането, че това състояние не е напълно поларизирано.

Изследването на неполаризирани Холови състояния се основава на т. нар. техника на *наклонено магнитно поле* (tilted magnetic field) [7]. В него се използва, че енергията на Зеeman е пропорционална на пълното магнитно поле B_{tot} докато енергията на Ландау $\hbar\omega_B$, задаваща разстоянието между нивата на Ландау, зависи само от нормалната компонента B_{\perp} . Следователно енергията на Зеeman може да бъде изменяна независимо от

тази на Ландау като въведем ъгъла на наклон θ , така че $B_{\perp} = \text{fixed}$ и $B_{\perp}/B_{\text{tot}} = \cos \theta$. Тогава, за неполяризиращи състояния, експериментално измерения забранен енергетичен праг се оказва линейна функция на пълното магнитно поле

$$\Delta = \Delta_0 - |g|\mu_B B_{\text{tot}} \Delta S, \quad (2.2.5)$$

където Δ_0 е енергетичния праг при нулево магнитно поле, $\mu_B = 0,67 \text{ K/T}$ е магнетона на Бор, $|g| \sim 0,44$ за GaAs [7] и ΔS е спиновия излишък след топлинно активиране на двойка квазичестица–квазидупка.

Забележка 2.2 При спин-поляризиращите основни основни състояния на Холовия флуид (т.е. състояния при които всички спинове са точно ориентирани по посоката на магнитното поле така че Зеemanовата енергия $-g\vec{S}\cdot\vec{B}$ да бъде минимална) енергетичния праг (2.2.5) е намаляваща функция на магнитното поле [36]. Наистина нека предположим, че основното състояние е от типа $|\uparrow\uparrow \dots \uparrow\rangle$. Тогава съществуват 3 възможни стойности на пълния спин след активирането на двойка квазичестица–квазидупка:

(а) двойката квазичестица–квазидупка има същите спинове както основното състояние $\uparrow\uparrow$: тогава пълният спин остава същия, т.е. $\Delta S = S' - S_0 = 0$.

(б) една от частиците има обратен спин, т.е. $\uparrow\downarrow$ или $\downarrow\uparrow$: тогава проекцията на спина след активирането ще бъде

$$S' = \frac{N-1}{2} - \frac{1}{2} = S_0 - 1 \quad \implies \quad \Delta S = -1,$$

където от първият член е спинът на частиците \uparrow , а вторият – спинът на \downarrow .

(в) и двете квазичестици са с обратен спин:

$$S' = \frac{N-2}{2} - 2\frac{1}{2} = S_0 - 2 \quad \implies \quad \Delta S = -2.$$

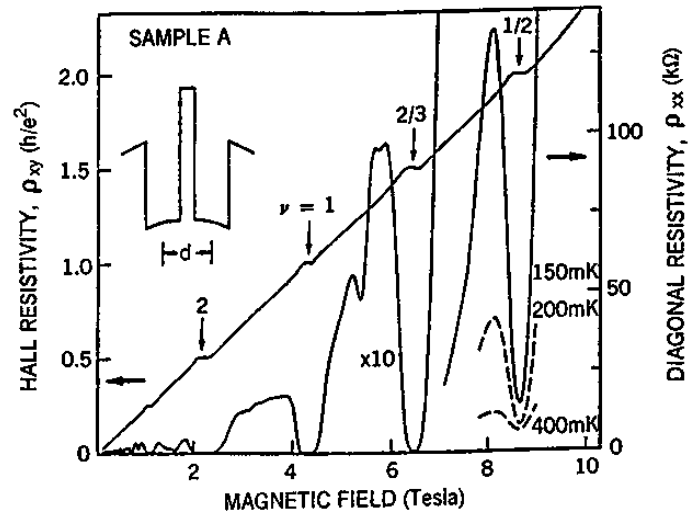
Извод: Ако основното състояние на Холовия флуид е напълно поляризиращо то големината на забранения енергетичен праг е намаляваща функция на големината на пълното магнитно поле.

Експериментите с наклонено магнитно поле обаче показват, че **енергетичният праг Δ за $\nu = 5/2$ е намаляваща функция на пълното магнитно поле [36]**. Следователно основното състояние отговарящо на това платото не е напълно поляризиращо, т.е. спиновите степени на свобода не са напълно замразени.

Оказва се, че в т.нар. *двуслойни флуиди* създаването на неполяризиращи състояния е значително по-лесно. Основната причина за това е, че Кулоновото взаимодействие не е вече независимо от взаимната ориентация на спиновете на отделните електрони (както в еднослойните проби) поради крайното разстояние между двата слоя. Нещо повече – между двата слоя съществува тунелиране, което нарушава пълната поляризация, "хибридизира" квантовите състояния на двата слоя и създава допълнителен енергетичен праг (между симетричните и антисиметричните състояния) който липсва в еднослойните флуиди. Поради това, изследването на двуслойни флуиди се оказва изключително интересно.

Съществуват две различни техники за изграждане на двуслойни системи [36]:

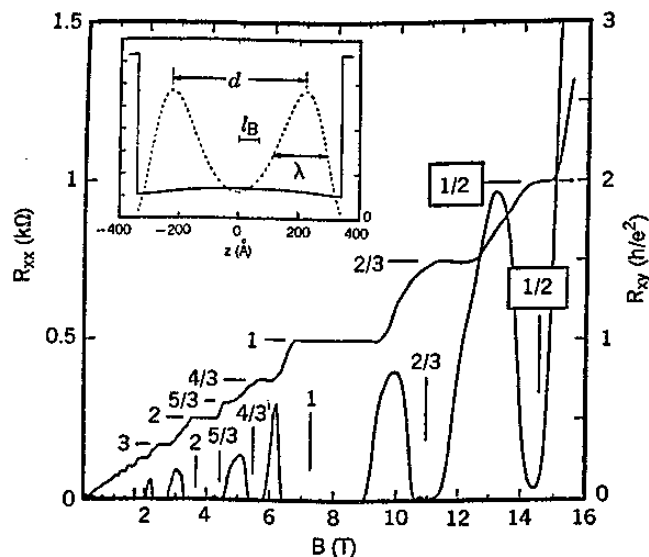
- **Двойна Квантова Яма** (Фиг. 8). Два тънки слоя от GaAs с дебелина $\sim 200 \text{ \AA}$ се имплантират във сплав $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$. Барьерата с дебелина $\sim 30 \text{ \AA}$ се създава от нелегираната сплав между двата слоя. Електроните се прехвърлят в ямите от Si листчета поставени симетрично отгоре и отдолу на ямите. Предимства: тънка бариера и по-добър контрол върху тунелирането и Кулоновото взаимодействие. Недостатък: по-ниско ниво на чистота поради физическите примеси между двата слоя.



Фигура 8: Платото $1/2$ наблюдавано в експериментите [35]. В горния ляв ъгъл е показан видът на двойната потенциална яма

- **Широка Единична Квантова Яма** (Фиг. 9) Електроните се натрупват върху горния и долния ръб на ямата поради имплантираните положителни донорни йони разположени симетрично по двата ръба. Вътрешната част на ямата се получава от самосъгласуваното Хартри–Фок поле на самите електрони (за разлика от предния случай, където има физическа бариера). Предимства: по-чисти проби поради липсата на примесни материали. Недостатък: по-широка и размита граница между двата слоя и следователно по-слаб контрол върху Кулоновото взаимодействие и тунелирането.

Характерна особеност на двуслойните системи е, че електроните в двата слоя не са тъждествени, т.е. става въпрос за два различни сорта тъждествени частици. Това означава, че съответните вълнови функции трябва да бъдат антисиметрични относно размяната на електрони от един и същи слой, но не и относно размяната на електрони от различни слоеве.



Фигура 9: Платото $1/2$ съгласно експеримента на Суен [34]. В горния ляв ъгъл е показан профилът на електронното разпределение по оста z (при средна плътност $n \approx 1,8 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$) изчислен по метода на Хартри–Фок. Показани са още ефективната дебелина на слоя λ (ширината на слоя на ниво $1/2$ от максимума) и магнитната единица за дължина ℓ при $B \sim 15 \text{ T}$.

2.3 Елементарна теория на квантовия ефект на Хол

2.3.1 Задача на Ландау

Простата нерелативистична квантово-механична задача за невзаимодействащи заредени частици (в равнината) с маса m и заряд e в (перпендикулярно) магнитно поле \vec{B} с магнитен векторен потенциал $\vec{A} = \frac{1}{2}B(-y, x)$ (в "симетрична калибровка")⁴ е крайтъгълен камък при теоретичното описание на квантовия ефект на Хол. Хамилтониана на системата (в единици $\hbar = c = 1$) може да бъде записан

$$\begin{aligned} H &= \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{i} \vec{\nabla} + \frac{e}{c\hbar} \vec{A} \right)^2 - \frac{e}{2m} B = \frac{1}{2m} \left\{ \left[\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{eB}{2} y \right]^2 + \left[\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{eB}{2} x \right]^2 \right\} - \frac{e}{2m} B = \\ &= \omega_B \left\{ \underbrace{\left[\frac{\ell}{2} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2\ell} \right]^2}_{\pi_x} + \underbrace{\left[\frac{\ell}{2} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2\ell} \right]^2}_{\pi_y} - \frac{1}{2} \right\} = \omega_B (\pi_x^2 + \pi_y^2 - \frac{1}{2}), \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

където $\ell = \sqrt{2/eB}$ е магнитната единица за дължина⁵, а $\omega_B = eB/m$ – циклотронната честота. Да въведем комплексни координати в равнината

$$z = x + iy \Rightarrow \partial := \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}$$

⁴за случая на калибровка на Ландау виж [6]

⁵тук използваме означението ℓ на [20, 21], което е свързано с конвенционалната единица $\ell_B = \sqrt{1/eB}$ чрез $\ell = \sqrt{2} \ell_B$

$$\bar{z} = x - iy \Rightarrow \bar{\partial} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.3.2)$$

и да опитаме да представим сумата от квадратите във фигурните скоби в (2.3.1) като сбор по разлика a, b , където

$$\begin{aligned} a &:= \pi_x + i\pi_y \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\ell}{2} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2\ell} \right) + i \left(\frac{\ell}{2} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2\ell} \right) = i \left(\frac{z}{2\ell} - \ell \bar{\partial} \right) \\ b &:= \pi_x - i\pi_y \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\ell}{2} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2\ell} \right) - i \left(\frac{\ell}{2} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2\ell} \right) = -i \left(\frac{\bar{z}}{2\ell} + \ell \partial \right). \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Стандартното ермитовото спрягане на реалните координати и импулси води до следното спрягане на комплексните им аналози

$$\begin{aligned} z^\dagger &= \bar{z}, & (\partial)^\dagger &= -\bar{\partial} \\ (\bar{z})^\dagger &= z, & (\bar{\partial})^\dagger &= -\partial, \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

което, от своя страна, води до $a^\dagger \equiv b$. Очевидно е, че

$$[\partial, z] = [\bar{\partial}, \bar{z}] = 1 \Rightarrow [a, a^\dagger] = -1. \quad (2.3.5)$$

Тъй като операторите $a, b (= a^\dagger)$ са спрегнати, но не комутират тяхното произведение ще се отличава от сумата на квадратите на реалната и имагинерната им част. Наистина, от (2.3.3) следва, че

$$\pi_x = \frac{a + a^\dagger}{2}, \quad \pi_y = \frac{a - a^\dagger}{2i} \Rightarrow [\pi_x, \pi_y] = -\frac{1}{2i} [a, a^\dagger] \stackrel{(2.3.5)}{=} \frac{1}{2i} \quad (2.3.6)$$

и следователно

$$aa^\dagger = \pi_x^2 + \pi_y^2 - i[\pi_x, \pi_y] = \pi_x^2 + \pi_y^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{\omega_B} H. \quad (2.3.7)$$

Следователно, като положим $d^\dagger \stackrel{\text{def}}{=} -ia$, можем да запишем

$$\begin{aligned} \boxed{H = \omega_B d^\dagger d}, & \quad d \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\bar{z}}{2\ell} + \ell \partial \right) \\ [d, d^\dagger] = 1, & \quad d^\dagger \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{z}{2\ell} - \ell \bar{\partial} \right). \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Симетрията на задачата, породена от ротационно-инвариантния векторен потенциал, определя още една запазваща се величина – ненулевата компонента L_z на орбиталния момент на импулса $\vec{L} = \frac{1}{i} \vec{r} \times \vec{\nabla}$

$$L_z = \frac{1}{i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = z\partial - \bar{z}\bar{\partial}. \quad (2.3.9)$$

По-нататък, бихме искали да изразим оператора L_z чрез d^\dagger, d , но това е невъзможно понеже не можем да изразим четирите оператора $z, \bar{z}, \partial, \bar{\partial}$ само чрез два. Това ни подсказва да допълним системата от оператори d^\dagger, d до линейна смяна на първите, т.е.

да дефинираме нови оператори c^\dagger, c , които да се отличават от d^\dagger, d само по знаците между $z, \bar{z}, \partial, \bar{\partial}$, т.е.

$$\begin{aligned} c^\dagger &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\bar{z}}{2\ell} - \ell\partial \right) \\ c &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{z}{2\ell} + \ell\bar{\partial} \right). \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Тогава, като използваме у-ния (2.3.8), (2.3.10) можем да изразим

$$z = \ell(d^\dagger + c), \quad \bar{z} = \ell(d + c^\dagger), \quad \partial = \frac{1}{2\ell}(d - c^\dagger), \quad \bar{\partial} = \frac{1}{2\ell}(c - d^\dagger), \quad (2.3.11)$$

което ни позволява да намерим

$$\boxed{L_z = d^\dagger d - c^\dagger c}. \quad (2.3.12)$$

Лесно се проверяват комутационните съотношения

$$\begin{aligned} [c, c^\dagger] &= [d, d^\dagger] = 1, \\ [c, d] &= [c^\dagger, d^\dagger] = [c, d^\dagger] = [c^\dagger, d] = 0 \quad \Rightarrow [H, L_z] = 0. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Така, операторът на енергията H и този на третата проекция на орбиталния момент L_z образуват пълен набор от комутиращи величини.

Едночастично Хилбертово пространство:

Нека с $|0\rangle$ означим вакуумното състояние, което по определение удовлетворява $c_n|0\rangle = d_n|0\rangle = 0$. Тогава,

$$\begin{aligned} |n, m\rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{(d^\dagger)^n (c^\dagger)^m}{\sqrt{n!m!}} |0\rangle, \quad \Rightarrow H|n, m\rangle = \omega_B n |n, m\rangle, \\ L_z |n, m\rangle &= (n - m) |n, m\rangle, \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

където използвахме комутационните съотношения (които лесно се доказват по индукция) $[d^\dagger d, (d^\dagger)^n] = n(d^\dagger)^n$ и $[c^\dagger c, (c^\dagger)^m] = m(c^\dagger)^m$. Тъй като нашите оператори c, d са реализирани чрез диференциални оператори естествено е да потърсим представяне на хилбертовото пространство чрез функции на z, \bar{z} (респ. x, y). Тогава вакуумното състояние трябва да удовлетворява диференциалните уравнения

$$\begin{aligned} d|0\rangle = 0 &= \left(\frac{\bar{z}}{2\ell} + \ell\partial \right) f_0(z, \bar{z}) \Rightarrow f_0(z, \bar{z}) = C(\bar{z}) \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{2\ell^2}\right) \\ c|0\rangle = 0 &= \left(\frac{z}{2\ell} + \ell\bar{\partial} \right) f_0(z, \bar{z}) \Rightarrow \bar{\partial} C(\bar{z}) = 0 \Rightarrow f_0(z, \bar{z}) = C_0 e^{-\frac{z\bar{z}}{2\ell^2}}. \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

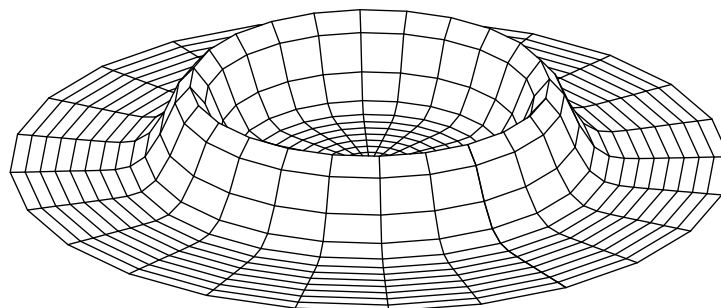
Тогава произволно състояние $|n, m\rangle$ може да бъде представено във вида

$$f_{n,m}(z, \bar{z}) = C_{n,m} \exp\left(\frac{z\bar{z}}{2\ell^2}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^m \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\ell^2}\right). \quad (2.3.16)$$

За приложения към ефекта на Хол обикновено са особено важни състоянията $|0, m\rangle$ от първото ниво ($n = 0$) на Ландау тъй като следващото ниво е отделено с краен енергетичен процеп $\sim \omega_B$. В този случай ще запишем даже и нормировъчната константа

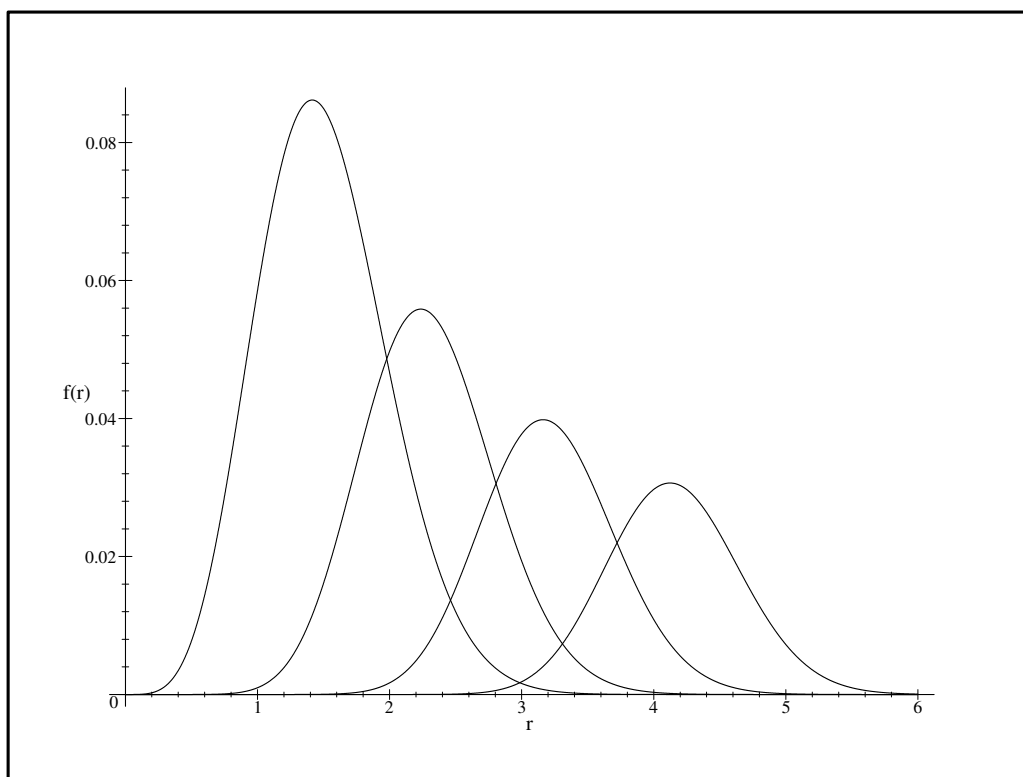
$$f_m(z, \bar{z}) = \frac{1}{\ell\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{m!}} \left(\frac{\bar{z}}{\ell}\right)^m \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{2\ell^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2^{m+1}\pi m!}} \bar{z}^m \exp\left(-\frac{1}{4}|z|^2\right) \quad (\ell_B = 1). \quad (2.3.17)$$

Квадратът на модула на едночастичното състояние (2.3.17) е Гаусова експонента локализирана около точката $|z| = \ell\sqrt{m}$, която е изобразена на Фиг. 10.



Фигура 10: Плътност на вероятността (или пространствено разпределение на заряда) $|f(z, \bar{z})|^2$ за едночастичното състояние $f_m(z, \bar{z})$ с орбитален момент $m = 16$

Профилите на тези разпределения за $m = 2, 5, 10$ и 17 (при $\ell = 1$), подредени отляво надясно, са показани на Фиг. 11.



Фигура 11: Радиално разпределение на плътността на вероятността $|f(z, \bar{z})|^2$ за едно-частичните състояния $f_m(z, \bar{z})$ с орбитален момент $m = 2, 5, 10, 17$ отляво надясно.

2.4 Пробни функции и класове на универсалност. Гранични вълни

Едно от важните експериментално установени свойства на квантовите Холови флуиди е тяхната универсалност. Това означава, че поради наличието на енергетичен праг в спектъра на заредените възбуждания, точността на квантуване на наблюдаваните плато на Холовата проводимост (както и тяхната стойност) е устойчива относно произволни пертурбации на взаимодействието, избора на материала (ефективна маса, заряд, g-фактор), количеството на примесите, размерите и геометрията на пробата. Многочастичната квантово-механична вълнова функция, описваща електронната система, по определение е собствена функция на Хамилтониана, но поради енергетичния праг (т.е. поради устойчивостта или универсалността) едно и също физическо плато може да се характеризира с безброй много потенциални енергии, респ. Хамилтониани. Следователно на едно наблюдавано плато отговарят безброй много вълнови функции.

Нека се върнем за момент на опитната постановка Фиг. 1. В резултат от действието на силата на Лоренц, при стационарно разпределение на противоположните заряди по двата ръба, токът протичащ по посока на външното електрично поле \vec{E} има ненулева плътност само по двата ръба. Ето защо делокализираните възбуждания на квантовия

флуид съществуват само върху ръбовете на пробата и поради това се наричат гранични (или ръбови) възбуждания (edge excitations). Тези състояния се описват най-просто в представяне на числа на запълване (вторично квантуване по квантовите числа на импулса, за транслационно инвариантна геометрия или на момента на импулса за ротационно-инвариантна геометрия на пробата) а многочастични им вълнови функции се реализират като съответното координатно представяне.

Така, вълновите функции на основното състояние и неговите възбуждания по ръба характеризират напълно флуида чрез съответните им квантовите числа. Тъй като тези числа могат да бъдат измервани експериментално, например измервайки резонансните честоти при тунелиране в квантови точкови контакти [5], това позволява да се тества доколко една или друга вълнова функция описва дадено плато. Оказва се, че на един и същ набор от квантови числа (напълно характеризиращи флуида) съответстват (безброй) много различни вълнови функции (т.е. различни Хамилтониани). Това задава съотношение на еквивалентност между различните вълновите функции и съответните класове на еквивалентност се наричат *класове на универсалност*. Тогава, всеки клас на универсалност може да бъде характеризирани чрез произволна вълнова функция (еквивалентна на останалите), която може да няма нищо общо с микроскопичната динамика (респ. енергетичния спектър на едно- и много- електронните възбуждания) на конкретната електронна система. Такава функция е просто представител на даден набор от квантови числа и се нарича *пробна функция* (trial wave function).

В повечето случаи тези вълнови функции се дефинират като собствени функции (с нулева енергия, когато се ограничим до най-ниското ниво на Ландау) на подходящ моделен Хамилтониан (изразяващ главно несвиваемостта на флуида), което е оправдано само когато може да се покаже съществуването на енергетичен праг в спектъра. Ние ще използваме алтернативен подход базиран на ефективната теория на полето описваща възбужданията върху ръбовете.

2.4.1 Вълнови функции на Лафлин. Несвиваеми квантови флуиди

Първият успешен опит за описание на дробния квантов ефект (с фактор на запълване $\nu = 1/2p + 1$) е направен от Лафлин [8]. Той предлага следната многочастична квантово-механична вълнова функция⁶ за описание на основното състояние на Холовата система за платото $\nu = 1/2p + 1$

$$\Psi(z_1, \dots, z_N) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (z_i - z_j)^{2p+1} \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^N |z_i|^2\right), \quad (2.4.1)$$

където $z_k = x_k + iy_k$ са координатите на електроните в комплексната равнина. За получаването на тази формула Лафлин използва вариационен принцип при следните ограничения [8]

- Най-ниско ниво на Ландау: многочастичната вълнова функция се строи от едно-частични орбитали за най-ниското ниво на Ландау.

⁶от тук нататък ще полагаме $\ell_B = \sqrt{\hbar/eB} = 1$

- Пълна антисиметрия относно $z_i \leftrightarrow z_j$ и нула за $z_i \rightarrow z_j$.
- Многочастичната вълнова функция е собствена за оператора на пълния орбитален момент.

Характерно за подхода на Лафлин е, че елементарните възбуждания на системата, наречени квазидупки (quasiholes), вълновата функция на които се получава като умножим дясната страна на у-ние (2.4.1) със $\prod_{i=1}^N (z_i - \eta)$ (η е координатата на квазидупката в равнината) носят дробен електричен товар $e/2p + 1$. Лафлин обосновава това в мисловен експеримент още през 1983 г. [8]. Съвсем наскоро тези дробни товари бяха експериментално регистрирани в няколко експеримента с т.нар. shot-noise [9, 10].

Основната идея Лафлин възниква от изследванията на течен ${}^3\text{He}$. Оказва се, че тази хидродинамична аналогия има дълбока причина: Холовите системи се държат като несвиваеми квантови флуиди. При това несвиваемостта е свързана с наличието на забранен праг в енергетичния спектър на възбужданията, който води до появата на платата на проводимостта. Класическите несвиваеми флуиди притежават динамична симетрия: това е алгебрата w_∞ на всички дифеоморфизми в равнината запазващи площта (канонични трансформации в равнината) [22]. Квантовата версия $W_{1+\infty}$ [52, 53] на тази алгебра, която математически се оказва единственото централно разширение на w_∞ , е основна характеристика на Холовите системи като несвиваеми квантови флуиди [22].

2.5 Ефективни теории на полето. Теории от типа Черн–Саймънс

Тъй като несвиваемите флуиди се характеризират със забранен енергетичен праг относно ниско енергетичните възбуждания интерес представлява поведението на системата при енергии по-ниски от прага $\hbar\omega_B$. Принос към нискоенергетичната динамика дават само възбужданията, чиито енергии са близки до енергията на Ферми ϵ_F . Поради това можем да линеаризираме дисперсионното съотношение $\epsilon = \epsilon(k)$ като го разложим до линеен член по $k - k_F$ (където $\epsilon(k_F) = \epsilon_F$). Тогава спектъра става еквилистен, поради което възбужданията могат да се интерпретират като раждане на квазичастици подобни на фононите. Действието на тази ефективна теория на полето е водещият член в нискоенергетичното разложение на първоначалното действие на системата.

Фрьолих и съавтори [18] изследват подробно ефективната теория на полето за нерелативистичната система от електрони образувачи несвиваем квантов флуид. За целта те разглеждат т.нар. *термодинамична мащабна граница*, при която геометричната област $\Omega^{(\theta)}$, в която са разположени електроните се разширява изотропно при постоянна концентрация на частиците и постоянна температура, т.е.

$$\Omega^{(\theta)} = \left\{ \vec{x} \mid \vec{\xi} = \frac{\vec{x}}{\theta} \in \Omega = \text{fixed} \right\}, \quad 1 \leq \theta < \infty, \quad n = \frac{N}{S} = \text{const}, \quad T = \text{const}, \quad (2.5.1)$$

където Ω е фиксирана пространствена област и въпросната термодинамична граница отговаря на $\theta \rightarrow \infty$ и е еквивалентна на нискоенергетичната. При това ефективната

теория на полето се получава от следното действие

$$S^{\text{eff}} = \{ \text{водещия член в развитието на изходното действие } \tilde{S} \text{ по степените на } \theta^{-1} \},$$

където

$$\tilde{S} = \frac{\hbar}{i} \ln Z(A), \quad Z(A) = \int D[\Psi^*(\vec{x})] D[\Psi(\vec{x})] \exp \left(\frac{i}{\hbar} S(\Psi^*, \Psi, A) \right), \quad (2.5.2)$$

Шрьодингеровото нерелативистично действие за електроните има вида

$$S(\Psi^*, \Psi, A) = \int dt d\vec{x} \left\{ i\hbar c \Psi^* (D_0 \Psi) - \frac{\hbar^2}{2m} (D_i \Psi)^* (D_i \Psi) - U(\Psi^*, \Psi) \right\}, \quad (2.5.3)$$

а ковариантните производни са определени съгласно

$$D_\mu = \partial_\mu + ia_\mu, \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{q}{\hbar c} A_0 \\ a_i &= -\frac{q}{\hbar c} A_i \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Тогава, при предположение, че нерелативистичната система е несвиваема (което се изразява с т.нар. кластерни свойства на Грийновите функции [18]) ефективното действие е от типа Черн–Саймънс⁷

$$S = \frac{\sigma_H}{2} \int a \wedge da = \frac{\sigma_H}{2} \int dt d^2x a_\mu \partial_\nu a_\rho \varepsilon^{\mu\nu\rho}. \quad (2.5.5)$$

От тук можем да пресметнем и електричния ток

$$j^\mu = \frac{\delta S}{\delta A_\mu} = \sigma_H \varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho \Rightarrow \begin{cases} j^0 = \sigma_H B \\ j^i = \sigma_H \varepsilon^{ij} E_j \end{cases}, \quad (2.5.6)$$

което представлява друг запис на закона на Ом–Хол (2.1.3). В [18] е показано още, че от уравненията (2.5.6) с необходимост следва, че ефективното (класическо) действие трябва да има вида (2.5.5).

Извод: Несвиваемите нерелативистични електронни флуиди във двумерно координатно пространство се описват с (2+1) мерна ефективна топологична теория на полето от типа на ЧС. От друга страна, благодарение на Уитън [19], е известна връзката между топологичните теории ЧС в (2+1) мерно пространство и РКТП върху (1+1) мерната граница на изходното многообразие. Това ни дава основание да търсим направо ефективна РКТП описваща несвиваемия флуид в термодинамична граница. Физическата интерпретация на това съответствие е, че динамиката на един несвиваем флуид е локализирана върху неговата границата.

⁷В този случай става въпрос за u(1) теория ЧС, така че $a \wedge a \wedge a = 0$

3 Ефективна теория на полето за 331 модела

3.1 Общи сведения

Вълновата функция (1.1.1),(1.1.2),(1.1.3а) на основното състояние 331 ($m = 2$), въведена от Халперин [24], може да бъде записана в еквивалентен вид

$$\Psi_{331}(z_i, w_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (z_i - z_j)^{m+1} (w_i - w_j)^{m+1} \prod_{i,j=1}^N (z_i - w_j)^{m-1} \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^N (|z_i|^2 + |w_i|^2)\right) \quad (3.1.1)$$

като се използва тъждеството на Коши

$$\det \left(\frac{1}{z_i - w_j} \right) = (-1)^{N(N-1)/2} \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq N} (z_i - z_j)(w_i - w_j)}{\prod_{i,j=1}^N (z_i - w_j)}. \quad (3.1.2)$$

Очевидно (3.1.1) е антисиметрична относно размяната на електроните в един и същи слой ($z_i \leftrightarrow z_j$, $w_i \leftrightarrow w_j$), но не е нито симетрична нито антисиметрична относно размяната на координатите на електрони в различни слоеве ($z_i \leftrightarrow w_j$). По-точно, съгласно Фоковите условия [37, 38] за построяване на координатната част от вълновата функция на двуспинова ситема, (3.1.1) е вълнова функция за ситема с нулева трета проекция ($S_z = 0$) в определен спин-триплет ($S = 1$).

Холоморфната част на (3.1.1) е хомогенна функция и нейната *степен на хомогенност* съвпада със стойността на *пълния орбитален момент*. Наистина

$$\Psi_{331}(\lambda z_i; \lambda w_j) = \lambda^{mN(2N-1)-N} \Psi_{331}(z_i; w_j). \quad (3.1.3)$$

Върху двумерния диск системата има ротационна симетрия. Ако положим $\lambda = e^{-i\theta}$, където θ е ъгълът определящ точката върху границата на диска, то степента на хомогенност се оказва собствената стойност на оператора на пълния орбитален момент.

Броят N_ϕ на квантите на магнитния поток, в задачата на Ландау върху двумерния диск (при $\ell = 1$), съвпада с максималната стойност на едночастичния орбитален момент (т.е. този на последната заета орбитала върху диска) тъй като първата (квази)частица носеща $N_\phi = 1$ квант на потока се поставя на орбиталата с момент $m = 1$, следващата увеличава N_ϕ с 1 и се поставя на орбиталата с $m = 2$ и т.н. Вълновата функция (3.1.1) е антисиметризирано произведение от едночастични орбитали (2.3.17) и следователно максималният едночастичен момент може да бъде определен като максималната степен на дадена координата z_i или w_j в холоморфната част на (3.1.1). Тази степен е една и съща за всяко i и j поради антисиметрията на вълновата функция. Максималните степени по z и w обаче могат да се различават, така че по принцип ще имаме две стойности на броя на магнитните кванти – по една за всеки слой. Да намерим броя на квантите за функцията (3.1.1) като максималната степен на z_1 :

$$\Psi_{331}(z_i; w_j) \sim \prod_{j=2}^N (z_1 - z_j)^3 \prod_{j=1}^N (z_1 - w_j) \sim z_1^{2(2N-1)-1} \Rightarrow$$

$$N_{\phi}^{z,w} = m(2N - 1) - 1 \quad (m = 2). \quad (3.1.4)$$

Вълновата функция записана във вида (3.1.1) обяснява наименованието на модела тъй като степените на Лафлиновите фактори за електроните в различните слоеве са съответно 3, 3, 1. В тази глава ще покажем, че холморфната част на (3.1.1) може да се релизира като корелационна функция в подходяща двумерна рационална конформна теория на полето.

3.2 Конформни трансформации в d -мерно пространство

Нека M е псевдориманово многообразие с метрика g (билинеен, неизроден, симетричен тензор от втори ранг) и нека TM е тангенциалното разслоение над M .

Определение 3.1 Координатната трансформация ϕ се нарича конформна, когато променя метричния тензор чрез мащабен фактор

$$g_{\mu\nu}(\phi(x)) \frac{\partial\phi^{\mu}(x)}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial\phi^{\nu}(x)}{\partial x^{\sigma}} = \Omega^2(x) g_{\rho\sigma} \quad (3.2.1)$$

Трансформациите на Поанкаре удовлетворяват (3.2.1) с конформен фактор $\Omega = 1$. Трябва да отбележим, че трансформациите променящи метриката съгласно (3.2.1) запазват "светлинния конус" ($g_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu} = 0$) и тъй като конформният фактор е положителен тези трансформации запазват и причинно-следствените връзки. С други думи конформните трансформации са такива обобщения на изометриите, които запазват принципа за причинност.

Забележка 3.1 От геометрична гледна точка конформните трансформации са такива, че тяхното тангенциално повдигане "запазва ъглите" в тангенциалното разслоение, т.е.

$$\begin{aligned} \phi : M &\rightarrow M \\ \phi^T : TM &\rightarrow TM, \quad g : TM \times TM \rightarrow \mathbb{R} \\ \forall X, Y \in TM &\quad \frac{g(\phi^T(X), \phi^T(Y))}{\sqrt{g(\phi^T(X), \phi^T(X))g(\phi^T(Y), \phi^T(Y))}} = \frac{g(X, Y)}{\sqrt{g(X, X)g(Y, Y)}}. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Очевидно всички вектори участващи в (3.2.2) трябва да имат ненулев квадрат. Това равенство обаче може да се запише

$$\begin{aligned} g(\phi^T(X), \phi^T(Y)) &= \Omega^2(X, Y)g(X, Y) \Leftrightarrow \\ g_{\mu\nu}(\phi(x)) \frac{\partial\phi^{\mu}(x)}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial\phi^{\nu}(x)}{\partial x^{\sigma}} X^{\rho}(x) Y^{\sigma}(x) &= \Omega(x, X(x), Y(x)) g_{\rho\sigma} X^{\rho}(x) Y^{\sigma}(x). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

(Квадратът в $\Omega^2(X, Y)$ гарантира запазване на причинността.) Изискването $g(X, Y)$ и $g(\phi^T(X), \phi^T(Y))$ да бъдат билинейни по векторните полета означава, че конформният фактор Ω^2 не може да зависи от X, Y , т.е. $\Omega^2(x, X(x), Y(x)) = \Omega^2(x)$. За да бъде изпълнено (3.2.3) за всички векторни полета е необходимо и достатъчно условието (3.2.1).

Не всяко псевдориманово многообразие допуска нетривиална група от конформни трансформации. За да намерим условията за съществуване на еднопараметрична група от конформни трансформации разглеждаме инфинетизималното преобразуване

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon K^{\mu}(x) + O(\epsilon^2), \quad (3.2.4)$$

където $K^{\mu}(x)$ е нелинейният генератор на трансформацията известен още като *Килингово векторно поле* [54, 11]. Конформният фактор зависи от параметъра ϵ и следователно може да бъде разложен

$$\Omega(x) = 1 + \epsilon f(x) + O(\epsilon^2) \Rightarrow \Omega^2(x) = 1 + 2\epsilon f(x) + O(\epsilon^2). \quad (3.2.5)$$

Замествайки (3.2.5) и (3.2.4) в уравнение (3.2.1) и отчитайки само членовете линейни по ϵ получаваме условието за съществуване на еднопараметрична група от конформни трансформации известно още като *Конформно уравнение на Картан–Килинг* [54]

$$g_{\mu\rho}\partial_{\nu}K^{\rho} + g_{\rho\nu}\partial_{\mu}K^{\rho} + K^{\rho}\partial_{\rho}g_{\mu\nu} = (\nabla_{\mu}K_{\nu} + \nabla_{\nu}K_{\mu} = L_K g_{\mu\nu}) = 2f g_{\mu\nu}, \quad (3.2.6)$$

където L_X е производната на Ли по посока на векторното поле X , а ∇_{μ} е ковариантната производна. В частност, за псевдоевклидово пространство ($g_{\mu\nu} = const$), уравнение (3.2.6) приема вида

$$\partial_{\mu}K_{\nu} + \partial_{\nu}K_{\mu} = \frac{2}{d}(\partial.K)g_{\mu\nu}, \quad (3.2.7)$$

където конформният фактор $f(x)$ е определен еднозначно от Килинговото векторно поле K^{μ} чрез контракция на (3.2.6) с $g^{\mu\nu}$ (d е пълната размерност на пространство-времето).

Уравнение (3.2.7) налага силни ограничения върху K^{μ} . От една страна, диференцирайки двете страни със ∂^{μ} , от друга – диференцирайки със $\square = \partial_{\mu}\partial^{\mu}$ и накрая комбинирайки първите две получаваме

$$\begin{aligned} \square K_{\nu} + \left(1 - \frac{2}{d}\right)\partial_{\nu}(\partial.K) &= 0 \\ \square\partial_{\mu}K_{\nu} + \square\partial_{\nu}K_{\mu} &= \frac{2}{d}g_{\mu\nu}\square(\partial.K) \\ \left\{g_{\mu\nu}\square + (d-2)\partial_{\mu}\partial_{\nu}\right\}(\partial.K) &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

При $d > 2$ тези условия означават, че третите производни на K^{μ} трябва да се анулират. Наистина, ако сумираме двете страни на (3.2.8) със метричния тензор $g^{\mu\nu}$ получаваме $\square(\partial.K) = 0$, което заместено в същото уравнение води до

$$(d-2)\partial_{\mu}\partial_{\nu}(\partial.K) = 0 \quad \forall \mu, \nu. \quad (3.2.9)$$

Тогава $(\partial.K)$ е линейна скаларна функция. Следователно, най-общия вид на Килинговото поле е

$$K_{\mu}(x) = a_{\mu} + a_{\mu\nu}x^{\nu} + a_{\mu\nu\rho}x^{\nu}x^{\rho}, \quad a_{\mu\nu\rho} = a_{\mu\rho\nu}. \quad (3.2.10)$$

По-нататък може да заместим (3.2.10) в уравнението на Картан–Килинг (3.2.7) и сравним степените по x^μ . Тогава a_μ може да бъде произволно, а останалите параметри трябва да удовлетворяват

$$a_{\mu\nu} + a_{\nu\mu} - \frac{2}{d}g_{\mu\nu}a^\sigma{}_\sigma = 0 \quad (3.2.11)$$

$$a_{\mu\nu\rho} + a_{\nu\mu\rho} - \frac{2}{d}g_{\mu\nu}a^\sigma{}_{\sigma\rho} = 0. \quad (3.2.12)$$

Да положим $a_{\mu\nu} - \alpha g_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu}$, където $\alpha = \frac{1}{d}a^\sigma{}_\sigma$. Тогава (3.2.11) се записва $\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0$. Във второто уравнение полагаме $a_{\mu\nu\rho} - g_{\mu\nu}C_\rho = \omega_{\mu\nu\rho}$, където $C_\rho = \frac{1}{d}a^\sigma{}_{\sigma\rho}$. При това, (3.2.12) се свежда до $\omega_{\mu\nu\rho} + \omega_{\nu\mu\rho} = 0$. Накрая използваме, че $\omega_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}(a_{\mu\nu\rho} - a_{\nu\mu\rho})$ за да го определим напълно

$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho &= \frac{1}{2}(\omega_{\mu\nu\rho} + \omega_{\mu\rho\nu})x^\nu x^\rho = \frac{1}{2}\left(a_{\mu\nu\rho} - \frac{1}{2}(a_{\nu\mu\rho} + a_{\rho\nu\mu})\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu}C_\rho + \omega_{\mu\nu\rho} - \frac{1}{2}(g_{\nu\mu}C_\rho + \omega_{\nu\mu\rho} + g_{\rho\nu}C_\mu + \omega_{\rho\nu\mu})\right)x^\nu x^\rho = \\ &= \frac{1}{4}(C.x)x_\mu - \frac{1}{4}x^2C_\mu + \frac{3}{4}\omega_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho. \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Следователно, $\omega_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho = (C.x)x_\mu - x^2C_\mu$ и за Килинговото векторно поле окончателно получаваме

$$K_\mu(x) = a_\mu + \alpha x_\mu + \omega_{\mu\nu}x^\nu + 2(C.x)x_\mu - x^2C_\mu, \quad (3.2.14)$$

където a_μ , α и C_ρ са произволни параметри, а $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$.

Получените резултати за допустимите Килингови вектори и съответстващите им (инфинитезимальни и крайни) трансформации в $d > 2$ мерно пространство-време могат да се обобщят така [54]:

- **транслации:**

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon a^\mu \Rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu \quad (3.2.15)$$

- **дилатации:**

$$x'^\mu = x^\mu(1 + \varepsilon\alpha) \Rightarrow x'^\mu = e^{\alpha}x^\mu \quad (3.2.16)$$

- **Лоренцови трансформации:**

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon\omega_{\nu}^{\mu}x^\nu \Rightarrow x'^\mu = \Lambda_{\nu}^{\mu}x^\nu, \quad (\Lambda_{\nu}^{\mu}) \in SO(p, q). \quad (3.2.17)$$

- **специални конформни трансформации:**

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon\left(2(C.x)x^\mu - x^2C^\mu\right) \Rightarrow x'^\mu = \frac{x^\mu - x^2C^\mu}{1 - 2(C.x) + x^2C^2} \quad (3.2.18)$$

Така, за конформно плоски пространства, броят на параметрите на конформната група при $d > 2$ е равен на $d + 1 + \frac{1}{2}d(d - 1) + d = \frac{1}{2}(d + 1)(d + 2)$. Всъщност, конформната група в $d > 2$ мерно пространство със сигнатура (p, q) е изоморфна [54] на $SO(p + 1, q + 1)$.

3.3 Конформни трансформации в двумерно пространство

В двумерно пространство-време ($d = 2$) съгласно (3.2.9) ограниченията (3.2.14) върху Килинговите векторни полета отпадат. Тогава, основното уравнение (3.2.7) в (двумерно) Евклидово пространство ($x^2 = -ix^0$, $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$) се свежда до уравненията на Коши–Риман за аналитичните функции

$$\partial_1 K_1 = \partial_2 K_2, \quad \partial_1 K_2 = -\partial_2 K_1. \quad (3.3.1)$$

Преминавайки към комплексни координати

$$\begin{aligned} z &= x^1 + ix^2 & \partial_z &= \partial = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2) \\ \bar{z} &= x^1 - ix^2 & \partial_{\bar{z}} &= \bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2) \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

и като дефинираме комплексното Килингово поле, $K = K_1 + iK_2$, $\bar{K} = K_1 - iK_2$, двете уравнения (3.3.1) могат да бъдат записани

$$\partial \bar{K} = 0, \quad \bar{\partial} K = 0, \quad (3.3.3)$$

Следователно, в този случай Килинговото векторно поле $K(z)$ може да бъде произволна комплексна функция удовлетворяваща (3.3.3), т.е. произволна аналитична функция на една комплексна променлива.

Локално това означава, че конформните трансформации в двумерно пространство се състои от **всички аналитични** координатни трансформации

$$\begin{aligned} z &\rightarrow \Phi(z) \quad \text{и} \quad \bar{z} \rightarrow \bar{\Phi}(\bar{z}), \\ ds^2 &= dzd\bar{z} \rightarrow \left| \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|^2 dzd\bar{z}. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Наистина, да запишем (3.2.1) във вида

$$\begin{aligned} (\partial_1 \phi^1)^2 + (\partial_1 \phi^2)^2 &= (\partial_2 \phi^1)^2 + (\partial_2 \phi^2)^2 \quad (= \Omega^2(x)) \\ \partial_1 \phi^1 \partial_2 \phi^1 + \partial_1 \phi^2 \partial_2 \phi^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Въвеждайки полето $\Phi(z) = \phi^1 + i\phi^2$, $\bar{\Phi}(\bar{z}) = \phi^1 - i\phi^2$ и комплексните координати (3.3.2) можем да представим системата (3.3.5) по следния начин

$$\begin{aligned} \partial \Phi \partial \bar{\Phi} + \bar{\partial} \Phi \bar{\partial} \bar{\Phi} &= 0 \\ \partial \Phi \partial \bar{\Phi} - \bar{\partial} \Phi \bar{\partial} \bar{\Phi} &= 0, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

която има две решения, но едното от тях ($\partial \Phi = 0 = \bar{\partial} \bar{\Phi}$) променя ориентацията в комплексната равнина и затова няма да бъде разглеждано. Следователно, решението трябва да удовлетворява $\bar{\partial} \Phi = 0 = \partial \bar{\Phi}$. Съответния конформен фактор се изразява

$$\Omega^2 = (\partial_1 \phi^1)^2 + (\partial_1 \phi^2)^2 = \partial_1 \Phi \partial_1 \bar{\Phi} = \partial \Phi \bar{\partial} \bar{\Phi} = \left| \partial \Phi \right|^2. \quad (3.3.7)$$

Забележка 3.2 Тъй като $e^{\alpha z}$ е аналитична функция можем да направим следната координатна трансформация в равнината

$$Z = e^{-iz} = e^{x_2 - ix_1} \Rightarrow \bar{Z} = e^{i\bar{z}} = e^{x_2 + ix_1}, \quad (3.3.8)$$

така, че $dZd\bar{Z} = Z\bar{Z}dzd\bar{z}$. Координатите (Z, \bar{Z}) са удобни с това, че изразяват компактификацията на светлинните лъчи (параметризирани с конусните променливи x_{\pm}) от пространството на Минковски.

По-нататък, понеже Килинговото поле е аналитично, можем да разложим генератора на трансформациите $K(z)$ в ред на Лоран

$$K(z) = - \sum_{n \in \mathbb{Z}} K_n z^{n+1}. \quad (3.3.9)$$

Структурните константи на конформната алгебра можем да определим най-просто в нейното представяне в пространството на аналитичните функции. Под действие на инфинетизималните аналитични репараметризации $z \rightarrow z' = z - \varepsilon \sum_{n \in \mathbb{Z}} K_n z^{n+1}$ аналитичните функции върху комплексната равнина се преобразуват съгласно

$$f(z') = f(z) - \varepsilon \sum_{n \in \mathbb{Z}} K_n z^{n+1} \partial f(z) + O(\varepsilon^2). \quad (3.3.10)$$

Генераторите на това представяне

$$l_n = \left. \frac{\partial f(z')}{\partial(\varepsilon K_n)} \right|_{\varepsilon=0} = -z^{n+1} \partial, \quad \bar{l}_n = \left. \frac{\partial \bar{f}(\bar{z}')}{\partial(\varepsilon \bar{K}_n)} \right|_{\varepsilon=0} = -\bar{z}^{n+1} \bar{\partial} \quad (3.3.11)$$

пораждат инфинетизималните конформни трансформации $z \rightarrow z - \varepsilon z^{n+1}$ и удовлетворяват следните комутиационни съотношения

$$[l_m, l_n] = (m - n) l_{m+n}, \quad [\bar{l}_m, \bar{l}_n] = (m - n) \bar{l}_{m+n}, \quad [l_m, \bar{l}_n] = 0. \quad (3.3.12)$$

В квантовата теория на полето тези комутиационни съотношения се модифицират чрез т.нар. *централно разширение* зададено чрез еднопараметричен коцикъл [52, 27]. Физически погледнато, добавянето на *централния член* се налага от изискването за положителност на метриката.

Трябва да отбележим, че не всички аналитични трансформации Φ са глобално дефинирани и обратими върху Римановата сфера $S = \mathbb{C} \cup \infty$ ("точката" ∞ се прибавя по необходимост, понеже поради отрицателните степени на z в лорановото развитие на $\Phi(z)$ ще има аналитични трансформации изобразяващи $0 \leftrightarrow \infty$). Наистина, произволно векторно поле генериращо аналитична репараметризация

$$V(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} V_n z^{n+1} \partial_z \quad (3.3.13)$$

ще бъде дефинирано в точката $z = 0$ само когато $V_n = 0$, $n < -1$. От друга страна, конформната трансформация $z' = \frac{1}{z}$ изобразява $z' = 0 \leftrightarrow z = \infty$ и следователно

$$V(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} V_n \left(\frac{1}{z'}\right)^{n+1} \frac{\partial z'}{\partial z} \partial_{z'} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} V_n z'^{-n+1} \partial_{z'}, \quad (3.3.14)$$

т.е. това поле е дефинирано в точката $z = \infty$ само когато $V_n = 0$, $n > 1$. Следователно, полето $V(z)$ е глобално дефинирано когато $V_n \neq 0$, само за $n = 0, \pm 1$. Глобално дефинираните конформни трансформации в двумерно евклидово пространство образуват глобалната конформна група, която се състои от дробно-линейните преобразувания

$$z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}). \quad (3.3.15)$$

При това, генераторите на глобалната конформна група $l_{0,\pm 1}$ генерират следните "крайни" трансформации

$$\begin{aligned} l_{-1} &\Rightarrow z \rightarrow z+a \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}) \\ l_0 &\Rightarrow z \rightarrow \lambda z \leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \lambda^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}) \\ l_1 &\Rightarrow z \rightarrow \frac{z}{cz+1} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}). \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

Очевидно глобалната конформна група в двумерие е изоморфна на $SO(3, 1)$ или $SO(2, 2)$, в зависимост от това дали работим със сигнатура на Евклид или Минковски, т.е. тя съвпада с $SO(p+1, q+1)$ както това беше в случая $d > 2$.

3.4 Конформна квантова теория на полето в двумерно пространство-време

3.4.1 Евклидов цилиндър и конформна равнина

Да разгледаме двумерното пространство на Минковски с координати $(x^\mu) = (x^0, x^1)$ и сигнатура $(-, +)$. Конусните променливи ще означаваме като $x_\pm = x^0 \pm x^1$. За да избегнем инфрачервени разходимости и за да бъдат конформните трансформации глобално дефинирани ще компактифицираме пространството⁸, т.е. ще отъждествим $x^1 \equiv x^1 + 2\pi$. Това условие превръща пространството на Минковски в цилиндър, чиято ос съвпада с оста на времето. Можем да разглеждаме цилиндъра като повърхнина вложена в тримерно пространство на Минковски със сигнатура $(-, +, +)$ и координати $(\zeta^0, \zeta^1, \zeta^2)$, т.е.

$$\text{Cyl} \equiv \{ (\zeta^0, \zeta^1, \zeta^2) \mid (\zeta^1)^2 + (\zeta^2)^2 = R^2 \} = \{ (t, R \cos \theta, R \sin \theta) \mid t \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi) \} \quad (3.4.1)$$

Тъй като времето $t = \zeta^0$ не участва явно в уравнението задаващо повърхнината (3.4.1) можем да направим Евклидово въртене $\zeta^0 \stackrel{\text{def}}{=} -i\xi^0$, $\zeta^1 = \xi^1$, $\zeta^2 = \xi^2$, при което цилиндъра става Евклидов, т.е. вложен в Евклидово пространство с координати (ξ^0, ξ^1, ξ^2) и

⁸Компактификацията на времето води до противоречие с принципа за причинност, затова се ограничаваме само с компактификация на пространството. Независимо от това обаче, хиралните полета се оказват периодични и по времето, т.е. многообразието върху което са дефинирани е тор.

метрика със сигнатура $(+, +, +)$. В това Евклидово пространство конусните променливи стават комплексни

$$\xi_{\pm} = -i\xi^0 \pm \xi^1 \quad (3.4.2)$$

и тогава ляво- и дясно- движещите се полета от пространството на Минковски се превръщат съответно в холоморфни и антихоломорфни полета по ξ_{\pm} .

По-нататък в Евклидовото пространство можем да направим следната трансформация

$$(t, R\cos\theta, R\sin\theta) \rightarrow e^{\alpha t} (t, R\cos\theta, R\sin\theta),$$

която превръща цилиндъра в конус с начало в точката $t = -\infty$, и след това да проектираме върху равнината зададена със $t = 0$. Получаваме следното съответствие

$$(t, x := R\theta) \equiv (t, R\cos\theta, R\sin\theta) \rightarrow e^{\alpha t} (R\cos\theta, R\sin\theta) = e^{\alpha t} R e^{i\theta}. \quad (3.4.3)$$

(Тук можем допълнително да направим дилатация $\xi^a \rightarrow \xi^a/R$)

Твърдение 3.1 Изображението $\varphi : \text{Cyl} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\varphi(t, x = R\theta) = \exp\left(\frac{t + ix}{R}\right) \quad (3.4.4)$$

е конформно.

Доказателство: Да означим $\vec{r} = \begin{pmatrix} t \\ R\cos\theta \\ R\sin\theta \end{pmatrix}$. Метричният тензор върху Евклидовия цилиндър има вида

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial (R\theta)} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (g_{ab}) = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^b} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

където $(\xi^a) = (t, x)$. От друга страна, метричният тензор върху конформната равнина е $g'_{ab} = \delta_{ab}$, така, че

$$\begin{aligned} g'_{ab} \frac{\partial \varphi^a}{\partial t} \frac{\partial \varphi^b}{\partial t} &= R^2 \alpha^2 e^{2\alpha t} \\ g'_{ab} \frac{\partial \varphi^a}{\partial t} \frac{\partial \varphi^b}{\partial x} &= 0 = g'_{ab} \frac{\partial \varphi^a}{\partial x} \frac{\partial \varphi^b}{\partial t} \\ g'_{ab} \frac{\partial \varphi^a}{\partial x} \frac{\partial \varphi^b}{\partial x} &= e^{2\alpha t}. \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Следователно

$$g'_{ab} \frac{\partial \varphi^a}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \varphi^b}{\partial \xi^\beta} = e^{2\alpha t} \delta_{\alpha\beta} \iff (R\alpha)^2 = 1, \quad (3.4.6)$$

т.е. изображението (3.4.4) е конформно, когато $\alpha = 1/R$. ■

Трансформация (3.4.4) изразява пълната компактификация [54] на конусните променливи $z = \exp(x_+)$ и е свързана с преобразуванията на Кейли [27]. Подробен обзор на различните координатни картини използвани в двумерните конформни модели може да бъде намерен в [27, 11, 16].

По-нататък ще ни бъдат необходими дефиницията на делта-функцията на Дирак и съответните тъждества на Сохоцки в конформната равнина, които са представени в Допълнение А.

3.4.2 Хирални вертексни алгебри

Общо свойство на двумерните конформни модели е разлагането на алгебрата на наблюдаемите като тензорно произведение [27, 11]

$$\mathcal{A}_{CFT} = \mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}} \quad (3.4.7)$$

на *хирална* и *антихирална* алгебри като следствие от факта, че общото решение на вълновото уравнение в двумерно пространство се строи от произволни функции на ляво- и дясно-движещите се конусни променливи. Както вече отблязахме в § 3.4.1 след Евклидовото въртене на времето тези променливи се превръщат в аналитични и антианалитични координати, а съответните полета в холоморфни и антихоломорфни функции. С други думи хиралната алгебра \mathcal{A} се състои от полета, които са операторозначни мероморфни функции.

Генераторите на трансляциите по конусните променливи се изразяват чрез операторите на импулса P_μ по следния начин [11, 29, 27]

$$i[P_\pm, \Phi(x_\pm)] = \partial_\pm \Phi(x_\pm) \quad \implies \quad P_\pm = \frac{1}{2}(\partial_0 \mp \partial_1). \quad (3.4.8)$$

Специалните конформни трансформации (3.2.18) в термини на конусни променливи се разцепват

$$x_\pm \rightarrow \frac{x_\pm}{1 + C_\mp x_\pm}, \quad C_\pm = C^0 \pm C^1 \quad (3.4.9)$$

и съответните генератори Q_\pm се изразяват чрез стандартните генератори Q_μ на специални конформни трансформации [11, 29]

$$i[Q_\mu, \Phi(x_\pm)] = \{x^2 \partial_\mu - 2x_\mu(\Delta + (x \cdot \partial))\} \Phi(x_\pm), \quad (3.4.10)$$

чрез

$$Q_\pm = -\frac{1}{2}(Q_0 \pm Q_1) \quad \implies \quad i[Q_\pm, \Phi(x_\pm)] = (x_\pm^2 \partial_\pm + 2x_\pm \Delta) \Phi(x_\pm). \quad (3.4.11)$$

При преминаването в компактната картина, чрез преобразуването

$$z = \frac{1 + \frac{i}{2}x_+}{1 - \frac{i}{2}x_+}, \quad \bar{z} = \frac{1 + \frac{i}{2}x_-}{1 - \frac{i}{2}x_-} \quad (3.4.12)$$

полетата се трансформират по следния начин [11, 29, 27]

$$Y_{\Phi}(z, \bar{z}) = \frac{1}{(1+z)^{2\Delta}(1+\bar{z})^{2\bar{\Delta}}} \Phi(x_{\pm}). \quad (3.4.13)$$

Да въведем следните оператори [29]

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(P_+ + [P_+, Q_+] - Q_+), \\ H &= \frac{1}{2}(P_+ + Q_+), \\ T^* &= \frac{1}{2}(P_+ - [P_+, Q_+] - Q_+). \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Както показва Кац [29], аксиомите на Уайтман за двумерните конформни теории са еквивалентни на следните аксиоми за *хиралните вертексни алгебри*. Вертексната алгебра се дефинира чрез:

- (Супер)пространство на състоянията $V = V_0 \oplus V_1$ – линейно векторно пространство
- Вакуумен вектор $|0\rangle \in V_0$
- Съществува взаимно-еднозначно съответствие между състоянията a във V и полетата във вертексната алгебра $Y(a, z)$

В сила са следните аксиоми:

(A1) транслационна инвариантност $[T, Y(a, z)] = \partial_z Y(a, z)$

(A2) вакуум $Y(|0\rangle, z) = 1, Y(a, z=0)|0\rangle = a \in V$

(A3) локалност $(z-w)^N [Y(a, z), Y(b, w)] = 0$, за $N \gg 0$

където суперкомутаторът се дефинира съгласно

$$[Y(a, z), Y(b, w)] \stackrel{\text{def}}{=} Y(a, z)Y(b, w) - (-1)^{p(a)p(b)} Y(b, w)Y(a, z).$$

Тези аксиоми съдържат минималната информация необходима за работата с вертексни алгебри. При двумерните конформни модели обикновено има доста по-богата структура.

Обикновено тензорът на енергията и импулса в двумерните конформни модели е безследов и може да се изрази изцяло чрез хиралната и антихиралната си части $T(z)$ и $\bar{T}(\bar{z})$ [27, 11, 16, 15, 26]. Лорановите моди L_n на хиралния тензор $T(z)$ удовлетворяват комутационните съотношения на алгебрата на Вирасоро (виж у-ние (3.4.17b)), където c е централният товар.

3.4.3 Радиално квантуване. Разложения на операторни произведения

Както видяхме в § 3.4.1 Евклидовият цилиндър е конформно еквивалентен на комплексната равнина зададена чрез $z = \exp(x^0 - ix^1)$. Това означава, че времето $t = \ln |z|$ расте с увеличаването на модула на z , а повърхнините на константно време, използвани при каноничното квантуване, са просто концентрични окръжности. Тогава T -нареденото произведение $T[A(t_1)B(t_2)] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} A(t_1)B(t_2), & t_1 > t_2 \\ (-1)^{p(A)p(B)} B(t_2)A(t_1), & t_1 < t_2, \end{cases}$ се превръща в радиално наредено, а съответната процедура на канонично квантуване е известна като *радиално квантуване* [26, 15, 16].

Запазващите се (супер)заряди, съответстващи на Ньотеровите (супер)токове в теорията, се изразяват като контурни интеграли [26, 16] (по окръжностите представляващи повърхнини на постоянно време)

$$Q_i(t) = Q_i\{C\} = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} J_i(z), \quad (3.4.15)$$

а суперкомутаторът на два такива суперзаряда може да бъде изразен чрез T -произведение $[Q_1(t), Q_2(t)] = \lim_{t_1 \rightarrow t+0} T[Q_1(t_1)Q_2(t)] - \lim_{t_1 \rightarrow t-0} T[Q_1(t_1)Q_2(t)] \Rightarrow$

$$\begin{aligned} [Q_1\{C\}, Q_2\{C\}] &= \lim_{C_1 \rightarrow C+0} T[Q_1\{C_1\}Q_2\{C\}] - \lim_{C_1 \rightarrow C-0} T[Q_1\{(C_1)Q_2\{C\}] = \\ &= \oint_C \frac{dw}{2\pi i} \text{Res}_{z \rightarrow w} R[J_1(z)J_2(w)]. \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

Формула (3.4.16) показва, че регулярните членове в операторното произведение на двата тока J_i не допринасят към комутатора. Затова е удобно да въведем понятието Разложение на Операторно Произведение⁹ (РОП) за съвкупността от сингулярни членове при разложението на малки разстояния $z \rightarrow w$ ($|z| > |w|$), което ще записваме чрез знака “ \sim ”. Например РОП за ТЕИ има вида

$$T(z)T(w) \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w}; \quad (3.4.17a)$$

Лорановите моди L_n на ТЕИ се изразяват като заряди по формулата

$$L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z),$$

а формулата за резидуум на полюс от ред k записваме по следния начин

$$\text{Res}_{z \rightarrow w} f(z, w) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow w} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} (z-w)^k f(z, w).$$

Тогава, след прилагането на у-ние (3.4.16) получаваме

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12} n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \quad (3.4.17b)$$

⁹в англоезичната литература се използва термина "Operator Product Expansion" (ОРЕ)

Както е известно, ТЕИ генерира репараметризиациите на окръжността. Във всяка конформна теория съществува важен клас от полета, наречени *първични* [27, 11, 29], които са ковариантни относно тези трансформации.

Определение 3.2 *Полето $\Phi_\Delta(z)$ се нарича първично, ако неговото РОП с ТЕИ има вида*

$$T(z)\Phi_\Delta(w) \sim \frac{\Delta}{(z-w)^2}\Phi_\Delta(w) + \frac{1}{z-w}\partial_w\Phi_\Delta(w), \quad (3.4.18)$$

където Δ се нарича конформна размерност на полето Φ_Δ .

Както знаем, това РОП фиксира комутационните съотношения на полето с модите на ТЕИ

$$[L_n, \Phi_\Delta(w)] = \text{Res}_{z \rightarrow w} (z^{n+1}T(z)\Phi_\Delta(w)) = z^n (z\partial_z + (n+1)\Delta)\Phi_\Delta(w). \quad (3.4.19)$$

Комутационните съотношения (3.4.19) изразяват инфинитезимално репараметризационната инвариантност на полето Φ_Δ [27, 16, 26].

Определение 3.3 *Полето $\Phi_\Delta(z)$ се нарича квазипървично, ако удовлетворява у-ние (3.4.19) за $n = 0, \pm 1$.*

(Очевидно първичните полета са и квазипървични; обратното не е вярно.)

Конформната инвариантност налага силни ограничения върху корелационните функции на квазипървичните полета. В частност тя напълно определя 2-точковите и 3-точковите функции [27, 16, 26].

Друго следствие от радиалното квантуване е видът на т.нар. "in"- и "out"-състояния [16, 26]. Първите се дефинират при $t = -\infty$, което съгласно радиалното квантуване означава $z = 0$, а последните като техни спрегнати. В този смисъл съответствието поле \leftrightarrow състояние означава, че на всяко първично поле $Y(z)$ отговаря "in"-състояние дефинирано чрез $|\text{in}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} Y(|\text{in}\rangle, z)|0\rangle \Big|_{z=0}$. Полета, които не са квазипървични се наричат наследници (descendants) и също отговарят на определени състояния в пространството V .

Ермитовото спрягане на полетата $Y(z)$, в аналитичната картина, е нетривиално поради комплексния аргумент. За квазипървични полета то има вида [27, 11, 16]

$$[Y(v, z)]^\dagger = \left(\frac{1}{\bar{z}}\right)^{2\Delta} Y\left(\bar{v}, \frac{1}{\bar{z}}\right). \quad (3.4.20)$$

3.5 Рационални конформни теории. Статистически суми и правила на сливане

В Хилбертовото пространство на една квантова теория на полето се реализира представяне на алгебрата на наблюдаемите (3.4.7), което в общия случай е приводимо, т.е. пряка сума от неприводими представяния. От своя страна неприводимите представяния на тензорното произведение на две алгебри се изразяват като тензорно произведение от неприводими представяния на двете алгебри. Нека означим с V_i и \bar{V}_i

неприводимите представяния на хиралната и антихиралната алгебри. Тогава Хилбертовото пространство на двумерната КТП може да се запише [27]

$$\mathcal{H}^{CFT} = \bigoplus_{i,j} N_{ij} V_i \otimes \bar{V}_j, \quad N_{ij} \in \mathbb{Z}_+, \quad N_{00} = 1, \quad (3.5.1)$$

където неотрицателните числа N_{ij} изразяват кратностите, с които дадена двойка представяния участват в пълното Хилбертово пространство. ($N_{00} = 1$ изразява единствеността на вакуумното представяне.) Различните матрици N_{ij} , при фиксирани неприводими представяния, определят различни Хилбертови пространства и съответно различни физически модели.

Съгласно принципите на статистическата механика статсумата за Голям Каноничен Ансамбъл (ГКА) се определя като следа върху Хилбертовото пространство [55, 27, 56]

$$Z(\beta, \mu) = \text{tr}_{\mathcal{H}} e^{-\beta(H - \mu N)}, \quad (3.5.2)$$

където H е операторът на енергията, чийто спектър по предположение е ограничен отдолу (това е условие за стабилност на системата – в противен случай няма какво да спре преминаването към състояния с все по-ниска енергия), N е операторът на броя на частиците (респективно, на $U(1)$ -заряда¹⁰), а β и μ са съответно обратната температура и химичния (електричния) потенциал. Операторите на енергията и заряда в двумерните КТП имат вида [30, 16, 27]

$$H = L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12}, \quad N = J_0 - \bar{J}_0 \quad (3.5.3)$$

и като използваме свойствата на следата

$$\text{tr}_{V_1 \oplus V_2} = \text{tr}_{V_1} + \text{tr}_{V_2}, \quad \text{tr}_{V_1 \otimes V_2} = \text{tr}_{V_1} \cdot \text{tr}_{V_2}$$

можем да запишем статсумата (3.5.2)

$$Z(\beta, \mu) = \sum_{i,j} N_{ij} \chi_i(\beta, \mu) \overline{\chi_j(\beta, \mu)}, \quad (3.5.4)$$

където въведохме характеристиките (хирални неприводими статсуми) на $U(1)$ -алгебрата на токове и Вирасоро [57, 27, 58]

$$\begin{aligned} \chi_i(\beta, \mu) &= \text{tr}_{V_i} e^{2\pi i(\tau(L_0 - \frac{c}{24}) - \zeta J_0)}, \\ 2\pi \text{Im } \tau &= \beta, \quad 2\pi \text{Re } \zeta = \beta \mu, \quad 2\pi \text{Im } \zeta = \beta V_0 \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

(V_0 е Холовата електричната потенциална разлика) и чертата над характера означава комплексно спрягане.

За приложенията към квантовия ефект на Хол важна роля играят т.нар. *рационални конформни теории* на полето [30]. Това са конформни теории дефинирани върху тор

¹⁰Тъй като в квантовия ефект на Хол се интересуваме и от електричните свойства на системата ефективната КТП има винаги $U(1)$ симетрия породена от електричния ток

$S^1 \times S^1$ (Риманова повърхнина от ред 1). Торът може да се разглежда като успоредник в равнината, при който противоположните ръбове са слепени [27, 26, 16]. Математически това означава, че можем да мислим тора като фактор-пространството \mathbb{C}/Λ на комплексната равнина \mathbb{C} факотризирана по решетката $\Lambda = \{n^1\omega_1 + n^2\omega_2 \mid n^i \in \mathbb{Z}\}$, където базисните вектори (или периоди) ω_i са линейно независими (над \mathbb{R}), т.е. като комплексни числа, отношението ω_1/ω_2 има ненулева имагинерна част, която без ограничение на общността може да бъде направена положителна (чрез размяната на периодите). Тогава числото (което се оказва същото като параметъра, спрегнат на оператора L_0 , при построяването на характерите и статсумата)

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \text{Im } \tau > 0 \quad (3.5.6)$$

напълно характеризира тора за разлика от двата периода, които могат да бъдат трансформирани съгласно

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \quad (3.5.7)$$

тъй като решетката Λ е съвкупност от геометрични точки, чиято група на изометрии е $SL(2, \mathbb{Z})$. С други думи, всички физически характеристики (в частност – статсумата) на една теория дефинирана върху тор трябва да бъдат инвариантни относно действието на модуларната група $SL(2, \mathbb{Z})$ при което модуларния параметър се трансформира съгласно

$$\tau \rightarrow \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \quad (3.5.8)$$

Очевидно тази трансформация не се променя ако умножим матрицата на (-1), така че всъщност статсумата трябва да бъде инвариантна относно действието на $SL(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$. Модуларната група има два независими генератора

$$\begin{aligned} T : \tau &\rightarrow \tau + 1 &\Rightarrow T &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ S : \tau &\rightarrow -\frac{1}{\tau} &\Rightarrow S &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

които удовлетворяват $S^2 = 1 = (ST)^3$.

Капели и Земба [30] правят подробно изследване на РКТП използвани за описание на несвиваемите Холови флуиди в термодинамична граница, което налага следните изисквания за модуларна инвариантност на съответните статсуми:

$$T^2 : \quad Z(\tau + 2, \zeta) = Z(\tau, \zeta) \quad (3.5.10a)$$

$$S : \quad Z(-1/\tau, \zeta/\tau) = Z(\tau, \zeta) \quad (3.5.10b)$$

$$U : \quad Z(\tau, \zeta + 1) = Z(\tau, \zeta) \quad (3.5.10c)$$

$$V : \quad Z(\tau, \zeta + \tau) = Z(\tau, \zeta) \quad (3.5.10d)$$

В термини на характерите на неприводимите представяния V_i модуларната инвариантност (3.5.10) означава:

1. Неприводимите представяния V_i на разширената хирална алгебра на РКТП са краен брой
2. Действието на модулраната група върху характерите на тези представяния дефинира крайномерните матрици T^2, S, U, V

$$T^2 : \quad \chi_i(\tau + 2, \zeta) = \sum_j (T^2)_{ij} \chi_j(\tau, \zeta) \quad (3.5.11a)$$

$$S : \quad \chi_i(-1/\tau, \zeta/\tau) = \sum_j S_{ij} \chi_j(\tau, \zeta) \quad (3.5.11b)$$

$$U : \quad \chi_i(\tau, \zeta + 1) = \sum_j U_{ij} \chi_j(\tau, \zeta) \quad (3.5.11c)$$

$$V : \quad \chi_i(\tau, \zeta + \tau) = \sum_j V_{ij} \chi_j(\tau, \zeta). \quad (3.5.11d)$$

T^2 и S реализират крайномерно представяне на определена подгрупа на модулраната група.

3. Матрицата $N = N_{ij}$ трябва да комутира с 4-те матрици (3.5.11), т.е.

$$[N, T^2] = [N, S] = [N, U] = [N, V] = 0.$$

Всяко от тези представяния V_i представлява определен *сектор на суперотбор* и съответно дефинира квазичастица Φ_i (отговаряща на вектора с минимална енергия в сектора) с определени топологически свойства. Броят на тези квазичастици (който съвпада с топологичния ред на модела) е краен, следователно при композицията на две квазичастици трябва да се получи една или комбинация от повече квазичастици вече участващи в теорията. Правилата задващи сектора на суперотбор на резултатните квазичастици

$$\Phi_i \cdot \Phi_j = \sum_{k=1}^{\dim S} N_{ij}^k \Phi_k, \quad (3.5.12)$$

се наричат *правила на сливане*. Съществува забележителна връзка, известна като формула на Верлинде [59], между правилата на сливане и S -матрицата на теорията

$$N_{ij}^k = \sum_n \frac{S_{in} S_{jn} \bar{S}_{kn}}{S_{0n}}, \quad (3.5.13)$$

където със S_{0k} е означен вакуумния ред на S -матрицата и чертата означава комплексно спрягане.

3.6 Конформна теория на полето с $\widehat{u(1)^N}$ алгебра на токове

Хиралната алгебра $\widehat{u(1)^N}$ се поражда [50, 27, 31] от Лорановите моди J_n^i на N на брой тока $J^i(z)$. Комутационните съотношения между токовете, които напълно характеризират алгебрата, могат да бъдат по-просто изразени чрез РОП

$$J^i(z) J^j(w) \sim \frac{\delta^{ij}}{(z-w)^2} \iff [J^i(z), J^j(w)] = -\delta^{ij} \delta'(z-w), \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (3.6.1)$$

Лорановите моди на токовете се определят от разложението

$$J^i(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n^i z^{-n-1} \quad \Rightarrow \quad J_n^k = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^n J^k(z) \quad (3.6.2)$$

и съгласно (3.4.16) получаваме следните комутационни съотношения за модите на токовете

$$[J_n^i, J_m^j] = n \delta^{ij} \delta_{n+m,0}. \quad (3.6.3)$$

Всички останали полета в хиралната алгебра се изразяват като нормални произведения от токовете и техните производни. В частност, хиралният тензор на напреженията $T(z)$ се изразява чрез токовете по формулата на Сугавара

$$T(z) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N :J^i(z)J^i(z):, \quad (3.6.4)$$

където нормалното произведение на токовете се дефинира чрез изваждане на сингулярната част (съвпадаща в случая с вакуумното средно):

$$:J^i(z)J^j(w): = J^i(z)J^j(w) - \frac{\delta^{ij}}{(z-w)^2} = J^i(z)J^j(w) - \langle 0|J^i(z)J^j(w)|0 \rangle. \quad (3.6.5)$$

Лорановите моди L_n на $T(z)$, определени от

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2} \quad \Rightarrow \quad L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z), \quad (3.6.6)$$

удовлетворяват комутационните съотношения на алгебрата на Вирасоро (Vir) (3.4.17) с централен товар $c = N$ [27]. Относно тази алгебра токовете са "първични" полета, т.е.

$$T(z)J^i(w) \sim \frac{J^i(z)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J^i(w)}{z-w} \quad \Leftrightarrow \quad [L_n, J_m^i] = -mJ_{n+m}^i. \quad (3.6.7)$$

В пространството на състоянията на една квантова теория се реализира представяне на алгебрата на наблюдаемите. В конформните теории тя е тензорно произведение от хирална и антихирална алгебри. Поради това, пространството на състоянията за една конформна теория на полето се строи от тензорни произведения на пространствата на представянията на хиралната и антихиралната алгебри. Ето защо представянията на хиралната алгебра са особено важни. Съгласно постулатите на аксиоматичната теория на полето [60, 29] съществува единствен вектор $|0\rangle$ (вакуум) в пространството инвариантен относно действието на групата на симетрии и с минимална енергия.

Всички останали унитарни представяния (с положителна енергия) се строят върху т. нар. *младши* вектори [27, 58, 16, 26], т.е. вектори с минимална енергия, подобни на вакуумния, но с положителна енергия, определящи нееквивалентни сектори на суперотбор.

Определение 3.4 Векторът $|\vec{\lambda}\rangle$ се нарича младши (или вектор с младше тегло) относно алгебрата на токове $\widehat{u(1)^N}$, когато

$$\begin{aligned} J_n^i |\vec{\lambda}\rangle &= 0, \quad n > 0, \\ J_0^i |\vec{\lambda}\rangle &= \lambda^i |\vec{\lambda}\rangle. \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

Векторите

$$J_{-n_1}^{i_1} J_{-n_2}^{i_2} \dots J_{-n_k}^{i_k} |\vec{\lambda}\rangle, \quad k \geq 0, \quad n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 0 \quad (3.6.9)$$

образуват базис в представянето $\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$ с младши вектор $|\vec{\lambda}\rangle$. Скаларното произведение в това пространство се определя чрез инволюция в алгебрата на наблюдаемите породе-на от спрягането на модите на тока

$$(J_n^i)^* = J_{-n}^i, \quad (3.6.10)$$

комутиационните съотношения (3.6.3) и нормировъчното условие $\langle \vec{\lambda} | \vec{\lambda} \rangle = 1$.

Действието на модите на тензора на енергията следва (по формулата на Сугавара) от (3.6.8)

$$\begin{aligned} L_n |\vec{\lambda}\rangle &= 0, \quad n > 0, \\ L_0 |\vec{\lambda}\rangle &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\lambda^i)^2 |\vec{\lambda}\rangle, \quad \Delta_{\vec{\lambda}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\lambda^i)^2 =: \frac{1}{2} \langle \vec{\lambda} | \vec{\lambda} \rangle, \end{aligned} \quad (3.6.11)$$

т.е. младшите вектори се характеризират със N на брой $u(1)$ -заряди и конформна размерност (собствена стойност на оператора на дилатации L_0).

Съгласно съответствието [29, 11, 26] поле \leftrightarrow състояние в конформната теория на вектора $|\vec{\lambda}\rangle$ отговаря локалното поле $Y(\vec{\lambda}, z)$ такова, че

$$|\vec{\lambda}\rangle = \lim_{z \rightarrow 0} Y(\vec{\lambda}, z) |0\rangle \Leftrightarrow Y(\vec{\lambda}, z) |\vec{\lambda}\rangle = \exp(zL_{-1}) |\vec{\lambda}\rangle, \quad (3.6.12)$$

където L_{-1} е генераторът на трансляция на аргументите, т.е.

$$e^{zL_{-1}} Y(\vec{\lambda}, w) e^{-zL_{-1}} = Y(\vec{\lambda}, w + z).$$

Съгласно (3.6.8) полето $Y(\vec{\lambda}, z)$ притежава N на брой заряди λ^i и следователно трябва да има определени комутиационни съотношения с операторите на съответните токове и оператори на зарядите. Математически това означава, че полето $Y(\vec{\lambda}, z)$ трябва да бъде първично [27, 29, 16] относно алгебрата на токове $\widehat{u(1)^N}$:

$$J^i(z) Y(\vec{\lambda}, w) \sim \frac{\lambda^i}{z-w} Y(\vec{\lambda}, w) \Rightarrow [J^i(z), Y(\vec{\lambda}, w)] = \lambda^i Y(\vec{\lambda}, w) \delta(z-w), \quad (3.6.13)$$

откъдето следва, че то ще бъде "първично" (отново поради формулата на Сугавара) и относно алгебрата на Вирасоро:

$$[L_n, Y(\vec{\lambda}, z)] = z^n \left(z \frac{d}{dz} + (n+1) \Delta_{\vec{\lambda}} \right) Y(\vec{\lambda}, z). \quad (3.6.14)$$

Твърдение 3.2 Условието за $\widehat{u(1)^N}$ ковариантност (3.6.13) е съвместимо със репараметризацияната ковариантност (3.6.14) и формулата на Сугавара (3.6.4) тогава и само тогава, когато

$$\begin{aligned} \Delta_{\vec{\lambda}} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\lambda^i)^2 \\ \frac{d}{dz} Y(\vec{\lambda}, z) &= \sum_{i=1}^N \lambda^i : J^i(z) Y(\vec{\lambda}, z) : \end{aligned} \quad (3.6.15)$$

Доказателство: Това е елементарно многомерно обобщение на Теорема 5.2 от [27].

Решението на това диференциално уравнение се определя с точност до общ множител. Когато наложим нормировъчното условие

$$\langle 0 | Y(\vec{\lambda}, z) Y(-\vec{\lambda}, w) | 0 \rangle = \frac{1}{(z-w)^{\langle \vec{\lambda} | \vec{\lambda} \rangle}} \quad (3.6.16)$$

то може да бъде представено във вида

$$Y(\vec{\lambda}, z) = : e^{i\phi(\vec{\lambda}, z)} : = U_{\vec{\lambda}} e^{i\phi_+(\vec{\lambda}, z)} z^{J_0^{\vec{\lambda}}} e^{i\phi_-(\vec{\lambda}, z)}, \quad (3.6.17)$$

където

$$\begin{aligned} i\phi_{\pm}(\vec{\lambda}, z) &= \pm \sum_{n=1}^{\infty} J_{\mp n}^{\vec{\lambda}} \frac{z^{\pm n}}{n}, \\ J_n^{\vec{\lambda}} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \vec{\lambda}^i J_n^i =: (\vec{\lambda} | J_n), \end{aligned} \quad (3.6.18)$$

а операторът $U_{\vec{\lambda}}$ е (външен) автоморфизъм на алгебрата на токове реализиращ отместване на зарядите. Поради това той комутира с всички ненулеви моди на токовете:

$$[J_n^{\vec{\lambda}}, U_{\vec{\lambda}'}] = (\vec{\lambda} | \vec{\lambda}') U_{\vec{\lambda}'} \delta_{n,0}. \quad (3.6.19)$$

Операторите $U_{\vec{\lambda}}$ задават унитарно представяне на абелевата група $\mathbb{R}^N \ni \vec{\lambda}$, т.е.

$$U_{\vec{\lambda}} U_{\vec{\lambda}'} = U_{\vec{\lambda}'} U_{\vec{\lambda}} = U_{\vec{\lambda} + \vec{\lambda}'}, \quad U_0 = 1. \quad (3.6.20)$$

Забележка 3.3 Комутационните съотношения (3.6.19) заедно с условието (3.6.31) напълно определят действието на операторите $U_{\vec{\omega}}$ в Хилбертовото пространство $\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$

Твърдение 3.3 Корелационните функции на вертексните експоненти (3.6.17) се пресмятат по следната формула

$$\begin{aligned} \langle 0 | \prod_{i=1}^N Y(\vec{\lambda}_i, z_i) | 0 \rangle &= \prod_{1 \leq i < j \leq N} (z_i - z_j)^{(\vec{\lambda}_i | \vec{\lambda}_j)} \delta_{\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2 + \dots + \vec{\lambda}_N, 0}, \\ &|z_1| > |z_2| > \dots > |z_N|. \end{aligned} \quad (3.6.21)$$

Преди да пристъпим към доказателството на Твърдение 3.3 ще докажем следната **Лема. В сила е обменното съотношение**

$$\left(z_i^{J_0^{(\vec{\lambda}_i)}} e^{i\phi_-(\vec{\lambda}_i, z_i)} \right) \left(U_{\vec{\lambda}_j} e^{i\phi_+(\vec{\lambda}_j, z_j)} \right) = (z_i - z_j)^{(\vec{\lambda}_i | \vec{\lambda}_j)} \left(U_{\vec{\lambda}_j} e^{i\phi_+(\vec{\lambda}_j, z_j)} \right) \left(z_i^{J_0^{(\vec{\lambda}_i)}} e^{i\phi_-(\vec{\lambda}_i, z_i)} \right) \quad (3.6.22)$$

$$|z_j| < |z_i|$$

Доказателство:

$$z_i^{J_0^{(\vec{\lambda}_i)}} e^{i\phi_-(\vec{\lambda}_i, z_i)} U_{\vec{\lambda}_j} e^{i\phi_+(\vec{\lambda}_j, z_j)} = z_i^{J_0^{(\vec{\lambda}_i)}} U_{\vec{\lambda}_j} e^{i\phi_-(\vec{\lambda}_i, z_i)} e^{i\phi_+(\vec{\lambda}_j, z_j)} \quad (3.6.23)$$

понеже съгласно (3.6.19) $U_{\vec{\lambda}}$ комутира с всички моди на тока освен с нулевия, следователно комутира и с $\phi_{\pm}(\vec{\lambda}', z)$.

1. Съгласно (3.6.20) $U_{\vec{\lambda}}$ е обратим оператор. Като използваме тъждеството $U^{-1} e^A U = e^{U^{-1} A U}$ и комутационните съотношения (3.6.19) (в частност $U_{\vec{\lambda}}^{-1} J_0^{\vec{\lambda}'} U_{\vec{\lambda}} = J_0^{\vec{\lambda}'} + (\vec{\lambda} | \vec{\lambda}')$) можем да разместим първите два оператора

$$z_i^{J_0^{\vec{\lambda}_i}} U_{\vec{\lambda}_j} = e^{J_0^{\vec{\lambda}_i} \ln z_i} U_{\vec{\lambda}_j} =: A \implies$$

$$U_{-\vec{\lambda}_j} A = U_{-\vec{\lambda}_j}^{-1} e^{J_0^{\vec{\lambda}_i} \ln z_i} U_{\vec{\lambda}_j} = e^{U_{-\vec{\lambda}_j}^{-1} J_0^{\vec{\lambda}_i} U_{-\vec{\lambda}_j} \ln z_i} = e^{(J_0^{\vec{\lambda}_i} + (\vec{\lambda}_i | \vec{\lambda}_j)) \ln z_i} = z_i^{(J_0^{\vec{\lambda}_i} + (\vec{\lambda}_i | \vec{\lambda}_j))} \implies$$

$$z_i^{J_0^{\vec{\lambda}_i}} U_{\vec{\lambda}_j} = U_{\vec{\lambda}_j} z_i^{(J_0^{\vec{\lambda}_i} + (\vec{\lambda}_i | \vec{\lambda}_j))}. \quad (3.6.24)$$

2. От друга страна,

$$e^A e^B = e^B e^A e^{[A, B]} \Leftrightarrow [A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0, \implies$$

$$e^{i\phi_-(\vec{\lambda}_i, z_i)} e^{i\phi_+(\vec{\lambda}_j, z_j)} = e^{i\phi_+(\vec{\lambda}_j, z_j)} e^{i\phi_-(\vec{\lambda}_i, z_i)} e^{[i\phi_-(\vec{\lambda}_i, z_i), i\phi_+(\vec{\lambda}_j, z_j)]}, \quad (3.6.25)$$

когато $[i\phi_{\pm}(\vec{\lambda}, z), [i\phi_{\pm}(\vec{\lambda}, z), i\phi_{\pm}(\vec{\lambda}', z)]] = 0$. Затова изчисляваме комутатора

$$[i\phi_-(\vec{\lambda}_i, z_i), i\phi_+(\vec{\lambda}_j, z_j)] = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z_i^{-n} z_j^m}{n m} [J_n^{(\vec{\lambda}_i)}, J_{-m}^{(\vec{\lambda}_j)}] = \left([J_n^{(\vec{\lambda}_i)}, J_{-m}^{(\vec{\lambda}_j)}] = n(\vec{\lambda}_i | \vec{\lambda}_j) \delta_{n,m} \right)$$

$$= -(\vec{\lambda}_i | \vec{\lambda}_j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_i^{-n} z_j^n}{n} = (\vec{\lambda}_i | \vec{\lambda}_j) \ln \left(1 - \frac{z_j}{z_i} \right) = \ln \left(\frac{z_i - z_j}{z_i} \right)^{(\vec{\lambda}_i | \vec{\lambda}_j)}. \quad (3.6.26)$$

Трябва да отбележим, че радиусът на сходимост R на степенния ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_j^n}{n}$, участващ в (3.6.26) е 1, т.е. $R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Следователно редът е сходящ само когато $|z_j/z_i| < 1$, т.е. когато $|z_j| < |z_i|$. В такъв случай редът съвпада с главната стойност на логаритъма в отворения диск $|z - 1| < 1$ с център $z = 1$ и радиус 1.

Следователно

$$e^{i\phi_-(\vec{\lambda}_i, z_i)} e^{i\phi_+(\vec{\lambda}_j, z_j)} = \left(\frac{z_i - z_j}{z_i} \right)^{(\vec{\lambda}_i | \vec{\lambda}_j)} e^{i\phi_+(\vec{\lambda}_j, z_j)} e^{i\phi_-(\vec{\lambda}_i, z_i)} \quad (3.6.27)$$

Така, в крайна сметка, получаваме

$$z_i^{J_0^{(\vec{\lambda}_i)}} e^{i\phi_-(\vec{\lambda}_i, z_i)} U_{\vec{\lambda}_j} e^{i\phi_-(\vec{\lambda}_j, z_j)} = z_i^{(\vec{\lambda}_i | \vec{\lambda}_j)} \left(\frac{z_i - z_j}{z_i} \right)^{(\vec{\lambda}_i | \vec{\lambda}_j)} U_{\vec{\lambda}_j} e^{i\phi_+(\vec{\lambda}_j, z_j)} z_i^{J_0^{(\vec{\lambda}_i)}} e^{i\phi_-(\vec{\lambda}_i, z_i)},$$

$$|z_j| < |z_i|. \quad (3.6.28)$$

с което лемата е доказана. ■

Доказателство на Твърдение 3.3:

Да запишем вакуумното средно (3.6.21) по следния начин

$$\langle \prod_{i=1}^N Y(\vec{\lambda}_i, z_i) \rangle = \langle e^{i\phi_+^1} e^{i\phi_-^1} \dots e^{i\phi_+^N} e^{i\phi_-^N} \rangle, \quad (3.6.29)$$

където $e^{i\phi_+^k} = U_{\vec{\lambda}_k} e^{i\phi_+(\vec{\lambda}_k, z_k)}$ и $e^{i\phi_-^k} = z_k^{J_0^{(\vec{\lambda}_k)}} e^{i\phi_-(\vec{\lambda}_k, z_k)}$, т.е. $e^{i\phi_-^j} e^{i\phi_+^k} = (z_j - z_k)^{(\vec{\lambda}_j | \vec{\lambda}_k)} e^{i\phi_+^k} e^{i\phi_-^j}$. Тогава, като използваме $e^{i\phi_-^k} |0\rangle = |0\rangle$, прехвърлим всички $e^{i\phi_+^k}$ отляво и използваме още $\langle 0| e^{i\phi_+^k} = \langle 0| U_{\vec{\lambda}_k}$ получаваме

$$\begin{aligned} \langle \prod_{i=1}^N Y(\vec{\lambda}_i, z_i) \rangle &= \langle \prod_{k=1}^{N-1} (e^{i\phi_+^k} e^{i\phi_-^k}) e^{i\phi_+^N} \rangle \stackrel{\text{Лема}}{=} \\ &= \prod_{k=1}^{N-1} (z_k - z_N)^{(\vec{\lambda}_k | \vec{\lambda}_N)} \langle e^{i\phi_+^N} \prod_{j=1}^{N-1} (e^{i\phi_+^j} e^{i\phi_-^j}) \rangle = \prod_{k=1}^{N-1} (z_k - z_N)^{(\vec{\lambda}_k | \vec{\lambda}_N)} \langle U_{\vec{\lambda}_N} \prod_{j=1}^{N-2} (e^{i\phi_+^j} e^{i\phi_-^j}) e^{i\phi_+^{N-1}} \rangle = \\ &= \prod_{k=1}^{N-1} (z_k - z_N)^{(\vec{\lambda}_k | \vec{\lambda}_N)} \prod_{l=1}^{N-2} (z_l - z_{N-1})^{(\vec{\lambda}_l | \vec{\lambda}_{N-1})} \langle U_{\vec{\lambda}_N} U_{\vec{\lambda}_{N-1}} \prod_{i=1}^{N-2} e^{i\phi_+^i} e^{i\phi_-^i} \rangle = \dots \\ &= \prod_{i=1}^{N-1} (z_{i_1} - z_N)^{(\vec{\lambda}_{i_1} | \vec{\lambda}_N)} \prod_{i_2=1}^{N-2} (z_{i_2} - z_{N-1})^{(\vec{\lambda}_{i_2} | \vec{\lambda}_{N-1})} \dots \times \\ &\times \prod_{i_{N-1}=1}^{N-(N-1)} (z_{i_{N-1}} - z_{N-(N-1)})^{(\vec{\lambda}_{i_{N-1}} | \vec{\lambda}_{N-(N-1)})} \langle U_{\vec{\lambda}_N} U_{\vec{\lambda}_{N-1}} \dots U_{\vec{\lambda}_{N-(N-1)}} \rangle. \end{aligned} \quad (3.6.30)$$

От друга страна, $U_{\vec{\lambda}_N} U_{\vec{\lambda}_{N-1}} \dots U_{\vec{\lambda}_{N-(N-1)}} |0\rangle = U_{\vec{\lambda}_1 + \dots + \vec{\lambda}_N} |0\rangle = |\vec{\lambda}_1 + \dots + \vec{\lambda}_N\rangle$ и $\langle 0 | \vec{\omega} \rangle = \delta_{\vec{\omega}, 0}$, понеже това са собствени вектори на ермитовия оператор J_0^i . Това завършва доказателството на Твърдение 3.3. ■

Забележка 3.4 Уравнение (3.6.21) задава корелационната функция при точно наредени по модул аргументи. Но тъй като тя е мероморфна функция може да бъде продължена аналитично за произволни разположения на координатите z_i в комплексната равнина.

В заключение трябва да отбележим, че всяко първично поле $Y(\vec{\lambda}, z)$ определя представяне на хиралната алгебра $\widehat{u(1)}^N$ с младши вектор

$$|\vec{\lambda}\rangle = \lim_{z \rightarrow 0} Y(\vec{\lambda}, z) |0\rangle = U_{\vec{\lambda}} |0\rangle, \quad \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^N. \quad (3.6.31)$$

Поради тази причина конформната теория с хирална алгебра $\widehat{u(1)^N}$ не е рационална, т.е. тя има безброй много представяния така, че не може да се реализира крайно-мерно представяне на модулаторната група $SL(2, \mathbb{Z})$. От физична гледна точка полетата $Y(\vec{\lambda}, z)$ играят роля на квазичастици със заряди λ^i относно токовете $J^i(z)$. Както вече споменахме ефективните теории на полето за описание на несвиваеми флуиди имат забранен енергетичен праг в нискоенергетичния спектър на заредените възбуждания. Уравнение (3.6.31) показва, че в чистата $\widehat{u(1)^N}$ теория всяко $\vec{\lambda} \neq 0$ е допустимо представяне с ненулев заряд, т.е. съществуват квазичастици с произволно малка конформна енергия и следователно няма енергетичен праг. Например, в случая когато $N = 1$ алгебрата на токове $\widehat{u(1)}$ описва едномерен Ферми-флуид, за който е известно, че не е несвиваем (респективно, няма забранен енергетичен праг в спектъра на заредените възбуждания).

Както ще видим по-нататък съществуването на енергетичния праг в ефективната теория съдържаща $\widehat{u(1)^N}$ алгебрата на токове е еквивалентно на изискването за модулаторна инвариантност, т.е. налага се да търсим рационални разширения на абелевата алгебра на токове.

Тук трябва да отбележим, че в допълнение към моделите, основани на абелеви алгебри на токове, описващи Холови флуиди съществуват и така наречените *минимални* $W_{1+\infty}$ модели [20, 21, 22], където наред с локалните заредени възбуждания (с ненулев забранен енергетичен праг) съществуват и неутрални квазичастици с произволно малка енергия. Затова там описанието на несвиваеми флуиди не изисква рационална конформна теория, понеже неутралните частици може да нямат забранен енергетичен праг.

3.7 Рационални разширения на $\widehat{u(1)^N}$ алгебрата на токове

Рационалните разширения на $\widehat{u(1)^N}$ алгебрата на токове се получават като прибавим към хиралната алгебра нови локални полета удовлетворяващи определени условия. Тъй като при разширението ние бихме искали да запазим $u(1)^N$ симетрията, както и репараметризационната инвариантност, новите полета трябва да бъдат избрани измежду първичните полета $Y(q^i, z)$, $q^i \in \mathbb{R}^N$. Тогава условието за първичност относно алгебрата на токове гарантира, че новите полета локално комутират с токовете и тензора на напреженията. Трябва обаче, да се осигури еднозначността и взаимната локалност на новите полета. Локалността на вертексните експоненти $Y(q^i, z)$ изисква комутаторът (респ. антикомутаторът) им да има сингулярен носител при съвпадащи аргументи, т.е. да се изразява като крайна сума от δ -функцията (виж Допълнение А) и нейните производни

$$\oint \frac{dz}{2\pi i} f(z) \delta(z-w) = f(w) \Rightarrow \delta^{(n)}(z-w) = n! \left\{ \frac{(-1)^n}{(z-w)^{n+1}} + \frac{1}{(w-z)^{n+1}} \right\}. \quad (3.7.1)$$

Като използваме явния вид на първичните полета (3.6.17) можем да получим следното разложение при малка разлика в аргументите

$$Y(\vec{\lambda}_1, z_1) Y(\vec{\lambda}_2, z_2) = (z_1 - z_2)^{(\vec{\lambda}_1 | \vec{\lambda}_2)} Y(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2, z_2) + O((z_1 - z_2)^{(\vec{\lambda}_1 | \vec{\lambda}_2) + 1}). \quad (3.7.2)$$

От тук се вижда, че изискването за еднозначност и условието за Бозе-Ферми алтернатива на заредените полета (3.7.2) са изпълнени само когато $(\vec{\lambda}_1|\vec{\lambda}_2) \in \mathbb{Z}$. Също така комутаторът (респ. антикомутаторът) може да бъде изразен като крайна сума от δ - функцията и нейните производни само когато $(\vec{\lambda}_1|\vec{\lambda}_2) \in \mathbb{Z}$. Така стигаме до извода, че **зарядите на допълнителните полета трябва да удовлетворяват** $(q^i|q^j) \in \mathbb{Z} \quad \forall i, j$. Трябва да отбележим, че добавяйки полето $Y(q^i, z)$ ние сме длъжни да добавим и полето $Y(-q^i, z) = Y(q^i, z)^*$. Наистина, инволюцията в алгебрата на токовете се продължава до инволюция върху разширената алгебра като се използва унитарността $(U_{\vec{\lambda}})^{-1} = (U_{\vec{\lambda}})^* = U_{-\vec{\lambda}}$ на оператора на отместване на зарядите и тогава спрягането на вертексната експонента (3.6.17) променя само знака на нейния заряд. При това, разширената алгебра трябва да бъде затворена относно ермитово спрягане.

По-нататък, ако разширим алгебрата с полетата $Y(q^i, z), Y(q^j, z), (q^i|q^j) \in \mathbb{Z}$ то съгласно (3.7.2) в разширената алгебра ще присъства и полето $Y(q^i + q^j, z)$. С последователно прилагане на прибавените полета, в разширената алгебра, можем да получим всички полета $Y(\vec{\omega}, z)$, със заряд

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^N n_i q^i, \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} \in \Gamma = \bigoplus_{i=1}^N \mathbb{Z} q^i. \quad (3.7.3)$$

Така, прибавяйки полетата $Y(q^i, z) \quad \forall i, j (q^i|q^j) \in \mathbb{Z}$ към алгебрата на токове, ние прибавяме безброй много първични полета чийто заряди лежат във целочислената решетка Γ . Метриката на решетката $(q^i|q^j) \stackrel{\text{def}}{=} G_{\Gamma}^{ij}$ (известна като матрица на Грам [62, 50, 18, 31] за решетката Γ) трябва да бъде неизродена, с ранг N . В противен случай, може да се намери базис, в който матрицата на Грам да съдържа един нулев ред. Тогава векторът \tilde{q}^i отговарящ на този ред ще дефинира полето $Y(a\tilde{q}^i, z)$, такова, че $a(\tilde{q}^i|\tilde{q}^j) = 0, \forall i, j$, което е локално с всички полета и задава безброй много представяния $a \in \mathbb{R}$ на разширената алгебра. По-нататък ще въведем специална нормирувка на токовете и заредените полета в разширената алгебра, която ще се окаже технически по-удобна. Преди всичко, понеже матрицата на Грам е целочислена (т.е. реална) и симетрична, съществува ортогонална трансформация $A (A^T = A^{-1})$, която я диагонализира

$$(A^{-1})^i_k G_{\Gamma}^{kl} A_l^j = d^i \delta^{ij}, \quad (3.7.4)$$

където $\forall i, d^i > 0$, за т. нар. "хирални Холови флуиди"¹¹. Тогава можем да дефинираме

$$B_k^i = \frac{A_k^i}{\sqrt{d^i}} \quad \text{така, че} \quad (3.7.5)$$

$$B_k^i B_l^j G_{\Gamma}^{kl} = \delta^{ij} \Leftrightarrow G_{\Gamma}^{kl} = (B^{-1})_i^k (B^{-1})_j^l \delta^{ij}. \quad (3.7.6)$$

Забележка 3.5 Матрицата (3.7.5) не е единственото решение на (3.7.6). Всяка друга матрица $(\tilde{B}^{-1})_i^k = O_i^s (B^{-1})_s^k$, където $(O_i^s) \in O(N)$ е ортогонална матрица, също удовлетворява (3.7.6). В частност можем да използваме процедурата на Грам-Шмидт за диагонализирането на G .

¹¹По-нататък ще работим изцяло с хирални Холови флуиди. Пълната класификация, включваща флуиди без определена хиралност е направена във [50].

Новите токове определяме както следва:

$$\begin{aligned} H^i(z) &\stackrel{\text{def}}{=} (B^{-1})_k{}^i J^k(z) \Rightarrow \\ H^i(z)H^j(w) &\sim \frac{(B^{-1})_k{}^i (B^{-1})_l{}^j \delta^{kl}}{(z-w)^2} = \frac{G_\Gamma^{ij}}{(z-w)^2}, \\ H^i(z)Y(\vec{\lambda}, w) &\sim \frac{(B^{-1})_k{}^i \vec{\lambda}^k}{z-w} Y(\vec{\lambda}, w) = \frac{(q^i|\vec{\lambda})}{z-w} Y(\vec{\lambda}, w), \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

където $q^i = (B^{-1})_k{}^i e_0^k$ и $\{e_0^i\}$, $((e_0^i|e_0^j) = \delta^{ij})$ е Декартовият базис отговарящ на токовете $J^i(z)$, докато $\{q^i\}$, $((q^i|q^j) = G_\Gamma^{ij})$ е новия базис отговарящ на токовете $H^i(z)$.

Тензорът на енергията се изразява в новия базис от токове

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N :J^i(z)J^i(z): = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N :H_i(z)H^i(z):, \\ H_i(z) &= (G_\Gamma^{-1})_{ij} H^j(z), \quad (G_\Gamma^{-1})_{ij} = B^k{}_i B^l{}_j \delta_{kl}. \end{aligned} \quad (3.7.8)$$

Следващите две определения резюмират математическото съдържание на направения анализ на рационалните разширения на алгебрата на токове $\widehat{u(1)^N}$.

Определение 3.5 Нека $\{q^i\}_{i=1}^N$ е линейно независима система вектори в N - мерно евклидово пространство със скалярно произведение $(\cdot|\cdot)$. Множеството от точки

$$\Gamma = \left\{ \vec{\omega} = n_i q^i \mid n_i \in \mathbb{Z} \right\} \quad (3.7.9)$$

се нарича решетка. Решетката Γ се нарича целочислена, когато $(q^i|q^j) = G_\Gamma^{ij} \in \mathbb{Z}$. Решетката $\Gamma^* = \{\vec{\lambda} : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}\}$ се нарича дуална на Γ .

Определение 3.6 Рационално разширение на $\widehat{u(1)^N}$ алгебрата на токове наричаме хиралната алгебра $\mathcal{A}(\Gamma)$ породена от токовете $H^i(z)$, $i = 1, \dots, N$ и $2N$ на брой заредени полета $Y(\pm q^i, z)$, чийто заряди образуват базис на целочислената решетка $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^N \mathbb{Z} q^i$ с (неизродена) матрица на Грам $G_\Gamma^{ij} = (q^i|q^j) \in \mathbb{Z}$. Комутиационните съотношения в разширената алгебра се определят от следните РОП:

$$H^i(z)H^j(w) \sim \frac{G_\Gamma^{ij}}{(z-w)^2}, \quad (3.7.10a)$$

$$H^i(z)Y(\vec{\lambda}, w) \sim \frac{(q^i|\vec{\lambda})}{z-w} Y(\vec{\lambda}, w), \quad (3.7.10b)$$

$$Y(\vec{\lambda}_1, z_1)Y(\vec{\lambda}_2, z_2) \sim (z_1 - z_2)^{(\vec{\lambda}_1|\vec{\lambda}_2)} Y(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2, z_2) + \dots, \quad (3.7.10c)$$

$$[H_n^i, U_{\vec{\lambda}}] = (q^i|\vec{\lambda}) U_{\vec{\lambda}} \delta_{n,0}. \quad (3.7.10d)$$

Приложението към ефекта на Хол изисква въвеждането на оператор на електричния заряд, чиято аномалия определя Холовото напрежение, т.е.,

$$J^{\text{el}}(z)J^{\text{el}}(w) \sim \frac{\nu}{(z-w)^2}. \quad (3.7.11)$$

Този $U(1)$ ток е линейна комбинация [50] на базисните токове $H^i(z)$ в решетката

$$J^{\text{el}}(z) \stackrel{\text{def}}{=} (Q|H(z)) = \sum_{i=1}^N Q^i G_{ij}^{-1} H^j(z), \quad (3.7.12)$$

където векторът на заряда Q трябва да удовлетворява следните условия [50, 18, 20, 21]:

Q1: $Q = Q^i q_i^*$ е примитивен вектор в дуалната решетка Γ^* , т.е. $\gcd(Q^1, \dots, Q^N) = 1$.

Q2: Квадратът на вектора на заряда е равен на фактора на запълване $\boxed{(Q|Q) = \nu}$.

Q3: Връзка между заряда и статистиката: $\forall q \in \Gamma \quad \boxed{(Q|q) \equiv (q|q) \pmod{2}}$.

Подробно математично изложение на апарата на целочислените решетки, техните инварианти и съответстващите им физични величини, може да бъде намерено в [50].

3.8 Неприводими представяния на рационалните разширения $\mathcal{A}(\Gamma)$ на $\widehat{u(1)^N}$ алгебрата на токове

Неприводимите представяния на рационалните разширения $\mathcal{A}(\Gamma)$ на $\widehat{u(1)^N}$ алгебрата на токове трябва да съдържат приводимите представяния на последната, тъй като тя се съдържа в разширението. Това означава, че първите ще бъдат преки суми от представяния с младши вектори $|\vec{\lambda}\rangle$ съответстващи на първичните (относно $\widehat{u(1)^N}$) полета $Y(\vec{\lambda}, z)$. С други думи, разширявайки алгебрата намаляваме броя на допустимите представяния, но всички те се строят чрез представянията на неразширената алгебра.

Първичните полета определящи представянията трябва да бъдат взаимно локални с полетата от хиралната алгебра (но не задължително локални помежду си). Това налага силни ограничения върху допустимите представяния на дадена алгебра и в някои случаи ги определят напълно. Всички първични полета по построение са взаимно локални с токовете пораждащи $\widehat{u(1)^N}$. Остава условието за локалност с полетата $Y(\vec{\omega}, z)$, $\vec{\omega} \in \Gamma$. Както вече споменахме, съгласно (3.7.2), два вертексни оператора са взаимно локални тогава и само тогава, когато скаларното произведение на техните заряди е целочислено. В нашия случай полето $Y(\vec{\lambda}, z)$ задаващо представяне на разширената алгебра е локално с $Y(\vec{\omega}, z)$, $\vec{\omega} \in \Gamma$ тогава и само тогава, когато $\forall \vec{\omega} \in \Gamma \quad (\vec{\lambda}|\vec{\omega}) \in \mathbb{Z}$. Това, по определение, означава, че $\vec{\lambda} \in \Gamma^*$, където Γ^* е дуалната решетка [50, 31].

От друга страна, ако $\vec{\lambda} \in \Gamma^*$ определя представяне и $\vec{\omega} \in \Gamma$ то $\vec{\lambda} + \vec{\omega}$ също определя допустимо представяне на $\mathcal{A}(\Gamma)$ понеже $\forall \vec{\omega}' \in \Gamma \quad (\vec{\lambda} + \vec{\omega}|\vec{\omega}') \in \mathbb{Z}$. Това представяне обаче е еквивалентно на първото, понеже $|\vec{\lambda} + \vec{\omega}\rangle = U_{\vec{\omega}}|\vec{\lambda}\rangle$, където $U_{\vec{\omega}} \in \mathcal{A}(\Gamma)$ е вътрешен

3.8 Неприводими представяния на рационалните разширения $\mathcal{A}(\Gamma)$ на $\widehat{u(1)^N}$ алгебрата на токове

автоморфизъм на разширената алгебра, т.е.

$$\forall A \in \mathcal{A}(\Gamma) \quad \pi_{\vec{\lambda} + \vec{\omega}}(A) = U_{\vec{\omega}}^{-1} \pi_{\vec{\lambda}}(A) U_{\vec{\omega}}.$$

Тази еквивалентност на представянията на разширената алгебра $\mathcal{A}(\Gamma)$ се поражда от релацията на еквивалентност в решетката Γ^* относно Γ :

Определение 3.7 Релация на еквивалентност в Γ^* относно Γ

$$\forall \vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2 \in \Gamma^* \quad \vec{\lambda}_1 \sim \vec{\lambda}_2 \iff \vec{\lambda}_1 - \vec{\lambda}_2 \in \Gamma. \quad (3.8.1)$$

Така определената релация на еквивалентност удовлетворява следните условия:

рефлексивност $\vec{\lambda} \sim \vec{\lambda}$

Наистина, $\vec{\lambda} - \vec{\lambda} = 0 \in \Gamma$.

симетричност $\vec{\lambda}_1 \sim \vec{\lambda}_2 \Rightarrow \vec{\lambda}_2 \sim \vec{\lambda}_1$

Наистина, $\vec{\lambda}_1 - \vec{\lambda}_2 = \vec{\omega} \in \Gamma \Rightarrow \vec{\lambda}_2 - \vec{\lambda}_1 = -\vec{\omega} \in \Gamma$.

транзитивност $\vec{\lambda}_1 \sim \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_2 \sim \vec{\lambda}_3 \Rightarrow \vec{\lambda}_1 \sim \vec{\lambda}_3$

Наистина, $\vec{\lambda}_1 - \vec{\lambda}_2 = \vec{\omega} \in \Gamma, \vec{\lambda}_2 - \vec{\lambda}_3 = \vec{\omega}' \in \Gamma \Rightarrow \vec{\lambda}_1 - \vec{\lambda}_3 = \vec{\omega} + \vec{\omega}' \in \Gamma$.

Релацията на еквивалентност (3.7) разбива решетката Γ^* на непресичащи се класове на еквивалентност спрямо Γ . Тогава, **нееквивалентните** неприводими представяния на $\mathcal{A}(\Gamma)$ ще бъдат еднозначно определени от множеството Γ^*/Γ от класовете на еквивалентност

$$[\vec{\lambda}_i] = \{ \vec{\lambda} \in \Gamma^* \mid \vec{\lambda} \sim \vec{\lambda}_i \}, \quad \Gamma^*/\Gamma = \{ [\vec{\lambda}_i] \mid \vec{\lambda}_i \not\sim \vec{\lambda}_j \}. \quad (3.8.2)$$

Твърдение 3.4 Множеството (3.8.2) от класовете на еквивалентност представлява крайна абелева група

Доказателство:

1) Групово умножение.

Определение 3.8 Произведението в абелевата група Γ^*/Γ се дефинира по следния начин:

$$\begin{aligned} \forall [\vec{\lambda}_1], [\vec{\lambda}_2] \in \Gamma^*/\Gamma \\ [\vec{\lambda}_1] + [\vec{\lambda}_2] \equiv [\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2] \in \Gamma^*/\Gamma \end{aligned} \quad (3.8.3)$$

Дефинираното произведение е коректно, понеже не зависи от избора на представители. Наистина, ако $\vec{\lambda}'_1 \sim \vec{\lambda}_1$ и $\vec{\lambda}'_2 \sim \vec{\lambda}_2 \implies \vec{\lambda}'_1 = \vec{\lambda}_1 + \vec{\omega}_1, \vec{\lambda}'_2 = \vec{\lambda}_2 + \vec{\omega}_2$ ($\vec{\omega}, \vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2 \in \Gamma$). Тогава

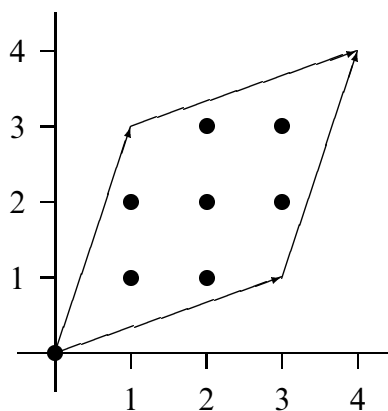
$$[\vec{\lambda}'_1] + [\vec{\lambda}'_2] = [\vec{\lambda}'_1 + \vec{\lambda}'_2] = [\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2 + \underbrace{\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2}_{\in \Gamma}] = [\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2] = [\vec{\lambda}_1] + [\vec{\lambda}_2] \quad (3.8.4)$$

Да проверим груповите аксиоми:

- (i) $([\vec{\lambda}_1] + [\vec{\lambda}_2]) + [\vec{\lambda}_3] = [\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2] + [\vec{\lambda}_3] = [\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2 + \vec{\lambda}_3] = [\vec{\lambda}_1] + ([\vec{\lambda}_2] + [\vec{\lambda}_3])$
- (ii) $\exists [1] \equiv \Gamma : [1] + [\vec{\lambda}] = [\vec{\lambda}] + [1] = [\vec{\lambda} + \vec{\omega}] = [\vec{\lambda}]$
- (iii) $\forall [\vec{\lambda}] \in \Gamma^*/\Gamma \exists [\vec{\lambda}^{-1}] = [-\vec{\lambda}] \in \Gamma^*/\Gamma$

Следователно (3.8.2) е наистина абелева група. Да намерим броя на нейните елементи.

2) Тъй като решетката Γ е подрешетка на Γ^* взлите от първата ще бъдат взли и на втората. При това, релацията на еквивалентност прехвърля от вътрешността на една клетка на Γ в друга запазвайки относителното разположение в клетката. Следователно, елементите на Γ^*/Γ ще се определят от тези точки на Γ^* , които попадат във вътрешността на единичната клетка на Γ . На Фиг. 12 е показана елементарната клетка на решетката с матрица на Грам (3.9.1) и точките от дуалната и решетка попадащи вътре¹².



Фигура 12: Елементарната клетка на решетката Γ с матрица на Грам (3.9.1) и точките от Γ^* попадащи в нея.

Броят на тези точки ще бъде равен на отношението на обемите на двете елементарни клетки [62]. За по-общия случай, когато Γ е произволна подрешетка на L

$$|L/\Gamma| = \frac{\text{Vol}(\Gamma)}{\text{Vol}(L)} = \frac{|q^1 \wedge \dots \wedge q^N|}{|e^1 \wedge \dots \wedge e^N|} = \frac{\sqrt{(q^1 \wedge \dots \wedge q^N | q^1 \wedge \dots \wedge q^N)}}{\sqrt{(e^1 \wedge \dots \wedge e^N | e^1 \wedge \dots \wedge e^N)}} = \sqrt{\frac{\det G_\Gamma}{\det G_L}}. \quad (3.8.5)$$

Тогава, в частност за броя на елементите на абелевата група Γ^*/Γ , получаваме

$$|\Gamma^*/\Gamma| = \sqrt{\frac{\det G_\Gamma}{\det G_{\Gamma^*}}} = \det G_\Gamma. \quad (3.8.6)$$

¹²Тази фигура е взета от [61]. Трябва да отбележим, че точките от Γ^* и елементарната клетка на Γ са представени координатно в базиса на Γ^* .

Следователно, абелевата група Γ^*/Γ е крайна. ■

Така, след разширяването на хиралната алгебра броят на допустимите нееквивалентни неприводими представяния се редуцира до $\det G_L$. Новата теория е вече рационална конформна теория понеже, както може да се провери, в пространството на представянията се реализира крайно мерно представяне на модулърната група $SL(2, \mathbb{Z})$.

От физическа гледна точка това означава наличие на енергетичен праг за създаването на заредени възбуждания, което е необходимо условие за описание на несвиваеми флуиди.

3.9 Рационално разширение на $\widehat{u(1)}^2$ с матрица на Грам G_{331}

В този подраздел ще покажем, че холоморфната част на многочастичната вълнова функция (3.1.1), дефинирана в § 3.1 за основното състояние на двуслоен несвиваем флуид с фактор на запълване $\nu = 1/2$, се реализира като корелационна функция в $\widehat{u(1)}^2$ рационална конформна теория на полето с матрица на Грам на решетката на зарядите

$$G_{331} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (3.9.1)$$

Многочастичната вълнова функция (3.1.1) е координатното представяне на състоянието на $2N$ частичната система. Квантово-механичната връзка между координатното представяне и представянето на числа на запълване е

$$\begin{aligned} |\Phi_N\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^3x_1 \dots d^3x_N \Phi^*(x_1, \dots, x_N) \Psi^*(x_1) \dots \Psi^*(x_N) |0\rangle \iff \\ \Phi(x_1, \dots, x_N) &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \langle \Phi_N | \Psi^*(x_1) \dots \Psi^*(x_N) |0\rangle, \end{aligned} \quad (3.9.2)$$

където $\Psi(x) = \sum_n \phi_n(x) a_n$ са полевите оператори удовлетворяващи каноничните (анти)комутиционни съотношения

$$[\Psi(x), \Psi^*(x')]_{\pm} = \delta(x - x') 1 \iff [a_n, a_m^*]_{\pm} = \delta_{n,m} 1, \quad (3.9.3)$$

а $\{\phi_n(x)\}$ са пълен набор от собствени функции на някаква физическа наблюдаема величина (с дискретен спектър).

В нашия случай (срв. [39, 40]) $Y(q^i, z)$ играят ролята на полевите оператори, а $2N$ частичното състояние в представянето на числа на запълване се задава със $|\Phi_{2N}\rangle = \lim_{z_0 \rightarrow 0} Y(N(q^1 + q^2), z_0) |0\rangle$. Спрегнатото състояние, съгласно правилата за спрягане на полета в аналитичната картина (т.е. когато аргументите се спрягат също), ще бъде

$$\langle \Phi_{2N} | = \lim_{z_0 \rightarrow \infty} z_0^{2\Delta_{2N}} \langle 0 | Y(-N(q^1 + q^2), z_0), \quad (3.9.4)$$

където $\Delta_{2N} = \frac{N^2}{2} ((q^1|q^1) + 2(q^1|q^2) + (q^2|q^2)) = \frac{N^2}{2} (\sum_{ij} G_{\Gamma}^{ij})$ е конформната размерност на "out"-състоянието. Тогава, използвайки Твърдение 3.3, за координатното представяне

на многочастичното състояние получаваме

$$\begin{aligned}
 \langle \Phi_{2N} | \prod_{i=1}^N Y(q^1, z_i) \prod_{j=1}^N Y(q^2, w_j) | 0 \rangle &= \lim_{z_0 \rightarrow \infty} \frac{z_0^{N^2(G_\Gamma^{11} + 2G_\Gamma^{12} + G_\Gamma^{22})}}{\prod_{i=1}^N (z_0 - z_i)^{N(G_\Gamma^{11} + G_\Gamma^{21})} (z_0 - w_i)^{N(G_\Gamma^{12} + G_\Gamma^{22})}} \times \\
 &\times \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{G_\Gamma^{11}} (w_i - w_j)^{G_\Gamma^{22}} \prod_{i, j} (z_i - w_j)^{G_\Gamma^{12}} = \\
 &= \prod_{1 \leq i < j \leq N} (z_i - z_j)^{G_\Gamma^{11}} (w_i - w_j)^{G_\Gamma^{22}} \prod_{i, j=1}^N (z_i - w_j)^{G_\Gamma^{12}}, \tag{3.9.5}
 \end{aligned}$$

което съвпада със многочастичната вълнова функция (3.1.1), когато матрицата на Грам G_Γ има вида (3.9.1) (с точност до традиционната експонента). Така, стигаме до извода, че вертексните експоненти $Y(q^1, z)$ и $Y(q^2, w)$ са полевите оператори представляващи съответно електроните в двата слоя (z, w) .

4 331 моделът като \mathbb{Z}_N орбиболд на $\mathcal{W}_1 \otimes \widehat{\text{su}}(2)_1$

Както видяхме в предишните раздели основното състояние на 331 модела се реализира в рационална конформна теория на полето на базата на $\widehat{u}(1)^2$ алгебра на токове разширена със зарядова решетка с матрица на Грам G_{331} (3.9.1). Пълното изследване на модела изисква познаването на топологически нееквивалентните заредени възбуждания (квазичастици), техните заряди, енергия, статистика, правила на сливане и т.н. Заключителната стъпка е написването на статистическата сума за Голям каноничен ансамбъл, която трябва да бъде инвариантна относно действието на модулърната група $SL(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$, както се очаква от конформна теория върху тор.

Колкото по-богата е симетрията в една задача, толкова повече може да се каже за нейните решения и свойства им. За това е целесъобразно да потърсим максималното разширение на групата на симетрии на алгебрата на наблюдаеми. В повечето случаи (в нашия – също) по-високата симетрия води и до техническо упростиране на анализа.

В нашия случай, разширяването на симетрията означава разширяване на хиралната алгебра и тъй като тя самата е разширение на $\widehat{u}(1)^2$ алгебрата на токове със целочислена зарядова решетка въпроса се свежда до намирането на *максималното целочислено разширение* на решетката Γ .

4.1 Локално разширение на 331 модела до $\mathcal{W}_1 \otimes \widehat{\text{su}}(2)_1$

Твърдение 4.1 *Разширение на целочислената решетка Γ със целочислена решетка L само тогава, когато детерминантата $\det G_\Gamma$ на изходната решетка съдържа точен квадрат в разложението си на прости множители.*

Доказателство:

Нека Γ е целочислена решетка с матрица на Грам G_Γ . Търсим такава целочислена решетка L , че $\Gamma \subset L$.

1. Ако $\Gamma \subset L$ то за съответните дуалните решетки е в сила обратното включване $\Gamma^* \supset L^*$.

Наистина, щом $\Gamma \subset L$ то порядъка (броя на елементите) на абелевата група L/Γ ще бъде по-голям от единица. Тъй като фактор-решетката представлява множеството от класовете на еквивалентност относно релацията на еквивалентност

$$\forall \vec{\omega}, \vec{\omega}' \in L \quad \vec{\omega} \sim \vec{\omega}' \leftrightarrow \vec{\omega} - \vec{\omega}' \in \Gamma \quad (4.1.1)$$

то порядъка на L/Γ ще бъде равен на обратното отношение на обемите на елементарните клетки опънати по базисните вектори (тъй като една подрешетка е "по-едра" от самата решетка), т.е.

$$\left| L/\Gamma \right| = \sqrt{\frac{\det G_\Gamma}{\det G_L}} > 1. \quad (4.1.2)$$

(Напомняме, че обема на елементарната клетка опъната по система линейно-независими вектори е равен на квадратен корен от детерминантата на матрицата от скаларните

им произведения – срв. (3.8.5).) Тогава, като се има предвид, че матрицата на Грам в дуалната решетка е обратната на матрицата на Грам в изходната решетка (и детерминантата на обратната матрица е реципрочната стойност на детерминантата на изходната), получаваме

$$|\Gamma^*/L^*| = \sqrt{\frac{\det G_{L^*}}{\det G_{\Gamma^*}}} = \sqrt{\frac{\det G_{\Gamma}}{\det G_L}} > 1 \Rightarrow \Gamma^* \supset L^*. \quad (4.1.3)$$

От друга страна, за всяка решетка L е изпълнено $L \subset L^*$. Следователно, търсим следното влягане на решетки

$$\boxed{\Gamma \subset L \subset L^* \subset \Gamma^*}. \quad (4.1.4)$$

2. В сила е следното равенство: $|\Gamma^*/\Gamma| = |\Gamma^*/L^*| \cdot |L^*/L| \cdot |L/\Gamma|$

Наистина,

$$|\Gamma^*/L^*| \cdot |L^*/L| \cdot |L/\Gamma| = \sqrt{\frac{\det G_{L^*}}{\det G_{\Gamma^*}}} \sqrt{\frac{\det G_L}{\det G_{L^*}}} \sqrt{\frac{\det G_{\Gamma}}{\det G_L}} = \sqrt{\frac{\det G_{\Gamma}}{\det G_{\Gamma^*}}} = |\Gamma^*/\Gamma|.$$

Освен това $|\Gamma^*/L^*| = \sqrt{\frac{\det G_{L^*}}{\det G_{\Gamma^*}}} = \sqrt{\frac{\det G_{\Gamma}}{\det G_L}} = |L/\Gamma|$. Като заместим това във 2. окончателно получаваме

$$\boxed{\Gamma \subset L \subset L^* \subset \Gamma^* \Rightarrow |\Gamma^*/\Gamma| = |L^*/L| \cdot |L/\Gamma|^2}. \quad \blacksquare \quad (4.1.5)$$

В конкретния случай матрицата на Грам (3.9.1) има детерминанта $\det G_{331} = 8 = 2 \cdot 2^2$. Следователно, целочислената решетка L , разширяваща Γ_{331} трябва да удовлетворява

$$L \supset \Gamma \Rightarrow |L^*/L| = \det G_L = 2, \quad |L/\Gamma| = 2. \quad (4.1.6)$$

Забележка 4.1 Твърдение 4.1 определя необходимо, но не достатъчно условие за съществуване на целочислено разширение. Например, нека $G = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, така че $\det G = 3^2$ съдържа точен квадрат. Оказва се обаче, че измежду 9-те младши вектори

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(в базиса $\{q_i^*\}$ на Γ^*) няма нито един с целочислен квадрат и съгласно Твърдение 4.1 не съществува нито едно целочислено разширение.

Един от начините да намерим възможните целочислени решетки (4.1.6) е да наложим условието $\det G_L = 2$ върху произволна двумерна решетка и да отчетем факта, че матриците на Грам свързани чрез преобразуване на подобие с матрица от групата $SL(2, \mathbb{Z})$ задават една и съща решетка. Така можем да се убедим, че съществува единствено целочислено разширение на Γ_{331} .

Съществува, обаче, по-елегантен метод за определяне на всички целочислени разширения на една целочислена решетка известен като *метод на слепването* [62, 31].

4.2 Метод на слепването

Нека L е n -мерна решетка съдържаща като подрешетка целочислената решетка $\Gamma \subset L$ със същата размерност. Нека с $(|)$ означим скаларното произведение в L . Да видим какви условия трябва да удовлетворяват елементите $\vec{\lambda} \in L$ от гледна точка на подрешетката Γ , т.е. какво представляват целочислените разширения на Γ .

$$1. \quad \forall x \in \Gamma, \forall \vec{\lambda} \in L \quad (\vec{\lambda}|x) \in \mathbb{Z}.$$

Наистина, тъй като $x \in \Gamma \subset L$ и L е целочислена решетка скаларното произведение на всеки два елемента от L е цяло число. От гледна точка на подрешетката Γ обаче, това означава, че $\vec{\lambda} \in \Gamma^*$ ($\Rightarrow L \subset \Gamma^*$).

2. Тъй като Γ е също целочислена решетка то

$$\forall \vec{\omega} \in \Gamma, \forall x \in \Gamma, \forall \vec{\lambda} \in L \quad (\vec{\lambda} + \vec{\omega}|x) \equiv (\vec{\lambda}|x) \pmod{\mathbb{Z}},$$

т.е. елементите $\vec{\lambda}$ и $\vec{\lambda} + \vec{\omega}$ действат върху подрешетката Γ по един и същи начин от гледна точка на целочислеността, т.е. те са "еквивалентни". Математически това означава, че можем да дефинираме релация на еквивалентност (3.7) между елементите на L относно подрешетката Γ .

Релацията на еквивалентност (3.8.1) разбива решетката L на непресичащи се класове на еквивалентност, които напълно я покриват. Множеството L/Γ от класовете на еквивалентност

$$[\vec{\lambda}_i] = \left\{ \vec{\lambda} \in L \mid \vec{\lambda} \sim \vec{\lambda}_i \right\}, \quad L/\Gamma = \left\{ [\vec{\lambda}_i] \mid \vec{\lambda}_i \not\sim \vec{\lambda}_j \right\} \quad (4.2.1)$$

представлява крайна абелева група. Тогава решетката L може да се представи

$$L = L/\Gamma + \Gamma \Rightarrow \forall \vec{\lambda} \in L \quad \exists \vec{\lambda}_0 \in L/\Gamma, \exists \vec{\omega} \in \Gamma \quad \vec{\lambda} = \vec{\lambda}_0 + \vec{\omega}. \quad (4.2.2)$$

Аналогично може да се представи и дуалната решетка Γ^*

$$\Gamma^* = \Gamma^*/\Gamma + \Gamma \Rightarrow \forall \vec{\lambda} \in \Gamma^* \quad \exists \vec{\lambda}_0 \in \Gamma^*/\Gamma \quad \exists \vec{\omega} \in \Gamma \quad \vec{\lambda} = \vec{\lambda}_0 + \vec{\omega}. \quad (4.2.3)$$

Тогава включването $L \subset \Gamma^*$ означава, че за фактор-множествата е изпълнено равенството

$$L/\Gamma \subset \Gamma^*/\Gamma.$$

По-нататък, ще ни бъде необходимо следното

Твърдение 4.2 *Скаларното произведение в Γ^* е "устойчиво" относно действието на подрешетката $\Gamma \subset \Gamma^*$, т.е.*

$$\forall \vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2 \in \Gamma^* \quad \forall \vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2 \in \Gamma \quad (\vec{\lambda}_1 + \vec{\omega}_1 | \vec{\lambda}_2 + \vec{\omega}_2) = (\vec{\lambda}_1 | \vec{\lambda}_2) \pmod{\mathbb{Z}}. \quad (4.2.4)$$

Доказателство:

Лявата страна на (4.2.4) има вида

$$(\vec{\lambda}_1 + \vec{\omega}_1 | \vec{\lambda}_2 + \vec{\omega}_2) = (\vec{\lambda}_1 | \vec{\lambda}_2) + (\vec{\omega}_1 | \vec{\lambda}_2) + (\vec{\lambda}_1 | \vec{\omega}_2) + (\vec{\omega}_1 | \vec{\omega}_2). \quad (4.2.5)$$

Но $\vec{\lambda}_i \in \Gamma^*$, следователно $(\vec{\lambda}_i | \vec{\omega}_j) \in \mathbb{Z}$, $i, j = 1, 2$. От друга страна, $(\vec{\omega}_1 | \vec{\omega}_2) \in \mathbb{Z}$ понеже Γ е целочислена. ■

Тогава условието за целочисленост на решетката L се свежда до следното:

$\forall \vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2 \in L \Rightarrow ([\vec{\lambda}_1] | [\vec{\lambda}_2]) \in \mathbb{Z}$, т.е. то се пренася върху класовете на еквивалентност от L/Γ . Очевидно поради (4.2.2) и целочислеността на L множеството L/Γ се състои от тези елементи на Γ^*/Γ които имат целочислени скаларни произведения помежду си, т.е.

$$L/\Gamma = \left\{ \vec{\lambda}_i \in \Gamma^*/\Gamma \mid (\vec{\lambda}_i | \vec{\lambda}_j) \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (4.2.6)$$

Твърдение 4.3 *Множеството от класове на еквивалентност (4.2.6) представлява крайна абелева група.*

Доказателство:

1. Ако $\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2 \in L/\Gamma \Rightarrow \vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2 \in \Gamma^*/\Gamma$ и за $\forall \vec{\lambda}_i \in L/\Gamma$ $(\vec{\lambda}_1 | \vec{\lambda}_i) \in \mathbb{Z}$, $(\vec{\lambda}_2 | \vec{\lambda}_i) \in \mathbb{Z}$. Следователно $\forall \vec{\lambda}_i \in L/\Gamma$ $(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2 | \vec{\lambda}_i) \in \mathbb{Z}$, т.е. $\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2 \in L/\Gamma$.

2. $0 \in \Gamma^*/\Gamma$ и $(0|0) \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0 \in L/\Gamma$.

3. Ако $\vec{\lambda} \in L/\Gamma \Rightarrow \vec{\lambda} \in \Gamma^*/\Gamma$, $\forall \vec{\lambda}_i \in L/\Gamma$ $(\vec{\lambda} | \vec{\lambda}_i) \in \mathbb{Z}$. Следователно $-\vec{\lambda} \in \Gamma^*/\Gamma$, $\forall \vec{\lambda}_i \in L/\Gamma$ $(-\vec{\lambda} | \vec{\lambda}_i) \in \mathbb{Z} \Rightarrow -\vec{\lambda} \in L/\Gamma$. Тогава L/Γ е абелева подгрупа на Γ^*/Γ . ■

При това, очевидно L/Γ съдържа цикличните групи на всичките си елементи, понеже ако $\vec{\lambda} \in L/\Gamma \Rightarrow \vec{\lambda} \in \Gamma^*/\Gamma$. Следователно, $n\vec{\lambda} \in \Gamma^*/\Gamma$ и $\forall \vec{\lambda}_i \in L/\Gamma$ $(n\vec{\lambda} | \vec{\lambda}_i) \in \mathbb{Z} \Rightarrow n\vec{\lambda} \in L/\Gamma$. Тогава подгрупата $L/\Gamma \subset \Gamma^*/\Gamma$ ще бъде пряко произведение от цикличните подгрупи на Γ^*/Γ породени от тези елементи $\vec{\lambda}_i \in \Gamma^*/\Gamma$, за които $(\vec{\lambda}_i | \vec{\lambda}_j) \in \mathbb{Z}$. С други думи

$$L/\Gamma = \bigcup_i \mathbb{Z}_{n_i} \vec{\lambda}_i, \quad \{\vec{\lambda}_i\} \subset \Gamma^*/\Gamma \quad (\vec{\lambda}_i | \vec{\lambda}_j) \in \mathbb{Z}, \quad (4.2.7)$$

и отделните $\vec{\lambda}_i$ не са елементи от една и съща циклична група, а n_i е редът на цикличната група породена от $\vec{\lambda}_i$. Така, решетката L може да бъде представена по следния начин

$$\begin{aligned} L &= \Gamma + \mathbb{Z}_{n_1} \vec{\lambda}_1 + \dots + \mathbb{Z}_{n_k} \vec{\lambda}_k \Rightarrow \\ \forall \vec{\lambda} \in L &\exists! \vec{\omega} \in \Gamma \quad \exists! (l^1, \dots, l^k) \in \mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_k} \\ \vec{\lambda} &= \vec{\omega} + \sum_{i=1}^k l^i \vec{\lambda}_i. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Като множество от точки, обаче, същата решетка може да се представи още като

$$L = \Gamma + \mathbb{Z} \vec{\lambda}_1 + \dots + \mathbb{Z} \vec{\lambda}_k, \quad (4.2.9)$$

където $\forall \vec{\lambda} \in L$ се представя нееднозначно, т.е. това е описание "с излишък", но е удобно понеже не изисква определянето на реда на цикличните групи. При това, на всеки набор "независими" елементи $\{\vec{\lambda}_i\} \subset \Gamma^*/\Gamma$ (наречени *глу-вектори*) такива, че $(\vec{\lambda}_i | \vec{\lambda}_j) \in \mathbb{Z}$ отговаря едно целочислено разширение L на целочислената решетка Γ .

4.3 Целочислени разширения L на решетката G_{331}

От тук нататък ще означаваме $\Gamma_{331} =: \Gamma$.

Твърдение 4.4 *Абелевата група Γ^*/Γ е изоморфна на цикличната група \mathbb{Z}_8 , т.е.*

$$\Gamma^*/\Gamma \simeq \mathbb{Z}_8 \quad (4.3.1)$$

Доказателство:

Нека $\{q^i\}_{i=1}^2 \subset \Gamma$ бъде базис на решетката Γ_{331} . Тогава, базиса на дуалната решетка $\{q_i^*\}_{i=1}^2 \subset \Gamma_{331}^*$ ще бъде изразен чрез обратната на матрицата на Грам

$$\begin{aligned} \boxed{q_i^* = (G_\Gamma^{-1})_{ij}q^j \iff q^i = G_\Gamma^{ij}q_j^*} \\ q_1^* = \frac{3q^1 - q^2}{8} \iff q^1 = 3q_1^* + q_2^* \\ q_2^* = \frac{3q^2 - q^1}{8} \iff q^2 = q_1^* + 3q_2^*. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Да намерим цикличната група породена от елемента q_2^* . За целта разглеждаме nq_2^* , $2 \leq n \leq 8$ понеже знаем, че $\det G_\Gamma = 8$. Като използваме връзките между базисите (4.3.2) трябва да отделим елементите принадлежащи на решетката Γ_{331} тъй като по нея се факторизира. Например,

$$\begin{aligned} 2q_2^* &= \frac{-q^1 + 3q^2}{4} = \frac{4q^2 - q^2 - q^1}{4} = q^2 - \frac{q^1 + q^2}{4} = \\ &= q^2 - \frac{3q_1^* + q_2^* + q_1^* + 3q_2^*}{4} = q^2 - (q_1^* + q_2^*), \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

но $q^2 \in \Gamma_{331}$ така, че $2q_2^* \sim -(q_1^* + q_2^*)$. Аналогично, $3q_2^* = 2q_2^* + q_2^* \sim -q_1^*$. По-нататък,

$$4q_2^* = \frac{-q^1 + 3q^2}{2} = q^2 + \frac{-q^1 + q^2}{2} = q^2 + q_2^* - q_1^* \sim q_2^* - q_1^*,$$

$$5q_2^* = \frac{-5q^1 + 15q^2}{8} = 2q^2 - q^1 + q_1^* \sim q_1^*,$$

$$6q_2^* = 5q_2^* + q_2^* \sim q_1^* + q_2^*, \quad 7q_2^* = 5q_2^* + 2q_2^* \sim -q_2^*.$$

В крайна сметка, за осемте класа на еквивалентност, получаваме [B]

$$\begin{aligned} q_2^*, \quad q_2^* \sim -(q_1^* + q_2^*), \quad 3q_2^* \sim -q_1^*, \quad 4q_2^* \sim -q_1^* + q_2^* \\ 5q_2^* \sim q_1^*, \quad 6q_2^* \sim q_1^* + q_2^*, \quad 7q_2^* \sim -q_2^*, \quad 8q_2^* \sim 0 \\ \Gamma^*/\Gamma \supset \mathbb{Z}_8q_2^* \Rightarrow \Gamma^*/\Gamma \equiv \mathbb{Z}_8q_2^*. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

■

За удобство класовете на еквивалентност (сектори на суперотбор) за обобщения $(m+1)(m+1)(m-1)$ модел са представени в Таблица 1 (срв. [B])

Таблица 1: Сектори на суперотбор в $(m+1)(m+1)(m-1)$ модела

косет (λ) = $\lambda q_1^* + L$	представител q^*	заряд ($Q q^*$)	размерност $\Delta = \frac{1}{2} q^* ^2$
(0)	0	0	0
(± 1)	$\pm q_1^*$	$\pm \frac{1}{2m}$	$\frac{m+1}{8m}$
$\pm(2m-1)$	$\pm q_2^*$	$\pm \frac{1}{2m}$	$\frac{m+1}{8m}$
...
($\pm m$)	$\pm(-1)^{m/2} \frac{1}{2} e^1$	$\pm(-1)^{m/2} \frac{1}{2}$	$\frac{m}{8}$
($m \pm 1$)	$\frac{1}{2} \left\{ \pm(m-1)Q - \pm(-1)^{m/2} \frac{1}{2} e^2 \right\}$	$\pm \frac{m-1}{4}$	$\frac{m^2-m+1}{8m}$
...
($2m$)	e^2	0	$\frac{1}{2}$

Глу-вектори:

От тези 8 елемента трябва да изберем тези, които имат два по два целочислени скаларни произведения. В частност, те трябва да имат целочислени квадрати. Измежду елементите (4.3.4) има само един вектор $\boxed{g = q_2^* - q_1^*}$, чийто квадрат е цяло число $(g|g) = 1$. Следователно, съществува единствено целочислено разширение

$$L = \Gamma + \mathbb{Z}g \implies \forall \vec{\lambda} \in L \exists \vec{\omega} = n_i q^i \in \Gamma, \exists n \in \mathbb{Z}_8 \vec{\lambda} = \vec{\omega} + ng. \quad (4.3.5)$$

За да намерим матрицата на Грам L на това разширение разглеждаме произволен елемент $\vec{\lambda} \in L$

$$\vec{\lambda} = n_i q^i + n(q_2^* - q_1^*) \stackrel{(4.3.2)}{=} n_i q^i + n \frac{q^1 - q^2}{2} = \left(n_1 + \frac{n}{2}\right) q^1 + \left(n_2 - \frac{n}{2}\right) q^2. \quad (4.3.6)$$

В търсения базис на L произволен елемент трябва да се представя с **независими** целочислени коефициенти $\vec{\lambda} = n'_i e^i$. От (4.3.6) се вижда, че ако положим

$$\begin{aligned} q^1 = e^1 - e^2 &\iff e^1 = \frac{q^1 + q^2}{2} \\ q^2 = e^1 + e^2 &\iff e^2 = \frac{q^2 - q^1}{2} \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

то $\vec{\lambda} = (n_1 + n_2)e^1 + (-n_1 + n_2 - n)e^2$ така, че координатите в новия базис $\{e^i\}_{i=1}^2$ са целочислени и независими¹³. Следователно,

$$L = \mathbb{Z}e^1 + \mathbb{Z}e^2 \implies G_L^{ij} = (e^i|e^j) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.3.8)$$

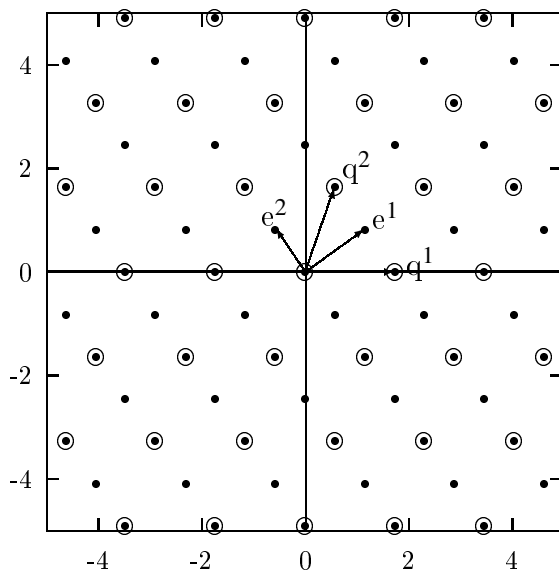
Накрая да резюмираме резултата:

Единственото целочислено разширение L на целочислената решетка Γ_{331} с матрица

¹³Трябва да отбележим, че $n_1 \pm n_2$ имат еднаква четност, така че макар и целочислени не са независими; присъствието на n ги прави такива.

на Грам (3.9.1) е решетката (4.3.8) отговаряща на единствения глу-вектор $g = q_2^* - q_1^*$. Съотношението на двете решетки е изобразено на Фиг. 13.

Фигура 13: Първоначалната решетка Γ , изобразена чрез (\circ) , като подрешетка на ортогоналната решетка L , изобразена чрез (\bullet) .



4.4 Калибровъчната група Γ^*/L^*

Както видяхме в предишната глава зарядовата решетка Γ (3.9.1) определяща модела 331 се съдържа в ортогоналната решетка (4.3.8) $L \supset \Gamma$. Тъй като решетката определя зарядите на локалните полета разширяващи хиралната алгебра разширението на решетката е всъщност разширение на хиралната алгебра.

Съществува канонична процедура за отделяне Γ като подрешетка на L (респективно $\mathcal{A}(\Gamma) \subset \mathcal{A}(L)$). Наистина, да видим по какво се различават елементите на Γ от тези на L . Да напомним, че дуалната решетка

$$L^* = \{ \vec{\lambda} \mid \vec{\lambda} : L \rightarrow \mathbb{Z} \} \quad (4.4.1)$$

се състои от всички **целочислени** линейни функционали върху изходната решетка L . Тогава, поради включването $\Gamma \subset L$ ще бъде изпълнено $\forall \vec{\gamma} \in \Gamma, \forall \vec{\lambda} \in L^* \vec{\lambda}(\vec{\gamma}) \in \mathbb{Z}$. Следователно, функционалите от L^* "не различават" елементите от Γ и тяхното допълнение в L . Не така стои обаче въпроса с функционалите в Γ^* . Тъй като $L^* \subset \Gamma^*$ и L^* по определение съдържа **всички** \mathbb{Z} -линейни функционали, които са целочислени върху L то разширението Γ^* (на L^*) ще съдържа и такива \mathbb{Z} -линейни функционали, които **не са целочислени** върху L . От друга страна пък, всички линейни функционали от Γ^* са целочислени върху Γ . Следователно, елементите на Γ^* , които не са елементи на L^* ще бъдат целочислени върху Γ и задължително нецелочислени върху L . Така, решетката Γ^* съдържа елементи, които различават Γ от L . Отново, тъй като ни интересува целочисленост, елементите в $\Gamma^* \supset L^*$ еквивалентни относно L^* , съгласно Определение 3.7,

ще имат напълно еквивалентни свойства, така че нееквивалентните елементи отделящи подрешетката Γ от L са тези от абелевата група Γ^*/L^* . Следователно, можем да дефинираме подрешетката $\Gamma \subset L$ по следния начин [A]

$$\Gamma = \left\{ \vec{\omega} \in L \mid \forall \vec{\gamma} \in \Gamma^*/L^* \quad \vec{\gamma}(\vec{\omega}) \equiv (\vec{\gamma}|\vec{\omega}) \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (4.4.2)$$

По-нататък, използвайки целочислеността, можем да дефинираме Γ като тази подрешетка на L , за която $e^{2\pi i(\vec{\gamma}|\vec{\omega})} = 1, \forall \vec{\gamma} \in \Gamma^*/L^*$.

Определение 4.1 Действие на абелевата група Γ^*/L^* върху решетката L

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} \equiv \exp\left(2\pi i(\Gamma^*/L^*)\right) &\Rightarrow \forall \vec{\gamma} \in \Gamma^*/L^* \Rightarrow g = e^{2\pi i\vec{\gamma}} \in \mathfrak{G}, \\ \forall \vec{\omega} \in L \quad g(\vec{\omega}) &:= e^{2\pi i(\vec{\gamma}|\vec{\omega})}\vec{\omega}. \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Така доказахме следното

Твърдение 4.5 Решетката Γ е инвариантната част на решетката L относно действието (4.4.3) на калибровъчната група \mathfrak{G}

$$\Gamma = \left\{ \vec{\omega} \in L \mid \mathfrak{G} \cdot \vec{\omega} = \vec{\omega} \right\} \equiv \text{Inv}_{\mathfrak{G}}(L). \quad (4.4.4)$$

Забележка 4.2 Действието (4.4.3) на калибровъчната група е добре дефинирано, когато (както за модела 331) $\Gamma^*/L^* \simeq \mathbb{Z}_2$, понеже $(\vec{\gamma}|\vec{\omega}) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \Rightarrow e^{2\pi i(\vec{\gamma}|\vec{\omega})} = \pm 1$, т.е. както $\vec{\omega} \in L$ така и $g(\vec{\omega}) \in L$. Когато обаче тази група е по-обща се налага да разширим решетката L понеже $e^{2\pi i(\vec{\gamma}|\vec{\omega})} \in \mathbb{C}$ и тогава $g(\vec{\omega}) \notin L$.

Тъй като Γ^*/L^* е крайна абелева група тя винаги е произведение от циклични групи, затова без ограничение на общността можем да смятаме, че най-общият вид на калибровъчната група е $\Gamma^*/L^* \simeq \mathbb{Z}_M$. Тогава трябва да разширим решетката L , така че да бъде затворена относно действието (4.4.3). За целта можем да разширим пръстена \mathbb{Z} на целите числа до факториалния пръстен

$$\widehat{\mathbb{Z}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \hat{n} = \sum_{i=0}^{M-1} n_i \zeta^i \mid n_i \in \mathbb{Z}, \zeta^M + 1 = 0 \right\}, \quad (4.4.5)$$

където ζ е решение на уравнението $\zeta^M + 1 = 0$. Тогава разширенията \widehat{L} на L и $\widehat{\Gamma}$ на Γ се дефинират съгласно

$$\begin{aligned} \widehat{L} &\stackrel{\text{def}}{=} \widehat{\mathbb{Z}}e^1 + \widehat{\mathbb{Z}}e^2 \supset L = \mathbb{Z}e^1 + \mathbb{Z}e^2, \\ \widehat{\Gamma} &\stackrel{\text{def}}{=} \widehat{\mathbb{Z}}q^1 + \widehat{\mathbb{Z}}q^2 \supset \Gamma = \mathbb{Z}q^1 + \mathbb{Z}q^2. \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Очевидно действието (4.5.3) вече не извежда извън \widehat{L} и разширението $\widehat{\Gamma}$ може да се разглежда като инвариантната част на \widehat{L} относно действието (4.4.3).

След като вече знаем как действа групата (4.4.3) върху решетката L можем да потърсим съответните им операторите действащи в хиралната алгебра $\mathcal{A}(L)$. За целта припомниме, че понеже $H_0^{\vec{\lambda}}$ комутира с всички оператори освен $U_{\vec{\omega}}$ (т.е. $e^{2\pi i H_0^{\vec{\lambda}}} U_{\vec{\omega}} e^{-2\pi i H_0^{\vec{\lambda}}} = e^{2\pi i(\vec{\lambda}|\vec{\omega})} U_{\vec{\omega}}$)

$$\begin{aligned} e^{2\pi i H_0^{\vec{\lambda}}} H_0^{\vec{\omega}} e^{-2\pi i H_0^{\vec{\lambda}}} &= H_0^{\vec{\omega}}, \\ e^{2\pi i H_0^{\vec{\lambda}}} Y(\vec{\omega}, z) e^{-2\pi i H_0^{\vec{\lambda}}} &= e^{2\pi i(\vec{\lambda}|\vec{\omega})} Y(\vec{\omega}, z). \end{aligned}$$

Следователно, представянето на групата (4.4.3) в хиралната алгебра $\mathcal{A}(L)$ се реализира чрез вътрешните автоморфизми:

Определение 4.2 Действие на калибровъчната група \mathfrak{G} върху хиралната алгебра $\mathcal{A}(L)$

$$\forall g = e^{2\pi i \vec{\gamma}} \in \mathfrak{G} \quad (\vec{\gamma} \in \Gamma^*/L^*) \Rightarrow \widehat{g} = e^{2\pi i H_0^{\vec{\gamma}}} \in \text{Aut}(\mathcal{A}(L)). \quad (4.4.7)$$

Наименованието "калибровъчна" група става съвсем оправдано, когато уточним действието на групата \mathfrak{G} върху хиралната алгебра

$$\begin{aligned} \widehat{g} H^i(z) \widehat{g}^{-1} &= H^i(z) \\ \widehat{g} Y(\vec{\omega}, z) \widehat{g}^{-1} &= e^{2\pi i(\vec{\gamma}|\vec{\omega})} Y(\vec{\omega}, z) \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

Следователно, хиралната алгебра $\mathcal{A}(\Gamma)$ се състои от всички калибровъчно инвариантни полета във алгебрата $\mathcal{A}(L)$ относно действието на калибровъчната група \mathfrak{G}

$$\mathcal{A}(\Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ A \in \mathcal{A}(L) \mid \widehat{g} A \widehat{g}^{-1} = A, \forall g = e^{2\pi i \vec{\gamma}} \in \mathfrak{G} \quad (\vec{\gamma} \in \Gamma^*/L^*) \right\} =: \text{Inv}_{\mathfrak{G}}(\mathcal{A}(L)). \quad (4.4.9)$$

Извод: 331 моделът е калибровъчна теория с крайна калибровъчна група.

Когато по-широката теория е рационална конформна теория тази конструкция е известна още като "орбифолд" [42, 43].

4.5 Намиране на калибровъчната група за 331 модела

Да намерим първо абелевата група Γ^*/L^* , която е множеството от класовете на еквивалентност относно релацията $\forall \alpha, \beta \in \Gamma^* \quad \alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \in L^*$. Записано в базиса $\{q_i^*\}$ на Γ^* и в базиса $\{e_i^*\}$ на L^* това изглежда така $\alpha - \beta = \vec{\gamma} = \gamma^i q_i^* = n^i e_i^*$, където базиса $\{e_i^*\}$ на L^* трябва да бъде изразен чрез $\{q_i^*\}$. За целта записваме (4.3.7) във вида $q^i = A^i_j e^j$, където $(A^i_j) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогава

$$e_i^* = (L^{-1})_{ij} e^j = (L^{-1} \cdot A^{-1} \cdot \Gamma)_i^j q_j^* = (A^T)_i^j q_j^* \Rightarrow \gamma^j = A^i_j n^j, \quad (4.5.1)$$

където използвахме съотношението $A \cdot L \cdot A^T = \Gamma$ между матриците на Грам за съответните решетки. Следователно $n^i = (A^{-1})^i_j \gamma^j$,

$$\begin{aligned} n^1 &= \frac{\gamma^1 + \gamma^2}{2} \in \mathbb{Z} \\ n^2 &= \frac{\gamma^2 - \gamma^1}{2} \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

От уравнение (4.5.2) е очевидно, че $n^1, n^2 \in \mathbb{Z}$ тогава и само тогава, когато $\gamma^1 = \gamma^2 \pmod{2}$. Така, получаваме следните два класа на еквивалентност

$$\begin{aligned} \Gamma^*/L^* &= \{0, 1\}, \quad \forall \vec{\gamma} \in \Gamma^* \Rightarrow \\ \vec{\gamma} \in 0 &\Leftrightarrow \gamma^1 - \gamma^2 = 0 \pmod{2} \\ \vec{\gamma} \in 1 &\Leftrightarrow \gamma^1 - \gamma^2 = 1 \pmod{2}. \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

Можем да изберем следните представители от двата класа: $0 \in 0$ и $q_2^* \in 0$ (представителя на 1 има компоненти $(\gamma^1, \gamma^2) = (0, 1)$ в базиса $\{q_i^*\}$). Така, калибровъчната група в явен вид се задава с $\mathfrak{G} = \{1, e^{2\pi i q_2^*}\}$. Да пресметнем действието на нетривиалния елемент, т.е. като използваме $q_2^* = \frac{1}{2}(e_1^* + e_2^*)$ да пресметнем

$$\forall \vec{\omega} = \omega_i e^i \in L \quad (q_2^* | \vec{\omega}) = \omega_i (q_2^* | e^i) = \omega_i \frac{1}{2}(e_1^* + e_2^* | e^i) = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \quad (4.5.4)$$

Това всъщност означава, че $e^{2\pi i (q_2^* | \vec{\omega})} = e^{i\pi(\omega_1 + \omega_2)} = 1$. Следователно, за да бъде елементът $\vec{\omega}$ на ортогоналната решетка L едновременно и елемент на подрешетката $\Gamma \subset L$ неговите компоненти $\omega_i \in \mathbb{Z}$ трябва да имат еднаква четност, т.е. появява се¹⁴

Правило на Четност

$$\omega_1 = \omega_2 \pmod{2}$$

(4.5.5)

Накрая да обобщим резултатите:

Калибровъчната група $\mathfrak{G} = \exp\left(2\pi i (\Gamma^*/L^*)\right) = \{1, e^{2\pi i q_2^*}\} \simeq \mathbb{Z}_2$ за 331 модела отделя решетката Γ като подрешетка на L по следния начин:

$$\begin{aligned} \Gamma = \text{Inv}_{\mathfrak{G}}(L) &= \left\{ \vec{\omega} \in L \mid \mathfrak{G} \cdot \vec{\omega} = \vec{\omega} \right\} = \left\{ \vec{\omega} \in L \mid e^{2\pi i (q_2^* | \vec{\omega})} = 1 \right\} \Rightarrow \\ \Gamma &= \left\{ \vec{\omega} = \omega_i e^i \in L \mid \omega_1 = \omega_2 \pmod{2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

4.6 Твистирани представяния на хиралните алгебри

Както видяхме в предишния раздел хиралната алгебра определяща модела 331 може да бъде разглеждана като инвариантната част на хиралната алгебра $\mathcal{A}(L)$ относно действието на крайната група (4.4.3).

Товагава всички представяния на $\mathcal{A}(L)$ ще бъдат представяния на $\mathcal{A}(\Gamma) = \mathcal{A}(331)$. В раздел § 3.8 видяхме, че неприводимите представяния на решетъчните рационални разширения на $\widehat{u}(1)^N$ алгебрата на токове се определят от условията за локалност: те се строят от тези представяния на $\widehat{u}(1)^N$ (зададени чрез външния автоморфизъм U_{λ}),

¹⁴това правило е формулирано първоначално в [41] под името "projection rule" понеже изхвърля от алгебрата на наблюдаемите полета, чиито заряди не удовлетворяват (4.5.5)

които са локални със хиралната алгебра, т.е. тези $\vec{\lambda}$ за които $\forall \vec{\omega} \in L (\vec{\omega}|\vec{\lambda}) \in \mathbb{Z}$, където L е зарядовата решетка "разширяваща" $\widehat{u(1)}^N$.

В случай обаче, че отделим хиралната алгебра като инвариантната част на една по-голяма алгебра относно действието на калибровъчната група G , тогава стесняването на хиралната алгебра увеличава броя на представянията, т.е. появяват се нови представяния, които не са истински представяния за по-широката алгебра, но са такива за калибровъчно-инвариантната и подлгебра. Тези представяния ОТНОВО се задават чрез външните автоморфизми $U_{\vec{\beta}}$ (за подходящи стойности на $\vec{\beta}$) тъй като $U_{\vec{\lambda}}$, $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^N$ са всички възможни представяния на $\widehat{u(1)}^N$ и представянията на рационалните разширения са преки суми от такива.

Така, твистрираните представяния $U_{\vec{\beta}}$ са нови представяния определени от $\vec{\beta} \in \mathbb{Z}_n \subset G$ където n е редът на цикличната група породена от елемента $\vec{\beta}$. Младшите вектори на твистрираните представяния се определят [43], [A] както следва

$$|\Lambda - \vec{\beta}\rangle \equiv U_{-\vec{\beta}}|\Lambda\rangle = U_{\Lambda - \vec{\beta}}|0\rangle \quad (4.6.1)$$

4.6.1 Токове и тензор на напреженията в твистрираните представяния

Съгласно у-ние (4.6.1), определящо младшите вектори, произволно поле $A \in \mathcal{A}$ от хиралната алгебра се представя по следния начин [A],[43]

$$\boxed{\pi_{\vec{\beta}}(A) = U_{\vec{\beta}} A U_{-\vec{\beta}}.} \quad (4.6.2)$$

Твърдение 4.6 *Твистрираните представяния на заредените полета, токовете и тензора на енергията и импулса са свързани с нетвистрираните съгласно [43]*

$$\pi_{\vec{\beta}}(Y(\vec{\omega}, z)) = z^{-(\vec{\omega}|\vec{\beta})} Y(\vec{\omega}, z) \quad (4.6.3)$$

$$\pi_{\vec{\beta}}(H^{\vec{\omega}}(z)) = H^{\vec{\omega}}(z) - \frac{(\vec{\omega}|\vec{\beta})}{z} \quad (4.6.4)$$

$$\pi_{\vec{\beta}}(T(z)) = T(z) - \frac{1}{z}(\vec{\beta}|H(z)) + \frac{1}{2z^2}(\vec{\beta}|\vec{\beta}). \quad (4.6.5)$$

Доказателство:

1. Използваме представянето (3.6.17) на вертексната експонента, тъждеството $B e^A B^{-1} = e^{BAB^{-1}}$ и комутационните съотношения на външния автоморфизъм $U_{\vec{\omega}}$ с модите H_n^i на тока (3.7.10)

$$\begin{aligned} \pi_{\vec{\beta}}(Y(\vec{\omega}, z)) &= U_{\vec{\beta}} U_{\vec{\omega}} e^{i\Phi_+(\vec{\omega}, z)} z^{H_0^{\vec{\omega}}} e^{i\Phi_-(\vec{\omega}, z)} U_{-\vec{\beta}} = U_{\vec{\omega}} e^{i\Phi_+(\vec{\omega}, z)} U_{\vec{\beta}} z^{H_0^{\vec{\omega}}} U_{-\vec{\beta}} e^{i\Phi_-(\vec{\omega}, z)} = \\ &= U_{\vec{\omega}} e^{i\Phi_+(\vec{\omega}, z)} z^{U_{\vec{\beta}} H_0^{\vec{\omega}} U_{-\vec{\beta}}} e^{i\Phi_-(\vec{\omega}, z)} = U_{\vec{\omega}} e^{i\Phi_+(\vec{\omega}, z)} z^{H_0^{\vec{\omega}} - (\vec{\omega}|\vec{\beta})} e^{i\Phi_-(\vec{\omega}, z)} = \\ &= z^{-(\vec{\omega}|\vec{\beta})} Y(\vec{\omega}, z) \end{aligned} \quad (4.6.6)$$

2. Разписваме твистирания ток $\pi_{\vec{\beta}}(H^{\vec{\omega}}(z))$ по моди:

$$\begin{aligned} \pi_{\vec{\beta}}(H^{\vec{\omega}}(z)) &= U_{\vec{\beta}} H^{\vec{\omega}}(z) U_{-\vec{\beta}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} U_{\vec{\beta}} H_n^{\vec{\omega}} U_{-\vec{\beta}} z^{-n-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (H_n^{\vec{\omega}} - (e^i | \vec{\beta}) \delta_{n,0}) z^{-n-1} = \\ &= H^{\vec{\omega}}(z) - \frac{(\vec{\omega} | \vec{\beta})}{z}. \end{aligned} \quad (4.6.7)$$

3) Тензора на напреженията представяме по формулата на Сугавара (3.7.8)

$$\begin{aligned} \pi_{\vec{\beta}}(T(z)) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N : \pi_{\vec{\beta}}(H^i(z)) (G_{ij}^{-1}) \pi_{\vec{\beta}}(H^j(z)) : = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N : H^i(z) (G_{ij}^{-1}) H^j(z) : - \frac{1}{z} \sum_{i,j=1}^N (\vec{\beta} | e^i) (G_{ij}^{-1}) H^j(z) + \frac{1}{2z^2} \sum_{i,j=1}^N (\vec{\beta} | e^i) (G_{ij}^{-1}) (e^j | \vec{\beta}) = \\ &= T(z) - \frac{1}{z} (\vec{\beta} | H(z)) + \frac{1}{2z^2} (\vec{\beta} | \vec{\beta}), \end{aligned} \quad (4.6.8)$$

където ($G = G_L$ е матрицата на Грам за ортогоналната решетка L) използвахме разложението на единицата $\sum_{i=1}^N |e^i\rangle \langle e_i^*| = 1 = \sum_{i=1}^N |e_i^*\rangle \langle e^i|$ и означението $|H(z)\rangle = H^i(z) |e_i^*\rangle$.

■

В частност, за модите на токовете и тензора на напреженията получаваме [43]

$$\begin{aligned} \pi_{\vec{\beta}}(H_n^{\vec{\omega}}) &= H_n^{\vec{\omega}} - (\vec{\omega} | \vec{\beta}) \delta_{n,0} \\ \pi_{\vec{\beta}}(L_n) &= L_n - (\vec{\beta} | H_n) + \frac{1}{2} (\vec{\beta} | \vec{\beta}) \delta_{n,0}. \end{aligned} \quad (4.6.9)$$

Сега можем да кажем какво означава "твистиранни" представяния: да разгледаме действието на оператора на "унивалентност" $\exp(2\pi i L_0)$, където L_0 е нулевият мод на тензора на енергията $T(z)$, върху твистираните вертексни експоненти

$$\begin{aligned} e^{2\pi i L_0} \pi_{\vec{\beta}}(Y(\vec{\omega}, z)) e^{-2\pi i L_0} &= e^{2\pi i L_0} U_{\vec{\beta}} Y(\vec{\omega}, z) U_{-\vec{\beta}} e^{-2\pi i L_0} = \\ &= e^{2\pi i L_0} U_{\vec{\beta}} e^{-2\pi i L_0} e^{2\pi i L_0} Y(\vec{\omega}, z) e^{-2\pi i L_0} e^{2\pi i L_0} U_{-\vec{\beta}} e^{-2\pi i L_0} = \\ &= e^{2\pi i L_0} U_{\vec{\beta}} e^{-2\pi i L_0} Y(\vec{\omega}, z) e^{2\pi i L_0} U_{-\vec{\beta}} e^{-2\pi i L_0}, \end{aligned} \quad (4.6.10)$$

където използвахме периодичността на вертексната експонента $Y(\vec{\omega}, z)$ относно действието на нетвистирания генератор на въртене L_0 , т.е. $e^{2\pi i L_0} Y(\vec{\omega}, z) e^{-2\pi i L_0} = Y(\vec{\omega}, z)$. От друга страна ще използваме, че

$$\begin{aligned} e^{2\pi i H_0^{\vec{\omega}}} U_{\vec{\lambda}} &= U_{\vec{\lambda}} e^{2\pi i (H_0^{\vec{\omega}} + (\vec{\omega} | \vec{\lambda}))} \\ e^{2\pi i L_0} U_{\vec{\lambda}} &= U_{\vec{\lambda}} e^{2\pi i (L_0 + H_0^{\vec{\lambda}} + \frac{1}{2} (\vec{\lambda} | \vec{\lambda}))} \end{aligned} \quad (4.6.11)$$

(горните две равенства следват от комутационните съотношения на $U_{\vec{\lambda}}$ със L_0 , $H_0^{\vec{\omega}}$ и тъждеството $U^{-1} e^A U = e^{U^{-1} A U}$). Така получаваме

$$e^{2\pi i L_0} \pi_{\vec{\beta}}(Y(\vec{\omega}, z)) e^{-2\pi i L_0} =$$

4.7 Приводимост на твистираните модули. Проектиране върху неприводимите представяния

$$\begin{aligned}
&= U_{\vec{\beta}} e^{2\pi i \{(\vec{\beta}|H_0) + \frac{1}{2}(\vec{\beta}|\vec{\beta})\}} Y(\vec{\omega}, z) U_{-\vec{\beta}} e^{2\pi i \{(-\vec{\beta}|H_0) + \frac{1}{2}(\vec{\beta}|\vec{\beta})\}} = \\
&= U_{\vec{\beta}} e^{2\pi i \{(\vec{\beta}|H_0) + \frac{1}{2}(\vec{\beta}|\vec{\beta})\}} Y(\vec{\omega}, z) e^{2\pi i \{(-\vec{\beta}|H_0) + \frac{1}{2}(\vec{\beta}|\vec{\beta}) - (-\vec{\beta}|-\vec{\beta})\}} U_{-\vec{\beta}} = \\
&= U_{\vec{\beta}} e^{2\pi i (\vec{\beta}|H_0)} Y(\vec{\omega}, z) e^{2\pi i (-\vec{\beta}|H_0)} U_{-\vec{\beta}} = U_{\vec{\beta}} e^{2\pi i (\vec{\omega}|\vec{\beta})} Y(\vec{\omega}, z) U_{-\vec{\beta}} = \\
&= e^{2\pi i (\vec{\omega}|\vec{\beta})} \pi_{\vec{\beta}}(Y(\vec{\omega}, z)). \tag{4.6.12}
\end{aligned}$$

За получаване на последното равенство използвахме, че $e^{2\pi i (\vec{\beta}|H_0)}$ комутира със нормалната експонента във $Y(\vec{\omega}, z) = U_{\vec{\omega}} : e^{i\Phi(\vec{\omega}, z)} :$, а комутацията с $U_{\vec{\omega}}$ се определя от (4.6.11).

Този резултат показва, че когато $(\vec{\omega}|\vec{\beta}) \notin \mathbb{Z}$ полето $\pi_{\vec{\beta}}(Y(\vec{\omega}, z))$ престава да бъде еднозначна функция на z относно нетвистирания генератор L_0 на въртене около началото ($z = 0$). От тук идва и терминът "твистирано" (twisted), т.е. усукано представяне. Нещо повече – в този случай (т.е. когато $\vec{\omega} \in L$, $\vec{\beta} \notin L^*$) твистираните вертексни експоненти $\pi_{\vec{\beta}}(Y(\vec{\omega}, z))$ вече не са локални със полетата $Y(\vec{\omega}, z)$ от разширената хирална алгебра на рационалната конформна теория. Оказва се обаче, че относно твистирания генератор $\pi_{\vec{\beta}}(L_0) = L_0 - H_0^{\vec{\beta}} + \frac{1}{2}(\vec{\beta}|\vec{\beta})$ полето $\pi_{\vec{\beta}}(Y(\vec{\omega}, z))$ остава еднозначно, т.е. нетвистирано, при това със същата размерност $\Delta = \frac{1}{2}(\vec{\omega}|\vec{\omega})$, относно $\pi_{\vec{\beta}}(T(z))$, но Лорановото му развитие вече не е по цели степени на z и съответно Лорановите моди ще бъдат отместени със $(\vec{\omega}|\vec{\beta})$. С други думи това е едно **ново** нееквивалентно допустимо представяне на хиралната алгебра. Всъщност $\vec{\beta}$ трябва да бъде елемент на крайна подгрупа на групата на вътрешните автоморфизми на алгебрата на токове [43].

4.7 Приводимост на твистираните модули. Проектиране върху неприводимите представяния

Както вече видяхме, всички представяния на изходната хирална алгебра \mathcal{A} са представяния и на инвариантната и подалгебра $\mathcal{A}^{\mathfrak{G}}$. Освен това обаче, поради стесняването на алгебрата се появиха нови представяния (твистиранни) на $\mathcal{A}^{\mathfrak{G}}$, които не са допустими представяния на \mathcal{A} . Тези представяния $\pi_{\vec{\beta}}$ се задават чрез външния автоморфизъм $U_{-\vec{\beta}}$ на алгебрата на токове $\widehat{u(1)^N}$, т.е. $\forall A \in \mathcal{A}^{\mathfrak{G}} : \pi_{\vec{\beta}}(A) = U_{-\vec{\beta}} A U_{-\vec{\beta}}$.

Трябва да отбележим, че елементите $\vec{\beta}$ задаващи твиста принадлежат на крайна група задаваща калибровъчни преобразувания от първи род. Следвайки [43] ние разглеждаме само такива калибровъчни групи, които се реализират чрез вътрешни автоморфизми на алгебрата на токове. В нашия случай всички вътрешни автоморфизми на изходната хирална алгебра са от вида

$$\exp\left(\oint \frac{dz}{2\pi i} a_i H^i(z)\right), \exp\left(\oint \frac{dz}{2\pi i} z^{\frac{1}{2}(\vec{\omega}|\vec{\omega})} Y(\vec{\omega}, z)\right), \vec{\omega} \in L. \tag{4.7.1}$$

Разглеждайки твистираното представяне $\pi_{\vec{\beta}}$ на $\mathcal{A}^{\mathfrak{G}}$ ще предпологаме, че автоморфизмът който го представя действа диагонално, т.е. избираме картановата подалгебра

така, че да съдържа тока $H_0^{\vec{\beta}} = (\vec{\beta}|H_0) = \vec{\beta}^i (G_{\Gamma}^{-1})_{ij} H_0^j$

$$\forall b = e^{2\pi i \vec{\beta}} \in \mathfrak{G} \quad \hat{b} = e^{2\pi i H_0^{\vec{\beta}}}. \quad (4.7.2)$$

Тогава всички елементи $g = e^{2\pi i \vec{\alpha}}$, които комутират с $\vec{\beta}$ могат да бъдат диагонални едновременно със $\vec{\beta}$, т.е. могат да бъдат представени в една и съща картанова подалгебра. Така се появява понятието **централизатор** на елемента $\vec{\beta}$ [43].

Определение 4.3 Множеството $\mathfrak{G}_{\vec{\beta}} = \{g \in \mathfrak{G} \mid g^{-1} \vec{\beta} g = \vec{\beta}\}$ се нарича централизатор на елемента $\vec{\beta} \in \mathfrak{G}$.

Лесно се проверява, че централизаторът на всеки елемент от групата \mathfrak{G} е нейна подгрупа. Наистина, ако $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}_{\vec{\beta}}$ т.е. $g_1^{-1} \vec{\beta} g_1 = \vec{\beta}$, $g_2^{-1} \vec{\beta} g_2 = \vec{\beta}$ тогава

1. централизаторът $\mathfrak{G}_{\vec{\beta}} \subset \mathfrak{G}$ е затворен относно груповото умножение

$$(g_1 \cdot g_2)^{-1} \vec{\beta} (g_1 \cdot g_2) = g_2^{-1} \cdot g_1^{-1} \vec{\beta} g_1 \cdot g_2 = g_2^{-1} \vec{\beta} g_2 = \vec{\beta}$$

2. единичният елемент на групата $1 \in \mathfrak{G}$ ще бъде единичен елемент и на $\mathfrak{G}_{\vec{\beta}}$.
3. за всяко $g \in \mathfrak{G}_{\vec{\beta}} \Rightarrow g^{-1} \in \mathfrak{G}_{\vec{\beta}}$. Наистина,

$$\vec{\beta} = 1^{-1} \vec{\beta} 1 = (g \cdot g^{-1})^{-1} \vec{\beta} (g \cdot g^{-1}) = (g^{-1})^{-1} g^{-1} \vec{\beta} g \cdot g^{-1} = (g^{-1})^{-1} \vec{\beta} g^{-1}.$$

Следователно, $\mathfrak{G}_{\vec{\beta}} \subset \mathfrak{G}$ е наистина подгрупа.

Забележка 4.3 Въпреки, че всички елементи на централизатора $\mathfrak{G}_{\vec{\beta}}$ комутират с $\vec{\beta}$ тази подгрупа може и да не бъде абелева, когато калибровъчната група е поначало неабелева.

Съществуването на нетривиален централизатор на даден елемент $\vec{\beta}$ води до неизбежна приводимост на твистираното представяне $\pi_{\vec{\beta}}$.

Твърдение 4.7 Представянето $\pi_{\vec{\beta}}$ на калибровъчно инвариантната хирална алгебра $\mathcal{A}^{\mathfrak{G}}$ е сигурно приводимо, когато централизаторът $\mathfrak{G}_{\vec{\beta}}$ на твистиращия елемент $\vec{\beta} \in \mathfrak{G}$ съдържа нетривиални елементи [43].

Доказателство:

Нека $A \in \mathcal{A}^{\mathfrak{G}}$ е произволен елемент от калибровъчно инвариантната хирална алгебра зададен в някое неприводимо представяне на пълната хирална алгебра \mathcal{A} . Както вече споменахме твистираното представяне на оператора A се дефинира съгласно уравнение (4.6.2), а елементите на централизатора $\mathfrak{G}_{\vec{\beta}}$ се реализират посредством нулевите моди на картановите токове, т.е.

$$\forall g = e^{2\pi i \vec{\alpha}} \in \mathfrak{G}_{\vec{\beta}} \subset \mathfrak{G} \Rightarrow \hat{g} = e^{2\pi i H_0^{\vec{\alpha}}}.$$

4.7 Приводимост на твистираните модули. Проектиране върху неприводимите представяния

Тогава \hat{g} комутира с всички оператори $\pi_{\vec{\beta}}(A)$ в твистираното представяне на $\mathcal{A}^{\mathfrak{G}}$. Наистина,

$$\begin{aligned} e^{2\pi i H_0^{\vec{\alpha}}} \pi_{\vec{\beta}}(A) e^{-2\pi i H_0^{\vec{\alpha}}} &= \underbrace{e^{2\pi i H_0^{\vec{\alpha}}} U_{\vec{\beta}}}_{U_{\vec{\beta}}} A \underbrace{U_{-\vec{\beta}} e^{-2\pi i H_0^{\vec{\alpha}}}}_{U_{-\vec{\beta}}} = \\ &= U_{\vec{\beta}} e^{2\pi i \{H_0^{\vec{\alpha}} + (\vec{\alpha}|\vec{\beta})\}} A e^{-2\pi i \{H_0^{\vec{\alpha}} - (\vec{\alpha}|\vec{\beta})\}} U_{-\vec{\beta}} = U_{\vec{\beta}} e^{2\pi i H_0^{\vec{\alpha}}} A e^{-2\pi i H_0^{\vec{\alpha}}} U_{-\vec{\beta}}. \end{aligned} \quad (4.7.3)$$

Но по условие оператора $A \in \mathcal{A}^{\mathfrak{G}}$ е елемент на калибровъчно инвариантната хирална алгебра и следователно за всеки елемент $g \in \mathfrak{G}$ е изпълнено $gAg^{-1} = A$. Следователно това ще бъде вярно и за $g = e^{2\pi i H_0^{\vec{\alpha}}} \in \mathfrak{G}_{\vec{\beta}}$. Така получаваме

$$\begin{aligned} e^{2\pi i H_0^{\vec{\alpha}}} \pi_{\vec{\beta}}(A) e^{-2\pi i H_0^{\vec{\alpha}}} &= U_{\vec{\beta}} A U_{-\vec{\beta}} = \pi_{\vec{\beta}}(A) \implies \\ e^{2\pi i H_0^{\vec{\alpha}}} \pi_{\vec{\beta}}(A) &= \pi_{\vec{\beta}}(A) e^{2\pi i H_0^{\vec{\alpha}}}. \end{aligned} \quad (4.7.4)$$

Това означава, че оператора $\hat{g} = e^{2\pi i H_0^{\vec{\alpha}}}$, $\vec{\alpha} \in \mathfrak{G}_{\vec{\beta}}$ комутира с всички оператори в представянето $\pi_{\vec{\beta}}$ и съгласно лемата на Шур, в едно неприводимо представяне, трябва да бъде кратен на единичния. Тук $e^{2\pi i H_0^{\vec{\alpha}}}$ е диагонален оператор, но не е кратен на единичния (ако централизатора $\mathfrak{G}_{\vec{\beta}}$ е нетривиален). Тогава, представянето $\pi_{\vec{\beta}}$ е приводимо.

■

Да означим с $\mathcal{H}_{\lambda}^{\vec{\beta}} = \mathcal{A}_{+}^{\mathfrak{G}} |\vec{\lambda} - \vec{\beta}\rangle$ пространството на твистираното представяне на $\mathcal{A}^{\mathfrak{G}}$ получено от представянето $\mathcal{H}_{\lambda} = \mathcal{A}_{+} |\vec{\lambda}\rangle$ на пълната хирална алгебра. Тъй като върху модула $\mathcal{H}_{\lambda}^{\vec{\beta}}$ елементите на централизатора на $\vec{\beta}$ комутират с всички оператори в същия модул ще се реализира представяне на групата $\mathfrak{G}_{\vec{\beta}}$. Но последната е крайна група и следователно има краен брой неприводими представяния докато $\mathcal{H}_{\lambda}^{\vec{\beta}}$ е безкрайно мерено пространство. Затова представянето на $\mathfrak{G}_{\vec{\beta}}$ в модула $\mathcal{H}_{\lambda}^{\vec{\beta}}$ ще бъде приводимо

$$\mathcal{H}_{\lambda}^{\vec{\beta}} = \bigoplus_i \mathcal{H}_{\lambda}^{\vec{\beta}, \sigma_i}, \quad \sigma_i \in \hat{\mathfrak{G}}_{\vec{\beta}}, \quad (4.7.5)$$

където с $\hat{\mathfrak{G}}_{\vec{\beta}}$ сме означили множеството (което също се оказва група) от нееквивалентните неприводими представяния на групата $\mathfrak{G}_{\vec{\beta}}$. Тъй като в безкрайната сума (4.7.5) има само краен брой нееквивалентни неприводими представяния $\sigma \in \hat{\mathfrak{G}}_{\vec{\beta}}$ можем да отделим в отделни суми всички еквивалентни помежду си представяния, т.е.

$$\mathcal{H}_{\lambda}^{\vec{\beta}} = \bigoplus_{\sigma \in \hat{\mathfrak{G}}_{\vec{\beta}}} \left(\bigoplus_{\sigma_i \simeq \sigma} \mathcal{H}_{\lambda}^{\vec{\beta}, \sigma_i} \right) = \bigoplus_{\sigma \in \hat{\mathfrak{G}}_{\vec{\beta}}} \mathcal{H}_{\lambda, \sigma}^{\vec{\beta}}, \quad (4.7.6)$$

където $\mathcal{H}_{\lambda, \sigma}^{\vec{\beta}} = \bigoplus_{\sigma_i \simeq \sigma} \mathcal{H}_{\lambda}^{\vec{\beta}, \sigma_i}$ е безкрайномерно представяне на $\mathfrak{G}_{\vec{\beta}}$ построено като безкрайна пряка сума от едни и също неприводимо представяне $\sigma \in \hat{\mathfrak{G}}_{\vec{\beta}}$ и се нарича *изотипично*

представяне [43]. Сега можем да разберем приводимостта на $\mathcal{H}_\lambda^{\vec{\beta}}$ по следния начин: операторът $\hat{g} = e^{2\pi i H_0^{\vec{\alpha}}}$ трябва да бъде кратен на единичния във всяко неприводимо представяне $\mathcal{H}_\lambda^{\vec{\beta}\sigma_i}$ на $\mathfrak{G}_{\vec{\beta}}$. Тогава във $\mathcal{H}_\lambda^{\vec{\beta}}$ той ще има блочно-диагонален вид където различните блокове ще бъдат кратни на единичния оператор, но с **различни** коефициенти на пропорционалност. Следователно, в пространството $\mathcal{H}_\lambda^{\vec{\beta}}$ такъв оператор не е кратен на единичния. От друга страна, ако разгледаме изотипичното представяне $\mathcal{H}_{\lambda,\sigma}^{\vec{\beta}}$, операторите $\hat{g} = e^{2\pi i H_0^{\vec{\alpha}}}$ ще имат отново блочно-диагонален вид, но този път всички фактори на пропорционалност в отделните блокове ще бъдат **едни и същи** тъй като всеки блок отговаря на едно и също представяне. Следователно, всички оператори \hat{g} , $g \in \mathfrak{G}_{\vec{\beta}}$ (а това са всички оператори комутиращи с цялото представяне на $\mathcal{A}^{\mathfrak{G}}$) ще бъдат кратни на единичния и тогава (отново съгласно лемата на Шур) представянето $\mathcal{H}_{\lambda,\sigma}^{\vec{\beta}}$ е **неприводимо**.

Извод: Можем да отделим неприводимите компоненти на твистираното представяне $\mathcal{H}_\lambda^{\vec{\beta}}$ като проектираме върху изотипичните компоненти $\mathcal{H}_{\lambda,\sigma}^{\vec{\beta}}$ на представянето относно неприводимите представяния σ на централизатора $\mathfrak{G}_{\vec{\beta}}$ на твистиращия елемент.

Следващото твърдение показва експлицитно как се строи проекторът върху изотипичното представяне (срв. у-ние (4.3) в [43]).

Твърдение 4.8 *Нека $\mathfrak{G}_{\vec{\beta}}$ е централизатора на твистиращия елемент и нека $\sigma(g)$ е характера на неприводимото представяне V_σ на $\mathfrak{G}_{\vec{\beta}}$. Тогава проекторът върху изотипичното представяне на $\mathfrak{G}_{\vec{\beta}}$ се дефинира чрез*

$$P_\sigma = \frac{\sigma(1)}{|\mathfrak{G}_{\vec{\beta}}|} \sum_{g \in \mathfrak{G}_{\vec{\beta}}} \sigma^*(g) \hat{g} \tag{4.7.7}$$

Доказателство:

1. $P_\sigma^* = P_\sigma$ Наистина,

$$P_\sigma^* = \frac{\sigma^*(1)}{|\mathfrak{G}_{\vec{\beta}}|} \sum_{g \in \mathfrak{G}_{\vec{\beta}}} \sigma(g) \hat{g}^*.$$

Но $\sigma(1) = \dim V_\sigma = \sigma^*(1)$; от друга страна, представянията на крайните групи са винаги еквивалентни на унитарни [38, 37], следователно $g^* = g^{-1}$ и $\sigma(g^{-1}) = \text{tr}_{V_\sigma} g^* = (\text{tr}_{V_\sigma} g)^* = \sigma^*(g)$. Означаваме $g^{-1} = h$ и

$$P_\sigma^* = \frac{\sigma(1)}{|\mathfrak{G}_{\vec{\beta}}|} \sum_{h^{-1} \in \mathfrak{G}_{\vec{\beta}}} \sigma^*(h) h = \frac{\sigma(1)}{|\mathfrak{G}_{\vec{\beta}}|} \sum_{h \in \mathfrak{G}_{\vec{\beta}}} \sigma^*(h) h = P_\sigma,$$

където използвахме, че когато h^{-1} пробягва $\mathfrak{G}_{\vec{\beta}}$ то h също пробягва $\mathfrak{G}_{\vec{\beta}}$.

2. $P_\sigma^2 = P_\sigma$

$$P_\sigma^2 = \frac{\sigma^2(1)}{|\mathfrak{G}_\beta|^2} \sum_{g \in \mathfrak{G}_\beta} \sum_{h \in \mathfrak{G}_\beta} \sigma^*(g)\sigma^*(h)gh.$$

Полагаме $gh = f \Rightarrow \sigma^*(h) = \sigma(h^{-1}) = \sigma(f^{-1}g)$ и използваме ортогоналността на неприводимите характери

$$\frac{1}{|\mathfrak{G}_\beta|} \sum_{g \in \mathfrak{G}_\beta} \sigma^*(g)\sigma'(hg) = \frac{\sigma(h)}{\sigma(1)}\delta_{\sigma\sigma'} \quad (4.7.8)$$

за да преобразуваме P_σ^2

$$P_\sigma^2 = \frac{\sigma^2(1)}{|\mathfrak{G}_\beta|^2} \sum_{g \in \mathfrak{G}_\beta} \sum_{f \in \mathfrak{G}_\beta} \sigma^*(g)\sigma(f^{-1}g)f = \frac{\sigma(1)}{|\mathfrak{G}_\beta|} \sum_{f \in \mathfrak{G}_\beta} \sigma(f^{-1})f = P_\sigma.$$

Следователно P_σ наистина е проектор.

Забележка 4.4 Формулата (4.7.8) за ортогоналност на неприводимите характери следва от по-общата ортогоналност на матричните елементи на неприводимите представяния [38, 37]

$$\frac{1}{|\mathfrak{G}|} \sum_{g \in \mathfrak{G}} D_{\mu\nu}^{(i)}D_{\rho\lambda}^{(j)} = \frac{1}{\dim D^{(i)}}\delta_{ij}\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho}. \quad (4.7.9)$$

Наистина, като умножим двете страни на $D_{\lambda\bar{\alpha}}^{(j)}(g')$, сумираме по λ , заместим $\dim D^{(i)} = \sigma_i(1)$ и вземем следа от двете страни (отчитайки $\sigma_i(g) = \text{tr}_{V_\sigma} D^{(i)}(g)$) получаваме точно (4.7.8).

3. За да видим върху какво проектира P_σ ще го приложим върху произволен елемент $g \in \mathfrak{G}_\beta$ и ще пресметнем характера на получените елементи. Всеки характер на представяне на \mathfrak{G}_β може да бъде представен

$$\chi(g) = \sum_{j=1}^r n_j \sigma_j(g), \quad (4.7.10)$$

където $\sigma_j(g)$ са характерите на неприводимите представяния, а n_j - кратностите с които се срещат представянията $\sigma_j(g)$ в $\chi(g)$. Очевидно, поради ортогоналността на характерите, това число може да бъде пресметнато ако познаваме самия характер $\chi(g)$ по следния начин

$$n_i = \frac{1}{|\mathfrak{G}_\beta|} \sum_{g \in \mathfrak{G}_\beta} \sigma_i^*(g)\chi(g). \quad (4.7.11)$$

Да пресметнем характера на проектираните елементи в представянето (4.7.10)

$$\chi(P_{\sigma_i}(g)) = \sum_{j=1}^r n_j \frac{\sigma_i(1)}{|\mathfrak{G}_\beta|} \sum_{h \in \mathfrak{G}_\beta} \sigma_i^*(h)\sigma_j(hg) = \sum_{j=1}^r n_j \sigma_i(1) \frac{\sigma_j(g)}{\sigma_i(1)} \delta_{\sigma_i, \sigma_j} = n_i \sigma_i(g).$$

Сега вече е очевидно, че след прилагането на проектора (4.7.7) характера (4.7.10) съдържа само неприводимите характерите еквивалентни на σ_i . Следователно (4.7.7) е проектор върху изотипичното представяне σ_i на \mathfrak{G}_β . ■

4.8 Неприводими представяния на калибровъчно-инвариантната алгебра и техните характери

Както видяхме в предишния параграф твистираните модули $\mathcal{H}_{\lambda}^{\vec{\beta}}$ на калибровъчно инвариантната подалгебра $\mathcal{A}(L)^{\mathfrak{G}}$ са приводими. За да отделим неприводимите им компоненти използваме проекторите (4.7.7) върху изотипичните представяния на централизаторите $\mathfrak{G}_{\vec{\beta}}$ на съответните твистиращи елементи $\vec{\beta}$, т.е.

$$\mathcal{H}_{\lambda, \sigma}^{\vec{\beta}} \stackrel{\text{def}}{=} P_{\sigma} \mathcal{H}_{\lambda}^{\vec{\beta}} = P_{\sigma} U_{-\vec{\beta}} \mathcal{H}_{\lambda}^{\vec{\beta}}. \tag{4.8.1}$$

Забележка 4.5 Тъй като $U_{-\vec{\beta}}$ комутира със J_{-n} , $n > 0$ сме записали твистиранния модул

$$\mathcal{H}_{\lambda}^{\vec{\beta}} = \mathcal{A}_{+}^{\mathfrak{G}} |\vec{\lambda} - \vec{\beta}\rangle = A_{+}^{\mathfrak{G}} U_{-\vec{\beta}} |\vec{\lambda}\rangle = U_{-\vec{\beta}} A_{+}^{\mathfrak{G}} |\vec{\lambda}\rangle = U_{-\vec{\beta}} \mathcal{H}_{\lambda}^{\vec{\beta}}.$$

Характерите на неприводимите представяния на $\mathcal{A}(L)^{\mathfrak{G}}$ ще получим като пресметнем следата на "статистическия" оператор $q^{L_0 - \frac{c}{24}} e^{2\pi i \zeta H_0^Q}$ в неприводимия модул $\mathcal{H}_{\lambda, \sigma}^{\vec{\beta}}$, където $q = e^{2\pi i \tau}$, $\text{Im } \tau > 0$ е пропорционално на обратната температура а ζ на химичния потенциал:

$$\chi_{\lambda, \sigma}^{\vec{\beta}}(\tau, \zeta) = \text{tr}_{\mathcal{H}_{\lambda, \sigma}^{\vec{\beta}}} \left(q^{L_0 - \frac{c}{24}} e^{2\pi i \zeta H_0^Q} \right). \tag{4.8.2}$$

Следващото твърдение показва как могат да бъдат построени тези характери като знаем характерите на изходната хирална алгебра и характерите на калибровъчната група (срв. Proposition 3.2 в [A]).

Твърдение 4.9 Характерите на неприводимите представяния $\mathcal{H}_{\lambda, \sigma}^{\vec{\beta}}$ на калибровъчно инвариантната подалгебра $\mathcal{A}(L)^{\mathfrak{G}} \subset \mathcal{A}(L)$ относно действието на калибровъчната група \mathfrak{G} се пресмятат по следната формула [A]:

$$\chi_{\lambda, \sigma}^{\vec{\beta}}(\tau, \zeta) = q^{\frac{(\vec{\beta}|\vec{\beta})}{2}} e^{-2\pi i \zeta(Q|\vec{\beta})} \frac{\sigma(1)}{|\mathfrak{G}_{\vec{\beta}}|} \sum_{g=e^{2\pi i \vec{\alpha}} \in \mathfrak{G}_{\vec{\beta}}} \sigma^*(g) \chi_{\lambda}^{\vec{\beta}}(\tau, \zeta_Q + \vec{\alpha} - \vec{\beta}\tau). \tag{4.8.3}$$

Доказателство:

1. Ще покажем, че ако проектора $P = P^* = P^2$ действа в пространството \mathcal{V} следите върху него и неговото подпространство $P\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ са свързани по следния начин:

$$\text{tr}_{P\mathcal{V}}(A) = \text{tr}_{\mathcal{V}}(P^*AP)$$

Наистина, тъй като $P = P^*$ е ермитов оператор в пространството \mathcal{V} съществува базис $\{|e_a\rangle\}$ собствен за P , т.е. $P|e_a\rangle = p_a|e_a\rangle$. Условието $P^2 = P$ води до $(p_a)^2 = p_a$, $\Rightarrow p_a = 0, 1$.
Тогаво базисът от собствени вектори на P може да бъде разложен

$$\{|e_a\rangle\} = \left\{ |e_i\rangle \mid P|e_i\rangle = |e_i\rangle \right\} \cup \left\{ |e_\alpha\rangle \mid P|e_\alpha\rangle = 0 \right\}$$

Следователно

$$\begin{aligned} \text{tr}_{\mathcal{V}}(P^*AP) &= \sum_a \langle e_a | P^*AP | e_a \rangle = \sum_i \underbrace{\langle e_i | P^*AP | e_i \rangle}_{\langle e_i |} + \sum_{\tilde{\alpha}} \underbrace{\langle e_{\tilde{\alpha}} | P^*AP | e_{\tilde{\alpha}} \rangle}_0 = \sum_i \langle e_i | A | e_i \rangle = \\ &= \text{tr}_{P\mathcal{V}}(A), \end{aligned} \tag{4.8.4}$$

където използвахме, че $\{|e_i\rangle\}$ образува базис на подпространството $P\mathcal{V}$.

2. Благодарение на цикличността на следата и свойствата на проектора получаваме

$$\text{tr}_{\mathcal{V}}(P^*AP) = \text{tr}_{\mathcal{V}}(APP^*) = \text{tr}_{\mathcal{V}}(AP^2) = \text{tr}_{\mathcal{V}}(AP).$$

3. От друга страна да използваме инвариантността на следата относно действието на унитарния оператор $U_{-\vec{\beta}}$,

$$\text{tr}_{(U_{-\vec{\beta}}\mathcal{V})}(A) = \text{tr}_{\mathcal{V}}(U_{-\vec{\beta}}^*AU_{-\vec{\beta}}) = \text{tr}_{\mathcal{V}}(\underbrace{AU_{-\vec{\beta}}U_{-\vec{\beta}}^*}_1) = \text{tr}_{\mathcal{V}}(A).$$

за да запишем характера

$$\begin{aligned} \chi_{\lambda\sigma}^{\vec{\beta}}(\tau, \zeta) &= \text{tr}_{P_\sigma U_{-\vec{\beta}} \mathcal{H}_\lambda} \left(q^{\pi_{\vec{\beta}}(L_0 - \frac{c}{24})} e^{2\pi i \zeta \pi_{\vec{\beta}}(H_0^Q)} \right) = \text{tr}_{\mathcal{H}_\lambda} \left((P_\sigma U_{-\vec{\beta}})^* q^{\pi_{\vec{\beta}}(L_0 - \frac{c}{24})} e^{2\pi i \zeta \pi_{\vec{\beta}}(H_0^Q)} P_\sigma U_{-\vec{\beta}} \right) = \\ &= \text{tr}_{\mathcal{H}_\lambda} \left(U_{-\vec{\beta}}^* P_\sigma^* q^{\pi_{\vec{\beta}}(L_0 - \frac{c}{24})} e^{2\pi i \zeta \pi_{\vec{\beta}}(H_0^Q)} P_\sigma U_{-\vec{\beta}} \right) = \text{tr}_{\mathcal{H}_\lambda} \left(q^{\pi_{\vec{\beta}}(L_0 - \frac{c}{24})} e^{2\pi i \zeta \pi_{\vec{\beta}}(H_0^Q)} \underbrace{P_\sigma U_{-\vec{\beta}} U_{-\vec{\beta}}^* P_\sigma^*}_{P_\sigma} \right) = \\ &= \text{tr}_{\mathcal{H}_\lambda} \left(q^{\pi_{\vec{\beta}}(L_0 - \frac{c}{24})} e^{2\pi i \zeta \pi_{\vec{\beta}}(H_0^Q)} P_\sigma \right), \end{aligned} \tag{4.8.5}$$

където използвахме, че $U_{-\vec{\beta}}U_{-\vec{\beta}}^* = 1$ и $P_\sigma P_\sigma^* = P_\sigma^2 = P_\sigma$. Припомняме, че $\pi_{\vec{\beta}}(L_0) = U_{-\vec{\beta}}^*L_0U_{-\vec{\beta}} = L_0 - H_0^{\vec{\beta}} + \frac{1}{2}(\vec{\beta}|\vec{\beta})$ и $\pi_{\vec{\beta}}(H_0^Q) = U_{-\vec{\beta}}^*H_0^QU_{-\vec{\beta}} = H_0^Q - (Q|\vec{\beta})$ са съответно твистираните представяния на нулевите моди на тензора на напреженията и електрическия ток. По-нататък, използвайки явния вид на оператора $\hat{g} = e^{2\pi i H_0^{\vec{\alpha}}}$, участващ в проектора (4.7.7), получаваме

$$\begin{aligned} \chi_{\lambda\sigma}^{\vec{\beta}}(\tau, \zeta) &= \text{tr}_{\mathcal{H}_\lambda} \left(q^{L_0 - H_0^{\vec{\beta}} + \frac{1}{2}(\vec{\beta}|\vec{\beta}) - \frac{c}{24}} e^{2\pi i \zeta (H_0^Q - (Q|\vec{\beta}))} P_\sigma \right) = \\ &= \text{tr}_{\mathcal{H}_\lambda} \left(q^{L_0 - H_0^{\vec{\beta}} + \frac{1}{2}(\vec{\beta}|\vec{\beta}) - \frac{c}{24}} e^{2\pi i \zeta (H_0^Q - (Q|\vec{\beta}))} \frac{\sigma(1)}{|\mathfrak{G}_{\vec{\beta}}|} \sum_{g=e^{2\pi i \vec{\alpha}} \in \mathfrak{G}_{\vec{\beta}}} \sigma^*(g) e^{2\pi i H_0^{\vec{\alpha}}} \right) = \\ &= q^{\frac{1}{2}(\vec{\beta}|\vec{\beta})} e^{-2\pi i \zeta (Q|\vec{\beta})} \frac{\sigma(1)}{|\mathfrak{G}_{\vec{\beta}}|} \sum_{g=e^{2\pi i \vec{\alpha}} \in \mathfrak{G}_{\vec{\beta}}} \sigma^*(g) \text{tr}_{\mathcal{H}_\lambda} \left(q^{L_0 - \frac{c}{24}} e^{2\pi i H_0^{\zeta Q + \vec{\alpha} - \tau \vec{\beta}}} \right). \end{aligned} \tag{4.8.6}$$

Доказателството се завършва като отчетем формулата за характерите

$\chi_{\vec{\lambda}}(\tau, z) = \text{tr}_{\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}} \left(q^{L_0 - \frac{c}{24}} e^{2\pi i H_0^z} \right)$ на неприводимите представяния на алгебрата $\mathcal{A}(L)$, където z е елемент от картановата подалгебра. ■

Твърдение 4.9 е основен инструмент за пресмятане на характерите на орбифолдните алгебри използван в [43] (виж, по-специално, техните у-ния (3.18), (4.4), които се получават от Твърдение (4.9) при $\zeta = 0$).

4.9 Пресмятане на характерите на \mathbb{Z}_M орбифолда на алгебрата $\mathcal{A}(L)$

Както видяхме в параграф § 4.5 калибровъчната група беше $\Gamma^*/L^* \simeq \mathbb{Z}_2$. Тук ще разгледаме едно обобщение на 331 модела на дробния ефект на Хол, който пък се получава като частен случай, когато $M = 2$.

1. Характери на изходната алгебра

Съгласно предишния подраздел трябва да познаваме характерите на $\mathcal{A}(L)$. Неприводимите модули $\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$ на алгебра $\mathcal{A}(L)$ с матрица на Грам

$$G_L = \left((e^i | e^j) \right) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.9.1)$$

се номерират чрез теглата $\vec{\lambda}$ на младшите им вектори $|\vec{\lambda}\rangle$

$$\vec{\lambda} \in L^*/L = \left\{ l e_1^* \mid -\frac{m}{2} + 1 \leq l \leq \frac{m}{2} \right\}, \quad (4.9.2)$$

където $\{e_i^*\}$ е базиса на дуалната решетка L^* , а векторът на заряда е

$$Q = e_1^*.$$

Тъй като хиралната алгебра $\mathcal{A}(L) = \mathcal{A}(L_m) \otimes \mathcal{A}(L_1)$ е тензорно произведение от комутиращи подалгебри, където $L_m = \mathbb{Z}e^1$ и $L_1 = \mathbb{Z}e^2$ са едномерни решетки, характерът на неприводимото представяне $\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$ на $\mathcal{A}(L)$ се представя като произведение от K -функции [63]

$$K_l(\tau, \zeta; m) = \frac{1}{\eta(\tau)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{m}{2}(n + \frac{l}{m})^2} e^{2\pi i \zeta(n + \frac{l}{m})}, \quad \eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q \stackrel{\text{def}}{=} e^{2\pi i \tau} \quad (4.9.3)$$

($\text{Im } \tau > 0$), които са съответно характерни на $\mathcal{A}(L_m)$ и $\mathcal{A}(L_1)$, т.е.

$$\chi_{\vec{\lambda}}(\tau, \zeta) = K_l(\tau, \zeta; m) K_0(\tau; 1) = \frac{1}{\eta^2(\tau)} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} q^{\frac{m}{2}(n_1 + \frac{l}{m})^2} e^{2\pi i \zeta(n_1 + \frac{l}{m})} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}n_2^2}. \quad (4.9.4)$$

2. Твистиране

Да вземем един твистиращ елемент $\vec{\beta} \in \mathbb{Z}_M$. Съгласно § 4.5 (в частност виж у-ние (4.5.4))

$$\vec{\beta} = \beta^i e_i^*, \quad \beta^1 = a \frac{v}{M} \in \mathbb{Z}_M, \quad (a \in \mathbb{Z}_M) \quad \beta^2 = \frac{v}{M} \in \mathbb{Z}_M, \quad (4.9.5)$$

т.е. векторът $\vec{\beta} = (\beta^1, \beta^2)$ реализира двумерно приводимо представяне (всички неприводими представяния на една абелева група са едномерни, вж. Допълнение В) на \mathbb{Z}_M .

Трябва да отбележим, че съгласно у-ние (4.5.4) представянето, което ни интересува (в случая на модела 331) е диагонално двумерно приводимо (т.е. $a = 1$). Тук ще разгледаме малко по-общия случай на недиагонално двумерно приводимо представяне, а случая (4.5.4) се получава когато $a = 1$.

3. Проектиране

Аналогично на твиста елементът \hat{g} участващ в проектора се реализира

$$\hat{g} = e^{2\pi i H_0^{\vec{\alpha}}}, \quad \vec{\alpha} = \alpha^i e_i^*, \quad \alpha^1 = a \frac{\mu}{M} \in \mathbb{Z}_M, \quad (a \in \mathbb{Z}_M) \quad \alpha^2 = \frac{\mu}{M} \in \mathbb{Z}_M. \quad (4.9.6)$$

Трябва да отбележим, че действието на калибровъчната група \mathfrak{G} върху хиралната алгебра $\mathcal{A}(L)$ чрез $e^{2\pi i H_0^{\vec{\alpha}}}$ беше определено от действието на абелевата група Γ^*/L^* върху решетката L . За да дефинираме проектор върху изотипично представяне на групата \mathfrak{G} , обаче, трябва да знаем действието на \mathfrak{G} върху множеството от представяния, т.е. върху младшите вектори $|\vec{\lambda}\rangle$ с тегла $\vec{\lambda} \in L^*$. Да разгледаме, например,

$$e^{2\pi i H_0^{\vec{\alpha}}} Y(\vec{\lambda}, z) e^{2\pi i H_0^{\vec{\alpha}}} = e^{2\pi i (\vec{\alpha}|\vec{\lambda})} Y(\vec{\lambda}, z),$$

$$\vec{\lambda} = l e_1^* \Rightarrow (\vec{\alpha}|\vec{\lambda}) = \frac{l\mu}{mM}, \quad (4.9.7)$$

т.е. върху представянията калибровъчната група \mathfrak{G} е изоморфна на \mathbb{Z}_{mM} . Следователно трябва да проектираме върху изотипичните представяния точно на тази група.

Съгласно Твърдение 4.9 характеристиките на калибровъчно инвариантната подалгебра $\mathcal{A}(L)^{\mathbb{Z}_M}$ се пресмятат по формулата¹⁵

$$\chi_{\vec{\lambda}, \sigma}^{\vec{\beta}}(\tau, \zeta) = \chi_{l, \sigma}^y(\tau, \zeta) = \frac{1}{mM} \sum_{\mu \pmod{mM}} e^{-2\pi i \frac{\mu\sigma}{mM}} q^{\frac{1}{2}(\vec{\beta}|\vec{\beta})} e^{-2\pi i \zeta(Q|\vec{\beta})} \chi_l(\tau, \zeta Q + \vec{\alpha} - \tau\vec{\beta}), \quad (4.9.8)$$

където $Q = (Q^1, Q^2) = (1, 0)$ в базиса $\{e_i^*\}$ на дуалната решетка L^* , а $\vec{\lambda}$, $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ са дефинирани с (4.9.2), (4.9.6) и (4.9.5) съответно. Да пресметнем $\chi_l^{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}$

$$\chi_l(\tau, \zeta Q + \vec{\alpha} - \tau\vec{\beta}) = \frac{1}{\eta^2(\tau)} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} q^{\frac{m}{2}(n_1 + \frac{l}{m})^2} e^{2\pi i (\zeta Q^1 + \alpha^1 - \tau\beta^1)(n_1 + \frac{l}{m})} q^{\frac{1}{2}n_2^2} e^{2\pi i (\zeta Q^2 + \alpha^2 - \tau\beta^2)n_2} =$$

$$= \frac{1}{\eta^2(\tau)} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} q^{\frac{m}{2}(n_1 + \frac{l}{m})^2} e^{2\pi i \zeta(n_1 + \frac{l}{m})} e^{2\pi i a(\frac{\mu}{M} - \tau\frac{\nu}{M})(n_1 + \frac{l}{m})} q^{\frac{1}{2}n_2^2} e^{2\pi i (\frac{\mu}{M} - \tau\frac{\nu}{M})n_2}. \quad (4.9.9)$$

Като заместим, съгласно Допълнение В, характера $\sigma^*(e^{2\pi i \alpha}) = e^{-2\pi i \frac{\sigma\mu}{mM}}$ на неприводимото представяне на \mathbb{Z}_{mM} можем да запишем

$$\chi_{l, \sigma}^y(\tau, \zeta) = \frac{1}{\eta^2(\tau)} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} q^{\frac{m}{2}(n_1 + \frac{l}{m} - \frac{\sigma\nu}{mM})^2} e^{2\pi i \zeta(n_1 + \frac{l}{m} - \frac{\sigma\nu}{mM})} q^{\frac{1}{2}(n_2 - \frac{\nu}{M})^2} \times$$

$$\times \delta_{m[a(n_1 + \frac{l}{m}) + n_2]}(\pmod{mM}), \quad (4.9.10)$$

¹⁵Характерите на неприводимите представяния на групата \mathbb{Z}_M са намерени в Допълнение В.

където δ -функцията, дефинирана със

$$\frac{1}{mM} \sum_{\mu \pmod{mM}} e^{2\pi i \frac{\mu}{mM} \left(m \left[a \left(n_1 + \frac{l}{m} \right) + n_2 \right] - \sigma \right)} = \delta_{m \left[a \left(n_1 + \frac{l}{m} \right) + n_2 \right]}^{\sigma} \pmod{mM}, \quad (4.9.11)$$

е очевидно различна от нула само когато

$$\sigma = a.l + m \underbrace{\left(-k.M + a.n_1 + n_2 \right)}_{\in \mathbb{Z}} \equiv a.l \pmod{m} \Leftrightarrow \chi_{l\sigma}^{\vee} \neq 0; \quad (4.9.12)$$

Условието (4.9.12) е известно като условие за "съгласуване върху центъра" (вж. Теорема 4.1 в [43]).

С други думи δ -функцията дава ненулев принос когато е изпълнено условието (4.9.12) и

$$a n_1 + n_2 = \frac{\sigma - a.l}{m} + k.M. \quad (4.9.13)$$

Твърдение 4.10 *Общото решение (n_1, n_2) на (4.9.13) може да бъде параметризирано [A] както следва*

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{\sigma - a.l}{m} + r + k_1 \bar{M}, & 0 \leq r \leq \bar{M} - 1 \\ n_2 &= \frac{\sigma - a.l}{m} (1 - a) - a.r + k_2 M, & k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (4.9.14)$$

където $a' = \text{gcd}(a, M)$, т.е. $a = a'\bar{a}$, $M = a'\bar{M}$, $\text{gcd}(\bar{a}, \bar{M}) = 1$.

Като използваме твърдение 4.10, т.е. заместим параметризацията (4.9.14) във формула (4.9.10)

$$\begin{aligned} \chi_{l\sigma}^{\vee}(\tau, \zeta) &= \frac{1}{\eta^2(\tau)} \sum_{r=0}^{\bar{M}-1} \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} q^{\frac{m}{2} \left(\frac{\sigma - a.l}{m} + \frac{l}{m} + r + k_1 \bar{M} - \frac{\bar{a}v}{m\bar{M}} \right)^2} e^{2\pi i \zeta \left(\frac{\sigma - a.l}{m} + \frac{l}{m} + r + k_1 \bar{M} - \frac{\bar{a}v}{m\bar{M}} \right)} \times \\ &\times q^{\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma - a.l}{m} (1 - a) - a.r + k_2 M - \frac{v}{M} \right)^2} = \\ &= \frac{1}{\eta^2(\tau)} \sum_{r=0}^{\bar{M}-1} \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} q^{\frac{m\bar{M}^2}{2} \left(k_1 + \frac{\bar{M}[\sigma - (a-1)l + m.r] - \bar{a}v}{m\bar{M}^2} \right)^2} e^{2\pi i \zeta \left(k_1 + \frac{\bar{M}[\sigma - (a-1)l + m.r] - \bar{a}v}{m\bar{M}^2} \right)} \times \\ &\times q^{\frac{M^2}{2} \left(k_2 + \frac{M \left[\frac{\sigma - a.l}{m} (1 - a) - a.r \right] - v}{M^2} \right)} \end{aligned} \quad (4.9.15)$$

Окончателно за характеристиките на неприводимите представяния на калибровъчно инвариантната хирална алгебра получаваме

$$\chi_{l\sigma}^{\vee}(\tau, \zeta) = \sum_{r=0}^{\bar{M}-1} K_{[\bar{M}(\sigma - (a-1)l + m.r) - \bar{a}v]}(\tau, \bar{M}\zeta; m\bar{M}^2) K_{[M \left(\frac{\sigma - a.l}{m} (1 - a) - a.r \right) - v]}(\tau, 0; M^2). \quad (4.9.16)$$

Доказателство на твърдение 4.10:

Поради условието (4.9.12) $\sigma = al + s.m \Rightarrow s = \frac{\sigma - al}{m} \in \mathbb{Z}$ е фиксирано цяло число. Следователно търсим решението $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ на

$$a.n_1 + n_2 = s + k.M \quad (4.9.17)$$

1. Можем да адсорбираме s в двойката n_1, n_2 като представим $s = s(a + (1 - a))$ и положим

$$\begin{aligned} n'_1 &= n_1 - s \\ n'_2 &= n_2 + (a - 1)s, \quad \text{т.е. търсим такива } (n'_1, n'_2), \text{ че} \\ an'_1 + n'_2 &= k.M \end{aligned} \quad (4.9.18)$$

2. При решаването на условието (4.9.18) е съществено да се отдели общия множител във a и M понеже решение на едно линейно Диофантово уравнение съществува, когато коефициентите пред неизвестните са взаимно прости. Нека

$$a' = \gcd(a, M) \Rightarrow a = a' \cdot \bar{a}, \quad M = a' \cdot \bar{M}, \quad \gcd(\bar{a}, \bar{M}) = 1 \quad (a', \bar{a}, \bar{M} \in \mathbb{Z}), \quad (4.9.19)$$

където \gcd означава най-големия общ делител. Тогава, очевидно $n'_2 = -a'(\bar{a}n'_1 - k\bar{M})$ също се дели на a' . Да положим

$$\begin{aligned} n''_1 &= n'_1 \\ n''_2 &= \frac{n'_2}{a'} \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (4.9.20)$$

Тогава условието (4.9.18) се свежда до

$$\bar{a}n''_1 + n''_2 = k\bar{M}. \quad (4.9.21)$$

Търсим параметризация на (n''_1, n''_2) , която автоматично да удовлетворява (4.9.21). Тъй като (4.9.21) е условие от типа $\bar{a}n''_1 + n''_2 = 0 \pmod{\bar{M}}$ и всяко цяло число има еднозначно представяне по модул друго цяло число ще представим n''_1, n''_2 по модул \bar{M}

$$\begin{aligned} n''_1 &= k_1\bar{M} + r_1 \quad 0 \leq r_1, r_2 \leq \bar{M} - 1 \\ n''_2 &= k_2\bar{M} + r_2 \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (4.9.22)$$

Като заместим параметризацията (4.9.22) в условието (4.9.21) получаваме

$$\bar{a}r_1 + r_2 = [k - (\bar{a}k_1 + k_2)] \cdot \bar{M} \equiv 0 \pmod{\bar{M}} \quad (4.9.23)$$

от където можем да определим r_2 чрез $r_1 =: r$

$$r_2 = [k - (\bar{a}k_1 + k_2)] \cdot \bar{M} - \bar{a}r. \quad (4.9.24)$$

Като заместим (4.9.24) в (4.9.22) и означим $k - \bar{a}k_1 =: k'_2$ получаваме

$$\begin{aligned} n''_1 &= r + k_1\bar{M}, \quad 0 \leq r \leq \bar{M} - 1 \\ n''_2 &= -\bar{a}r + k'_2\bar{M}, \quad k_1, k'_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (4.9.25)$$

Това е общото решение на (4.9.21). Използвайки (4.9.20) ще го запишем чрез n'_1, n'_2 , т.е. ($k'_2 =: k_2$) $n'_2 = a' \cdot n''_2 = a'(-\bar{a} \cdot r + k_2 \cdot \bar{M}) = -a \cdot r + k_2 \cdot M$. Следователно

$$\begin{aligned} n'_1 &= r + k_1 \cdot \bar{M}, & 0 \leq r \leq \bar{M} - 1 \\ n'_2 &= -a \cdot r + k_2 \cdot M, & k_1, k_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (4.9.26)$$

Накрая, като отчетем (4.9.18), окончателно получаваме

$$\begin{aligned} n_1 &= s + r + k_1 \cdot \bar{M}, & 0 \leq r \leq \bar{M} - 1 \\ n_2 &= (1 - a)s - a \cdot r + k_2 \cdot M, & s = \frac{\sigma - a \cdot l}{m}; \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (4.9.27)$$

■

В частност, за $a = 1 \Rightarrow a = a' = \bar{a} = 1, \bar{M} = M$ характерите приемат вида (като отчетем периодичността на характерите K_l относно техните индекси и това, че сумата е всъщност по модул M)

$$\chi_{l\sigma}^v(\tau, \zeta) = \sum_{r=0}^{M-1} K_{[M(\sigma - m \cdot r) - v]}(\tau, M\zeta; mM^2) K_{[Mr - v]}(\tau, 0; M^2). \quad (4.9.28)$$

Ще разгледаме още един сравнително общ случай.

Твърдение 4.11 Нека $M = 2$ и $\gcd(a, m) = 1$. Тогава характерите (4.9.16) приемат вида

$$\chi_{l\sigma}^v(\tau, \zeta) = \sum_{r=0}^1 K_{\lambda + 2mr}(\tau, 2\zeta; 4m) K_{\lambda + 2a^2r}(\tau; 4a^2). \quad (4.9.29)$$

Доказателство: При тези условия можем да запишем

$$\begin{aligned} \chi_{l\sigma}^v &= \sum_{r=0}^1 K_{2[\sigma - (a-1)l] - v + 2mr}(4m) K_{[2a(a-1)\frac{l-a-\sigma}{m} - v - 2a^2r]}(4a^2) = \\ &= \sum_{r=0}^1 K_{2ms + 2l - v + 2mr}(4m) K_{[2a(1-a)s - v - 2a^2r]}(4a^2), \end{aligned} \quad (4.9.30)$$

където $s = \frac{\sigma - a \cdot l}{m} \in \mathbb{Z}$. Да сменим сумационния индекс $r' = r + s$ и да използваме периодичността на сумата (която е сума по модул 2). Тогава

$$\chi_{l\sigma}^v = \sum_{r=0}^1 K_{2l - v + 2mr}(4m) K_{2as - v - 2a^2r}(4a^2). \quad (4.9.31)$$

Да разгледаме индексите на K -функциите, като отчетем съответните периодичности

$$\begin{aligned} 2l - v + 2mr(+4mk_1) &\stackrel{?}{=} 2as - v - 2a^2r(+4a^2k_2) \Leftrightarrow \\ 4mk_1 - 4a^2k_2 &\stackrel{?}{=} 2as - 2l - 2r(a^2 + m). \end{aligned} \quad (4.9.32)$$

Дали съществуват такива $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, че (4.9.32) да бъде вярно зависи само от това дали дясната страна на (4.9.32) се дели на $\gcd(4m, 4a^2)$. По условие $\gcd(m, a) = 1$ и значи

$\gcd(m, a^2) = 1 \Rightarrow \gcd(4m, 4a^2) = 4$, следователно такива k_1, k_2 съществуват \Leftrightarrow , когато дясната страна се дели на 4, т.е., когато

$$\frac{as - l - r(a^2 + m)}{2} \in \mathbb{Z}. \quad (4.9.33)$$

Условието (4.9.33) винаги може да бъде удовлетворено чрез подходящ избор на r . Наистина, тъй като $\gcd(m, a^2) = 1$ те трябва да бъдат с различна четност и следователно $a^2 + m$ е винаги нечетно цяло число. Тогава, ако $as - l \in 2\mathbb{Z}$ избираме $r = 0$, а ако $as - l \in 2\mathbb{Z} + 1$ избираме $r = 1$. Така и в двата случая числителят в (4.9.33) е четно число. При всяко фиксирано r , индексите на другото събираемо в сумата по r ще се отличава с $2m$ в първата K -функция и с $2a^2$ във втората (навсякъде отчитаме периодичността на индексите). ■

Конкретно за случая на 331 модела ($a = 1, M = 2, m = 2$) характерите могат да бъдат записани

$$\chi_\lambda(\tau, \zeta) = \chi_{l\sigma}^v(\tau, \zeta) = K_\lambda(\tau, 2\zeta; 8)K_\lambda(\tau; 4) + K_{\lambda+4}(\tau, 2\zeta; 8)K_{\lambda+2}(\tau; 4)$$

$$\lambda = -2\sigma - v, \quad -3 \leq \lambda \leq 4. \quad (4.9.34)$$

4.10 Статистическа сума. Модуларни трансформации. Правила на сливане

4.10.1 Термодинамичен потенциал

Статистическата сума на модела 331, записана като диагонална билинейна комбинация от характерите (4.9.34) и техните спрегнати

$$Z_{331}(\tau, \zeta) = \sum_{\lambda=-3}^4 |\text{ch}_\lambda(\tau, \zeta)|^2, \quad (4.10.1)$$

$$\text{ch}_\lambda(\tau, \zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left(-\frac{\pi}{m} \frac{(\text{Im } \zeta)^2}{\text{Im } \tau}\right) \chi_\lambda(\tau, \zeta), \quad (4.10.2)$$

където допълнителният неаналитичен фактор $\exp\left(-\frac{\pi}{m} \frac{(\text{Im } \zeta)^2}{\text{Im } \tau}\right)$ в у-ние (4.10.2) гарантира V -инвариантността (3.5.10d) на статсумата, се свързва по стандартен начин със термодинамичния $\Omega(T, \mu)$ -потенциал ($d\Omega = -S dT - N d\mu$) [56, 64]

$$\Omega(\tau, \zeta) = -\frac{1}{\beta} \ln Z_{331}(\tau, \zeta), \quad 2\pi R \text{Im } \tau = \beta = \frac{1}{k_B T}, \quad 2\pi \text{Im } \zeta = \beta \mu \quad 2\pi \text{Re } \zeta = \beta V_0. \quad (4.10.3)$$

Трябва да отбележим, че този термодинамичен потенциал описва системата само при условие [28]

$$\hbar \frac{2\pi v}{L} \ll k_B T \ll \hbar \omega_B \quad (4.10.4)$$

($1/R \equiv v/R = \bar{v}/\bar{R}$ [30] и $L = 2\pi R$). Второто неравенство означава, че разглеждаме ниско-енергетична ефективна теория с енергетичен праг $\hbar\omega_B$ (равен на разстоянието между нивата на Ландау), а първото, че температурата е много по-голяма от разстоянието между съседните енергетични нива на граничните възбуждания в термодинамична граница ($L \rightarrow \infty$).

Забележка 4.6 Скоростта $v = \sqrt{(v_F + g_4)^2 - g_2^2}$ на разпространение на граничните вълни се различава от скоростта на Ферми v_F тъй като отчита определен тип взаимодействие [28] запазващо интегрируемостта на модела; тази ефективна скорост се разглежда като параметър в теорията.

Като отчетем връзката (4.10.3) между модуларния параметър и обратната температура виждаме, че термодинамичната граница¹⁶ $L \rightarrow \infty$ отговаря на границата $\tau = i\beta v/L \rightarrow i0^+$, а за параметъра $q = \exp(2\pi i\tau) \rightarrow 1^-$ (по модул). Следователно, можем да потърсим водещия член в статсумата (4.10.1) относно тази граница. Това обаче не може да бъде направено директно, тъй като $q = 1$ попада извън границата на сходимост на модуларните функции. Затова трябва да използваме \mathcal{S} -инвариантността на статсумата за да сведем тази нетривиална граница към тривиалната $q' = \exp(2\pi i\frac{-1}{\tau}) \rightarrow 0$.

Ние обаче ще приложим по-елегантен метод. Да разгледаме статсумата за произволна решетъчна РКТП (с хирална алгебра $\mathcal{A}(\widehat{u(1)^N}, L, Q)$)

$$Z_G^Q(\tau, \zeta) = \frac{e^{-2\pi v \frac{(\text{Im} \zeta)^2}{\text{Im} \tau}}}{|\eta(\tau)^N|^2} \sum_{\vec{\lambda} \in L^*/L} \left| \sum_{\vec{\omega} \in L} q^{\frac{1}{2}(\vec{\omega} + \vec{\lambda} | \vec{\omega} + \vec{\lambda})} e^{2\pi i \zeta(Q | \vec{\omega} + \vec{\lambda})} \right|^2, \quad v = (Q | Q). \quad (4.10.5)$$

Да запишем всички вектори в съответните им базиси: $\vec{\omega} = n_i e^i$, $\vec{\lambda} = l^i e_i^*$, $Q = t^i e_i^*$ ($e_i^* = G_{ij}^{-1} e^j$, $(e^i | e^j) = G^{ij}$). Тогава, за израза под модула получаваме

$$\Theta_{\vec{\lambda}}(\tau, \zeta) := \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^N} \left(e^{-\frac{2\pi v \beta}{L}} \right)^{\frac{1}{2}(\vec{n} + G^{-1}\vec{l}, G(\vec{n} + G^{-1}\vec{l}))} e^{2\pi i \zeta(\vec{l}, \vec{n} + G^{-1}\vec{l})} \quad (4.10.6)$$

и полагайки

$$\vec{x}_{\vec{n}} := \sqrt{\frac{2\pi v \beta}{L}} (\vec{n} + G^{-1}\vec{l}) \quad (4.10.7)$$

можем да разглеждаме решетката \mathbb{Z}^N като покритие $\{A_{\vec{n}}\}$ на N -мерното векторно пространство \mathbb{R}^N , където $A_{\vec{n}}$ е клетката, чийто долен ляв ъгъл е точката $\vec{x}_{\vec{n}}$. Мярката $\mu(A_{\vec{n}})$ на клетката $A_{\vec{n}}$ има вида

$$\mu(A_{\vec{n}}) = \left(\sqrt{\frac{2\pi v \beta}{L}} \right)^N \underbrace{\text{Vol}(\mathbb{Z}^N)}_1 = \left(\sqrt{\frac{2\pi v \beta}{L}} \right)^N =: \mu(A), \quad (4.10.8)$$

където $\text{Vol}(\mathbb{Z}^N) = 1$ е мярката на елементарната клетка на решетката \mathbb{Z}^N (обемът на N -мерен куб с единичен ръб). Тогава у-ние (4.10.6) предствлява Риманова интегрална

¹⁶Това е също и квазикласична граница тъй като съгласно у-ние (4.10.4) $\hbar\beta/L \rightarrow 0$.

сума, която, в термодинамичната граница $L \rightarrow \infty$ можем да заменим с интеграла

$$\begin{aligned} \Theta_{\vec{\lambda}} &= \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^N} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}_{\vec{n}}, G\vec{x}_{\vec{n}}) + (\vec{b}, \vec{x}_{\vec{n}})} = \frac{1}{\mu(A)} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^N} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}_{\vec{n}}, G\vec{x}_{\vec{n}}) + (\vec{b}, \vec{x}_{\vec{n}})} \mu(A_{\vec{n}}) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\sqrt{\frac{2\pi\nu\beta}{L}} \right)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} d^N x e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}, G\vec{x}) + (\vec{b}, \vec{x})}, \quad \vec{b} := \frac{2\pi i \vec{\zeta}}{\sqrt{\frac{2\pi\nu\beta}{L}}}. \end{aligned} \quad (4.10.9)$$

Използвайки израза за Гаусовия интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{d^N x}{(\sqrt{2\pi})^N} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}, G\vec{x}) + (\vec{b}, \vec{x})\right) = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \exp\left(\frac{1}{2}(\vec{b}, G^{-1}\vec{b})\right), \quad (4.10.10)$$

(за положително дефинитна симетрична матрица G) получаваме

$$\Theta_{\vec{\lambda}}(\tau, \zeta) = \left(\frac{L}{\nu\beta}\right)^{N/2} \frac{1}{\sqrt{\det G}} \exp\left(-\frac{\pi L}{\nu\beta} \nu \zeta^2\right), \quad \nu = (Q|Q) = (\vec{t}, G^{-1}\vec{t}), \quad (4.10.11)$$

т.е. тита-функцията не зависи от индекса $\vec{\lambda}$. Следователно, можем да сумираме по $\vec{\lambda} \in L^*/L$, което умножава $|\Theta_{\vec{\lambda}}|^2$ на броя $(\det G)$ на събираемите

$$\sum_{\vec{\lambda} \in L^*/L} |\Theta_{\vec{\lambda}}|^2 = \left(\frac{L}{\nu\beta}\right)^N \exp\left(-\frac{2\pi L}{\nu\beta} \nu ((\operatorname{Re} \zeta)^2 - (\operatorname{Im} \zeta)^2)\right). \quad (4.10.12)$$

Отчитайки и CZ- факторите получаваме

$$e^{-2\pi\nu \frac{(\operatorname{Im} \zeta)^2}{\operatorname{Im} \tau}} \sum_{\vec{\lambda} \in L^*/L} |\Theta_{\vec{\lambda}}|^2 = \left(\frac{L}{\nu\beta}\right)^N \exp\left(-\frac{2\pi L}{\nu\beta} \nu (\operatorname{Re} \zeta)^2\right). \quad (4.10.13)$$

Следователно за логаритъма от статсумата получаваме ($\operatorname{Re} \tau = 0$)

$$\ln Z_Q^G(\tau, \zeta) = -2N \ln \eta(\tau) - 2\pi\nu \frac{L}{\nu\beta} (\operatorname{Re} \zeta)^2 + N \ln \frac{L}{\nu\beta}. \quad (4.10.14)$$

За пресмятането на $\ln \eta(\tau)$ отново заменяме сумата с интеграл¹⁷ полагайки $x_n = \left(\frac{2\pi\nu}{L}\beta\right) n \Rightarrow \Delta x_n = x_{n+1} - x_n = \Delta x$

$$\begin{aligned} \ln \eta(\tau) &= \ln \left(e^{-\frac{2\pi\nu}{L}\beta} \right)^{1/24} + \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - e^{-\frac{2\pi\nu}{L}\beta n} \right) = \\ &= -\frac{1}{24} \frac{2\pi\nu}{L} \beta + \frac{1}{\Delta x} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - e^{-x_n} \right) (x_{n+1} - x_n) \rightarrow \\ &\rightarrow -\frac{1}{24} \frac{2\pi\nu}{L} \beta + \frac{L}{2\pi\nu\beta} \int_0^{\infty} \ln \left(1 - e^{-x} \right) dx. \end{aligned} \quad (4.10.15)$$

¹⁷срв. [65]

За намирането на интеграла развиваме логаритъма в ред

$$\int_0^{\infty} \ln(1 - e^{-x}) dx = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6} \quad \Rightarrow \quad \ln \eta(\tau) = -\frac{1}{24} \frac{2\pi v}{L} \beta - \frac{L}{v\beta} \frac{\pi}{12} \quad (4.10.16)$$

Окончателно, в ТД-граница получаваме

$$\ln Z_Q^G(\tau, \zeta) = 2c \left(\frac{1}{24} \frac{2\pi v}{L} \beta + \frac{L}{v\beta} \frac{\pi}{12} \right) - 2\pi v \frac{L}{v\beta} (\operatorname{Re} \zeta)^2 + c \ln \frac{L}{v\beta} \quad (c = N) \quad (4.10.17)$$

и като оставим само водещите членове при $L \rightarrow \infty$

$$\ln Z_Q^G(\tau, \zeta) \simeq c \frac{\pi L}{6 v} \frac{1}{\beta} - 2\pi v \frac{L}{v\beta} (\operatorname{Re} \zeta)^2. \quad (4.10.18)$$

Това позволява да бъдат пресметнати основните термодинамични характеристики на системата. Например, специфичният топлинен капацитет се изразява чрез

$$C_V = -T \frac{\partial^2 \Omega}{\partial T^2} = k_B \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln Z_{331} \sim \frac{\pi c L}{3 v} k_B^2 T \quad \Rightarrow \quad \frac{C_V}{L} = \frac{\pi c}{3 v} k_B^2 T \quad (c = N = 2). \quad (4.10.19)$$

4.10.2 S-матрица за обобщения 331 модел

Като използваме трансформационните свойства на K -функциите (4.9.3)

$$S K_l(\tau; m) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{s \bmod m} e^{-2\pi i \frac{ls}{m}} K_s(\tau; m) \quad (4.10.20)$$

да направим S -трансформация в характерите (4.9.29) за $\zeta = 0$

$$\begin{aligned} S \chi_\lambda(\tau) &= \sum_{r=0}^1 \frac{1}{\sqrt{4m}} \sum_{\rho \bmod 4m} e^{-2\pi i \frac{\rho(\lambda+2mr)}{4m}} K_\rho(\tau; 4m) \frac{1}{\sqrt{4a^2}} \sum_{\sigma \bmod 4a^2} e^{-2\pi i \frac{\sigma(\lambda+2a^2r)}{4a^2}} K_\sigma(\tau; 4a^2) = \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{m}} \sum_{\rho, \sigma \bmod 4ma^2} \frac{1}{ma^2} e^{-2\pi i \lambda \frac{a^2 \rho + m\sigma}{4ma^2}} K_\rho(\tau; 4m) K_\sigma(\tau; 4a^2) \delta_{\rho+\sigma}^0(\bmod 2), \end{aligned} \quad (4.10.21)$$

където продължихме сумите $\sum_{\rho \bmod 4m} = \frac{1}{a^2} \sum_{\rho \bmod 4ma^2}$ и $\sum_{\sigma \bmod 4a^2} = \frac{1}{m} \sum_{\sigma \bmod 4ma^2}$, използвайки периодичността на характерите,

$$K_{l+m}(\tau, \zeta; m) = K_l(\tau, \zeta; m) \quad (4.10.22)$$

и използвахме дефиницията на делта-символ "по модул"

$$\frac{1}{2} \sum_{r=0}^1 e^{-2\pi i \frac{r(\rho+\sigma)}{2}} = \delta_{\rho+\sigma}^0(\bmod 2). \quad (4.10.23)$$

По-нататък ще направим смяна на променливите, която отчита първоначалните периодичности на ρ , σ и делта-символа

$$\begin{aligned} \rho &= \lambda' + 2mr + 4mk_1 & \rho, \sigma, \lambda' \bmod 4ma^2, \quad r \bmod 2 \\ \sigma &= \lambda' + 2a^2r + 4a^2k_2 & k_1 \bmod a^2, \quad k_2 \bmod m. \end{aligned} \quad (4.10.24)$$

Тази смяна е взаимнооднозначна (когато $\gcd(m, a) = 1$) тъй като броят на двойките

$$\#\{(\rho, \sigma) \mid \rho, \sigma \bmod 4ma^2, \rho \equiv \sigma \bmod 2\} = \frac{1}{2}(4ma^2)^2 \quad (4.10.25)$$

съвпада с броя на четворките

$$\#\{(\lambda', r, k_1, k_2)\} = \#(\lambda')\#(r)\#(k_1)\#(k_2) = 4ma^2 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot m. \quad (4.10.26)$$

Като заместим (4.10.24) в (4.10.21) получаваме

$$\begin{aligned} S\chi_\lambda &= \frac{1}{2a\sqrt{m}} \sum_{\lambda' \bmod 4ma^2} \sum_{r=0}^1 \sum_{k_1 \bmod a^2} \sum_{k_2 \bmod m} \frac{1}{ma^2} \times \\ &\times e^{-2\pi i \frac{\lambda}{4ma^2} (a^2[\lambda' + 2mr + 4mk_1] + m[\lambda' + 2a^2r + 4a^2k_2])} K_{\lambda' + 2mr + 4mk_1}(\tau; 4m) K_{\lambda' + 2a^2r + 4a^2k_2}(\tau; 4a^2) = \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{m}} \sum_{\lambda' \bmod 4ma^2} e^{-2\pi i \frac{m+a^2}{4ma^2} \lambda \lambda'} \sum_{r=0}^1 K_{\lambda' + 2mr}(\tau; 4m) K_{\lambda' + 2a^2r}(\tau; 4a^2) \sum_{k_1 \bmod a^2} \sum_{k_2 \bmod m} \frac{1}{ma^2} = \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{m}} \sum_{\lambda' \bmod 4ma^2} e^{-2\pi i \frac{m+a^2}{4ma^2} \lambda \lambda'} \chi_{\lambda'} = \sum_{\lambda' \bmod 4ma^2} S_{\lambda\lambda'} \chi_{\lambda'}. \end{aligned} \quad (4.10.27)$$

Следователно S -матрицата за обобщения 331 модел се изчислява по формулата [A]

$$S_{\lambda\lambda'} = \frac{1}{2a\sqrt{m}} \exp\left(-2\pi i \lambda \lambda' \frac{m+a^2}{4ma^2}\right) \quad (\lambda, \lambda' \bmod 4ma^2). \quad (4.10.28)$$

4.10.3 T^2 , U и V трансформации

T^2 -трансформацията на K -функциите [30]

$$K_l(\tau + 2; M) = e^{2\pi i (l^2/p - 1/12)} K_l(\tau; M) \quad (4.10.29)$$

води до следната T^2 -трансформация на характерите на 331 модела

$$\text{ch}_l(\tau + 2, \zeta) = e^{2\pi i \left(\frac{m+1}{4m} l^2 - 1/6\right)} \text{ch}_l(\tau, \zeta). \quad (4.10.30)$$

U -трансформацията действа върху K -функциите просто чрез фазов множител [30]

$$K_l(\tau, 2(\zeta + 1); 4m) = e^{2\pi i \frac{2l}{4m}} K_l(\tau, 2\zeta; 4m), \quad (4.10.31)$$

следователно

$$\text{ch}_l(\tau, \zeta + 1) = e^{2\pi i \frac{2l}{4m}} \text{ch}_l(\tau, \zeta). \quad (4.10.32)$$

Като използваме трансформационните свойства на K -функциите [30]

$$e^{-\frac{\pi}{m} \frac{(\text{Im } \zeta)^2}{\text{Im } \tau}} K_l(\tau, 2(\zeta + \tau); 4m) = e^{-2\pi i \text{Re}(\zeta + \tau/2)} e^{-\frac{\pi}{m} \frac{(\text{Im } \zeta)^2}{\text{Im } \tau}} K_{l+2}(\tau, 2\zeta; 4m) \quad (4.10.33)$$

получаваме

$$\begin{aligned} \text{ch}_l(\tau, \zeta + \tau) &= e^{-2\pi i \text{Re}(\zeta + \tau/2)} e^{-\frac{\pi}{m} \frac{(\text{Im } \zeta)^2}{\text{Im } \tau}} (K_l(4)K_{l+2}(4m) + K_{l+2}(4)K_{l+2m+2}(4m)) = \\ &= e^{-2\pi i \text{Re}(\zeta + \tau/2)} e^{-\frac{\pi}{m} \frac{(\text{Im } \zeta)^2}{\text{Im } \tau}} (K_{\lambda-2}(4)K_{\lambda-2m}(4m) + K_\lambda(4)K_\lambda(8)) = \\ &= e^{-2\pi i \text{Re}(\zeta + \tau/2)} \text{ch}_\lambda(\tau, \zeta + \tau), \end{aligned} \quad (4.10.34)$$

където положихме $l + 2 + 2m = \lambda$ и използвахме периодичността на индексите на K -функциите ($l - 2 \equiv l + 2 \pmod{4}$ както и $l - 2m \equiv l + 2m \pmod{4m}$). Следователно

$$\text{ch}_l(\tau, \zeta + \tau) = e^{-2\pi i \text{Re}(\zeta + \tau/2)} \text{ch}_{l+2+2m}(\tau, \zeta). \quad (4.10.35)$$

Очевидно статсумата (4.10.1) е инвариантна относно V -трансформацията (4.10.35), както и относно T^2 , U , които действат чрез диагонални матрици с фазови множители.

4.10.4 Правила на сливане

За определяне на правилата на сливане използваме формулата на Верлинде [59]

$$N_{ij}{}^k = \sum_{l \pmod{4ma^2}} \frac{S_{il}S_{jl}S_{kl}^*}{S_{0l}}, \quad i, j, k, l \pmod{4ma^2}, \quad (4.10.36)$$

където S_{ij} е S -матрицата, а S_{0l} е първия (вакуумния) ред. В този случай матриците $(N_i)_j{}^k = N_{ij}{}^k$ се оказват степени на матрицата

$$(N_1)_i{}^j = \delta_{i+1}^j \pmod{4ma^2}. \quad (4.10.37)$$

С други думи правилата на сливане са абелеви, т.е.

$$[\lambda].[\lambda'] \equiv [\lambda + \lambda' \pmod{4ma^2}], \quad \lambda, \lambda' \pmod{4ma^2}. \quad (4.10.38)$$

4.10.5 Вълнови функции на нееквивалентните квазидупки. Магнитен поток

Всеки от нееквивалентните сектори на суперотбор \mathcal{H}_λ определя "квазичастица" носеща заряд $\vec{\lambda} \in \{0, \pm q_i^*, \pm(q_1^* + q_2^*), (q_2^* - q_1^*)\}$. Полевият оператор $Y(\vec{\lambda}, z)$, съответстващ на младшия вектор в сектора, играе ролята на оператор създаващ квазидупки. Вълновата функция на състояние със $2N$ електрона и една квазидупка (с координати η) се определя съгласно (3.9.4, 3.9.5) и може да бъде намерена с помощта на Твърдение 3.3

$$\begin{aligned} \Psi_{331}^{\vec{\lambda}}(\eta; z_i, w_j) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z_0 \rightarrow \infty} z_0^{N^2 \sum_{i,j} G_{\Gamma^+}^{ij}(\vec{\lambda}|\vec{\lambda})} \times \\ &\times \langle 0|Y(-N(q^1 + q^2) - \vec{\lambda}, z_0) \prod_{i=1}^N Y(q^1, z_i) \prod_{j=1}^N Y(q^2, w_j)|0\rangle = \\ &= \Psi_{331}(z_i, w_j) \prod_{i=1}^N (z_i - \eta)^{(q^1|\vec{\lambda})} (w_i - \eta)^{(q^2|\vec{\lambda})}. \end{aligned} \quad (4.10.39)$$

Същата процедура позволява да бъде пресметнат и магнитния поток в системата. Наистина, да разгледаме допълнителен електрон, който обикаля по контур обхващащ останалите частици. Както е известно, фазата придобита от пълната вълнова функция при този процес е равна на броя N_{Φ} на квантите (hc/e) на магнитния поток. Въпросната вълнова функция получаваме по същия начин както (4.10.39) (означавайки $\vec{\lambda} = \lambda^i e_j^*$)

$$\begin{aligned}\Psi_{331}^{1e_{\uparrow} + \vec{\lambda}}(z, \eta; z_i, w_j) &= (z - \eta)^{\lambda^1 - \lambda^2} \prod_{i=1}^N (z - z_i)^3 (z - w_i) \Psi_{331}^{\vec{\lambda}}(\eta; z_i, w_j) \\ \Psi_{331}^{1e_{\downarrow} + \vec{\lambda}}(w, \eta; z_i, w_j) &= (w - \eta)^{\lambda^1 + \lambda^2} \prod_{i=1}^N (w - z_i)(w - w_i)^3 \Psi_{331}^{\vec{\lambda}}(\eta; z_i, w_j),\end{aligned}\quad (4.10.40)$$

където z или w са съответно координатите на обикалящия електрон в зависимост от това в кой слой се намира. По-нататък, тъй като вълновата функция (4.10.40) е аналитична освен в точките z_i, w_i, η можем да деформираме контура до множество от окръжности, при които допълнителният електрон обикаля само една частица, т.е. $z - z_i \rightarrow e^{2\pi i}(z - z_i)$ за контура с център z_i . Следователно при обиколката на електрона около всички останали частици пълната вълнова функция се модифицира като всяка разлика на координати съдържаща z се умножава на $e^{2\pi i}$. Тогава, за функцията (4.10.40) това означава

$$\begin{aligned}\Psi_{331}^{1e_{\uparrow} + \vec{\lambda}}(e^{2\pi i}z, \eta; z_i, w_j) &= (e^{2\pi i}(z - \eta))^{\lambda^1 - \lambda^2} \prod_{i=1}^N (e^{2\pi i}(z - z_i))^3 (e^{2\pi i}(z - w_i)) \Psi_{331}^{\vec{\lambda}}(\eta; z_i, w_j) \\ &= \exp(2\pi i(4N + \lambda^1 - \lambda^2)) \Psi_{331}^{1e_{\uparrow} + \vec{\lambda}}(z, \eta; z_i, w_j) \\ \Psi_{331}^{1e_{\downarrow} + \vec{\lambda}}(e^{2\pi i}w, \eta; z_i, w_j) &= (e^{2\pi i}(w - \eta))^{\lambda^1 + \lambda^2} \prod_{i=1}^N (e^{2\pi i}(w - w_i))^3 (e^{2\pi i}(w - z_i)) \Psi_{331}^{\vec{\lambda}}(\eta; z_i, w_j) \\ &= \exp(2\pi i(4N + \lambda^1 + \lambda^2)) \Psi_{331}^{1e_{\downarrow} + \vec{\lambda}}(w, \eta; z_i, w_j).\end{aligned}\quad (4.10.41)$$

Следователно броят на квантите на магнитния поток за двата слоя е

$$N_{\Phi}^1 = 4N + \lambda^1 - \lambda^2, \quad N_{\Phi}^2 = 4N + \lambda^1 + \lambda^2. \quad (4.10.42)$$

От друга страна да разгледаме действието на операторите $H_0^{q^i}$, за които знаем, че $[H_0^{q^i}, Y(\vec{\lambda}, z)] = (q^i | \vec{\lambda}) Y(\vec{\lambda}, z)$ и $H_0^{q^i} |0\rangle = 0$

(векторите q^i са дефинирани с (4.3.7), така че $(q^1 | \vec{\lambda}) = \lambda^1 - \lambda^2$, $(q^2 | \vec{\lambda}) = \lambda^1 + \lambda^2$)

$$\begin{aligned}\langle N(q^1 + q^2) + \vec{\lambda} | H_0^{q^i} Y(\vec{\lambda}, \eta) \prod_{i=1}^N Y(q^1, z_i) \prod_{j=1}^N Y(q^2, w_j) |0\rangle &= \\ = \left(N(q^i | q^1 + q^2) + (q^i | \vec{\lambda}) \right) \langle N(q^1 + q^2) + \vec{\lambda} | Y(\vec{\lambda}, \eta) \prod_{i=1}^N Y(q^1, z_i) \prod_{j=1}^N Y(q^2, w_j) |0\rangle\end{aligned}\quad (4.10.43)$$

Извод: Операторите \widehat{N}_{Φ}^i на броя квантите на магнитния поток в съответния слой съв-

падат с нулевите моди на токовете H_0^{qi}

$$\widehat{N}_\Phi^i \equiv H_0^{qi}, \quad i = 1, 2. \quad (4.10.44)$$

В частност, основното състояние ($\vec{\lambda} = 0$) носи $N_\Phi^i = 4N$ на брой магнитни кванти, а състоянията с една квазидупка – цяло число кванти. Тогава, факторът на запълване (в ТД- граница $N \rightarrow \infty$) се получава $\nu = N/N_\Phi^1 + N/N_\Phi^2 = 1/2$.

5 Пфафов модел

5.1 Общи сведения

За описание на двуслойните несвиваеми флуиди Мур и Рийд [23] предлагат следната вълнова функция за основното състояние ($m = 2$, $w_j := z_{N+j}$)

$$\Phi_{\text{Pf}}(z_i; z_{N+j}) = \text{Pf} \left(\frac{1}{z_i - z_j} \right) \prod_{1 \leq i < j \leq 2N} (z_i - z_j)^m \exp \left(-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{2N} |z_i|^2 \right), \quad (5.1.1)$$

където по определение *Пфафианът* на една антисиметрична матрица $M_{ij} = -M_{ji} (= 1/(z_i - z_j))$ е

$$\text{Pf}(M_{ij}) = \frac{1}{2^N N!} \sum_{\sigma \in S_{2N}} \text{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^N M_{\sigma(2k-1), \sigma(2k)}. \quad (5.1.2)$$

Собствената стойност на пълния орбитален момент (пълната степен на хомогенност) $mN(2N - 1) - N$ и броят на квантите на магнитния поток $N_{\phi}^{\text{Pf}} = m(2N - 1) - 1$ (максималната степен на която и да е координата z_i) остават същите като тези за 331 модела.

Както се вижда от у-ние (5.1.2) Пфафианът е напълно антисиметричен относно размяната $z_i \leftrightarrow z_j$ за разлика от детерминантата $\det [1/(z_i - w_j)]$ (която е антисиметрична относно $z_i \leftrightarrow z_j$ и $w_i \leftrightarrow w_j$, но няма определена симетрия относно $z_i \leftrightarrow w_j$), което ни навежда на мисълта, че електроните в двата слоя, с координати z_i, w_j съответно, са неразличими.

От друга страна, както е показано в Допълнение С, Пфафианът се получава математически от детерминантата чрез пълна антисиметризация по z_1, \dots, z_{2N} . Нека припомним, че детерминантата се получаваше като корелационна функция на Дирак–Вайлоуви фермиони. Тогава, можем да разглеждаме Пфафианът като получен от Дирак–Вайлоувия модел при условие, че фермионните оператори Ψ, Ψ^* определени със

$$\Psi^*(z) = \frac{\phi^+(z) + i\phi^-(z)}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \phi^+(z) = \frac{\Psi^*(z) + \Psi(z)}{\sqrt{2}} \quad (5.1.3a)$$

$$\Psi(z) = \frac{\phi^+(z) - i\phi^-(z)}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \phi^-(z) = \frac{\Psi^*(z) - \Psi(z)}{i\sqrt{2}} \quad (5.1.3b)$$

отговарящи на електроните в двата слоя, станат неразличими, т.е. Пфафовият модел се получава от Дирак–Вайлоувия (респ. 331 модела ако отчитаме и анионната част на теорията) в граничния преход

$$\Psi^*(z) - \Psi(z) = i\sqrt{2}\phi^-(z) \rightarrow 0. \quad (5.1.4)$$

От физическа гледна точка, този преход може да се интерпретира като границата, в която потенциалната бариера между двата слоя клони към нула, тъй като в този случай тунелните ефекти между двата слоя доминират, размивайки слоевете, и електроните стават практически неразличими. Операторната реализация на тази идея, предложена първоначално от Грейтер и съавтори [33] е основната задача поставена в тази глава.

Реалната и имагинерната част на Вайловия фермион $\Psi^*(z)$ са всъщност реални Майоранови фермиони удовлетворяващи следните антикомутационни съотношения

$$[\varphi^a(z), \varphi^b(w)]_+ = \delta^{ab} \delta(z-w), \quad a, b = \pm. \quad (5.1.5)$$

5.2 Проекция на операторите

Ниско-барьерната граница в модела на Дирак–Вайл, която както видяхме се изразява в това, че единият от Майорановите фермиони $\varphi^-(z)$ се унищожавя, води до специфични промени в алгебрата на наблюдаемите. От гледна точка на конформната алгебра проекцията $\varphi^-(z) \rightarrow 0$ означава редукция на пълния тензор на енергията и импулса [66] (т.е. изваждане на тензора на енергията породен от Майорановия фермион $\varphi^-(z)$ [B])

$$T_{\text{Pf}}(z) = T_{331}(z) - \frac{1}{2}:\varphi^-(z)\partial\varphi^-(z):, \quad (5.2.1)$$

което намалява централния товар от $c_{331} = 2$ до $c_{\text{Pf}} = 2 - 1/2 = 3/2$, т.е.

$$T_{\text{Pf}}(z)T_{\text{Pf}}(w) \sim \frac{3/4}{(z-w)^4} + \frac{2T_{\text{Pf}}(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T_{\text{Pf}}(w)}{z-w}. \quad (5.2.2)$$

Следователно хиралната алгебра на Пфафовия модел, чиято неутрална част се поражда от оставащия Майоранов фермион, се получава отново като \mathbb{Z}_2 орбиформ [B] (породен от правилото на четност (4.5.5) наследено от 331 модела) на тензорното произведение от хиралната алгебра $\widehat{su(2)}_1$ на анионната част и тази на модела на Изинг породена от оставащия Майоранов фермион $\varphi^+(z)$, т.е.

$$\mathcal{A}(\text{Pf}) = \mathcal{A}_{331}(\varphi^- \rightarrow 0) = \left(\mathcal{A}_{\text{Ising}} \otimes \widehat{su(2)}_1 \right) / \mathbb{Z}_2. \quad (5.2.3)$$

От тук нататък ще означаваме оставащия Майоранов фермион като $\boxed{\varphi(z) := \varphi^+(z)}$.

5.3 Корелационни функции

В този параграф ще покажем, че $2N$ -точковата корелационна функция на $\varphi(z)$ възпроизвежда Пфафиана.

Твърдение 5.1 *Корелационната функция на Майорановия фермион $\varphi(z)$ може да се запише във вида*

$$\langle 0 | \prod_{i=1}^{2N} \varphi(z_i) | 0 \rangle = \text{Pf} \left(\frac{1}{z_i - z_j} \right). \quad (5.3.1)$$

Доказателство: Да разгледаме корелационната функция на полето $\varphi(z)$ от (5.1.3а)

$$\langle 0 | \prod_{i=1}^{2N} \varphi(z_i) | 0 \rangle = \frac{1}{(\sqrt{2})^{2N}} \langle 0 | \prod_{i=1}^{2N} \left(\Psi^*(z_i) + \Psi(z_i) \right) | 0 \rangle. \quad (5.3.2)$$

Като приложим теоремата на Вик за операторното произведение под вакуумното средно виждаме, че ненулев принос към корелационната функция ще дадат само членовете с максимален брой сдвоявания, в които броят на Ψ^* съвпада с този на Ψ и е равен на N , понеже всички полета под вакуумното средно трябва да са сдвоени и единственото ненулево Виково сдвояване е $\langle 0 | \Psi^*(z) \Psi(w) | 0 \rangle$. Съществуват точно $\binom{2N}{N}$ различни члена, в които всички полета са сдвоени, понеже трябва да поставим N на брой "*" върху N полета измежду $2N$ такива без повторение.

Координатите z_1, \dots, z_{2N} на полевите оператори в у-ние (5.3.2) са подредени съгласно $|z_i| > |z_j|$ за $i < j$, но ние ще използваме антисиметрията на фермионната корелационна функция за да преместим най-отляво всички оператори Ψ^* без да ги разместваме помежду им.¹⁸ При фиксирани аргументи на полетата $\Psi^*(z_i)$, всяко пълно сдвояване дефинира пермутация на индексите на аргументите на Ψ . Първият член в у-ние (5.3.2) $\langle 0 | \prod_{i=1}^N \Psi^*(z_i) \prod_{i=1}^N \Psi(z_i) | 0 \rangle$ отговаря на единичната пермутация. Очевидно всички пермутации даващи ненулев принос в у-ние (5.3.2) са от вида $z_i \leftrightarrow z_{N+i}$, т.е. само такива, които разменят елементи от двете групи индекси ($\{z_i, i = 1, \dots, N\}$ и $\{z_{N+i}, i = 1, \dots, N\}$) без размествания във всяка група. Следователно

$$\langle 0 | \prod_{i=1}^{2N} \varphi(z_i) | 0 \rangle = \frac{1}{2^N} \sum_{\sigma \in S_{2N}/(S_N \oplus S_N)} \text{sgn}(\sigma) \langle 0 | \prod_{i=1}^N \bar{\Psi}(z_{\sigma(i)}) \prod_{i=1}^N \Psi(z_{\sigma(N+i)}) | 0 \rangle. \quad (5.3.3)$$

По-нататък можем да продължим сумирането по цялата симетрична група S_{2N} благодарение на първоначалната антисиметрия на индексите във всяка група (разбира се трябва да разделим на $|S_N \oplus S_N| = (N!)^2$)

$$\begin{aligned} \langle 0 | \prod_{i=1}^{2N} \varphi(z_i) | 0 \rangle &= \frac{1}{2^N (N!)^2} \sum_{\sigma \in S_{2N}} \text{sgn}(\sigma) \langle 0 | \prod_{i=1}^N \bar{\Psi}(z_{\sigma(i)}) \prod_{i=1}^N \Psi(z_{\sigma(N+i)}) | 0 \rangle = \\ &= \frac{1}{2^N (N!)^2} \sum_{\sigma \in S_{2N}} \text{sgn}(\sigma) \det \left(\frac{1}{z_{\sigma(i)} - z_{\sigma(N+j)}} \right) \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

От друга страна обаче, съгласно Допълнение С пълната антисиметризация на детерминантата съвпада с Пфафиана. ■

Следователно, при проекцията (5.1.4) корелационната функция (5.3.2) на Дирак–Вайловите фермиони преминава в корелационна функция на модела на Изинг.

5.4 Проекция на характеристиките

Операторната проекция (5.1.4) води естествено до промяна и във вида на характеристиките на конформната група. За да намерим последните можем директно да пресметнем следата като използваме фермионен базис във Фоковото пространство за модела на Изинг [16]. Но за да илюстрираме ефекта от проектирането на φ^- ще пресметнем

¹⁸Строго погледнато това е коректно само в пълната теория, където пълната вълнова функция вече не е сингуларна при $z_i \rightarrow z_j$. Тогава δ -функциите, които се появяват при разместване на аргументите се унищожават от съответни полиномиални фактори от анионната част.

характерите като използваме условието на Кубо–Мартин–Швингер (КМШ) [55, 27]. Гибсовите равновесни състояния с обратна температура β

$$\langle A \rangle_\beta = \frac{1}{Z(\beta)} \operatorname{tr}_{\mathcal{H}} A e^{-\beta H}, \quad Z(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tr}_{\mathcal{H}} e^{-\beta H}, \quad (5.4.1)$$

могат да бъдат характеризирани чрез следното условие: За всеки два елемента A и B от алгебрата на полетата и при зададен автоморфизъм на еволюция във времето $\alpha_t(B) \stackrel{\text{def}}{=} \exp(itH) B \exp(-itH)$, породен от Хамилтониана $H = L_0 - \frac{1}{24}$ на системата, функцията $\langle A \alpha_t(B) \rangle_\beta$ може да се разглежда като гранична стойност на аналитична функция $\langle A \alpha_\zeta(B) \rangle_\beta$ холоморфна в ивицата $0 < \operatorname{Im} \zeta < \beta$ и удовлетворяваща граничното условие

$$(\text{КМШ}) : \quad \langle A \alpha_{t+i\beta}(B) \rangle_\beta = \langle \alpha_t(B) A \rangle_\beta. \quad (5.4.2)$$

Като използваме сандартната термодинамична връзка между топлинното средно на енергията $\langle L_0 - c/24 \rangle_\beta$ и логаритмичната производна на статсумата $Z(\beta)$

$$\langle L_0 - \frac{c}{24} \rangle_\beta = \frac{1}{Z(\beta)} \operatorname{tr}_{\mathcal{H}} \left(L_0 - \frac{c}{24} \right) e^{-\beta(L_0 - c/24)} = -\frac{1}{Z(\beta)} \frac{\partial}{\partial \beta} Z(\beta) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(\beta) \quad (5.4.3)$$

можем да възстановим статсумата (по-точно хиралната статсума, т.е. характера на съответното неприводимо представяне) ако знаем топлинното средно на енергията. Последното може да бъде пресметнато конструктивно чрез условието КМШ. Наистина, нека използваме представянето на оператора на енергията L_0 чрез модите $\Psi_n^{(*)}$ на Вайловите фермиони $\Psi^{(*)}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Psi_{n-\alpha+1/2}^{(*)} z^{-n-\alpha}$ (вж. [27], стр. 99)

$$L_0 = \frac{\alpha^2}{2} + \sum_{\mu > 0} \mu (\Psi_{-\mu}^* \Psi_\mu + \Psi_{-\mu} \Psi_\mu^*) = \frac{\alpha^2}{2} + \sum_{\mu > 0} \mu (\varphi_{-\mu}^+ \varphi_\mu^+ + \varphi_{-\mu}^- \varphi_\mu^-),$$

$$\mu = m + \alpha - \frac{1}{2} \in \alpha - \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_+ \quad (5.4.4)$$

където $\alpha = 0$ за NS- сектора и $\alpha = \frac{1}{2}$ за R-сектора. Тогава, топлинното средно на енергията може да се запише

$$\langle L_0 \rangle_\beta = \frac{\alpha^2}{2} + \sum_{\mu > 0} \mu \left(\langle \varphi_{-\mu}^+ \varphi_\mu^+ \rangle_\beta + \langle \varphi_{-\mu}^- \varphi_\mu^- \rangle_\beta \right), \quad (5.4.5)$$

а за пресмятане на топлинното средно на Майорановите фермиони ще използваме точно КМШ условието:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{-\mu}^\pm \alpha_{0+i\beta}(\varphi_\mu^\pm) \rangle_\beta &\stackrel{\text{КМШ}}{=} \langle \alpha_0(\varphi_\mu^\pm) \varphi_{-\mu}^\pm \rangle_\beta = \langle \varphi_\mu^\pm \varphi_{-\mu}^\pm \rangle_\beta = \\ &= \underbrace{\langle [\varphi_\mu^\pm, \varphi_{-\mu}^\pm]_+ \rangle_\beta}_{\delta_{\mu+(-\mu),0}} - \langle \varphi_{-\mu}^\pm \varphi_\mu^\pm \rangle_\beta = 1 - \langle \varphi_{-\mu}^\pm \varphi_\mu^\pm \rangle_\beta. \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

От друга страна, $\alpha_{i\beta}(\varphi_{\mu}^{\pm}) = e^{i(-i)\mu\beta}\varphi_{\mu}^{\pm}$ и следователно

$$(e^{\beta\mu} + 1)\langle\varphi_{-\mu}^{\pm}\varphi_{\mu}^{\pm}\rangle_{\beta} = 1 \quad \Rightarrow \quad \langle\varphi_{-\mu}^{\pm}\varphi_{\mu}^{\pm}\rangle_{\beta} = \frac{1}{e^{\beta\mu} + 1}. \quad (5.4.7)$$

Така за топлинното средно на енергията получаваме

$$\langle L_0 - \frac{1}{24} \rangle_{\beta} = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{24} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m + \alpha - 1/2}{1 + e^{\beta(m + \alpha - 1/2)}} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \chi_{\alpha}(\beta). \quad (5.4.8)$$

След като интегрираме по β

$$\int_{\beta}^{\infty} \left\{ -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \chi_{\alpha}(\beta) - \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{24} \right) \right\} d\beta = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \ln \left(1 + e^{-\beta(m + \alpha - 1/2)} \right), \quad (5.4.9)$$

трябва да наложим асимптотичното условие (изразяващо факта, че в нискотемпературната граница принос към хиралната статасума дава само младшият вектор в съответния сектор на суперотбор \mathcal{H}_{α} , чиято размерност е $\Delta = \alpha^2/2$)

$$\lim_{q \rightarrow 0} q^{-(\Delta - c/24)} \chi_{\alpha}(\beta) = \lim_{q \rightarrow 0} q^{-(\Delta - c/24)} \operatorname{tr}_{\mathcal{H}_{\Delta}} q^{L_0 - c/24} = \lim_{q \rightarrow 0} (1 + d_1 q + d_2 q^2 + \dots) = 1, \\ q = e^{-\beta}, \quad (c = 1), \quad d_i \stackrel{\text{def}}{=} \dim \mathcal{H}_i \quad (L_0 \mathcal{H}_i = i \mathcal{H}_i), \quad (5.4.10)$$

което премахва константния член в лявата страна на (5.4.9) така, че получаваме

$$\chi_{\alpha}(\beta) = q^{\frac{\alpha^2}{2} - \frac{c}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + q^{n + \alpha - 1/2} \right)^2. \quad (5.4.11)$$

Забележка 5.1 Безкрайният ред в у-ние (5.4.8) е равномерно сходящ само в интервала $[\varepsilon, \infty)$, където $\varepsilon > 0$. Наистина, да използваме критерия на Абел [67] за равномерна сходимост: функционалният ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(q) b_n(q), \quad a_n(q) = (n + \alpha - 1/2) q^{n + \alpha - 1/2}, \quad b_n = \frac{1}{1 + q^{n + \alpha - 1/2}} \quad (5.4.12)$$

е равномерно сходящ ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(q)$ е сходящ, а редът $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(q)$ е равномерно ограничен, т.е. $|b_n(q)| \leq M, \forall n \forall q$. В този случай първият ред е абсолютно сходящ $\sum_{n=1}^{\infty} (n + \alpha - 1/2) q^{n + \alpha - 1/2} = \frac{q^{1 + \alpha - 1/2}}{1 - q} \left[\frac{1}{1 - q} + \alpha - 1/2 \right]$ за $|q| < 1$, а $\left| \frac{1}{1 + q^{n + \alpha - 1/2}} \right| \leq \frac{1}{1 - e^{\operatorname{Re} \beta (\alpha + 1/2)}}$. Следователно почленното интегриране е законно само в този интервал (за $\varepsilon = \operatorname{Re} \beta > 0$), т.е. точката $\beta = 0$ с безкрайна температура трябва да се изключи.

Забележка 5.2 Условието КМШ може да бъде обобщено за Голям каноничен ансамбъл [55] като заменим навсякъде $H \rightarrow H(\mu) := H - \mu N$, (μ е химичния потенциал) което поражда нов автоморфизъм на времевата еволюция $\alpha_t \rightarrow \alpha_t^{\mu}$. В този случай характеристиките на секторите на суперотбор за Дирак–Вайловите фермиони се получават (по същия начин) във вида ($w := e^{\beta\mu}$)

$$\chi_{\alpha}(\beta) = q^{\frac{\alpha^2}{2} - \frac{c}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + w q^{n + \alpha - 1/2} \right) \left(1 + w^{-1} q^{n + \alpha - 1/2} \right). \quad (5.4.13)$$

Нека сега направим проекцията от Дирак–Вайловия модел към Пфафовия – това означава да извадим от тензора на енергията и импулса приноса на полето $\phi^-(z)$. За нулевия мод това означава, че

$$L_0^{\text{Pf}} = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{2} + \sum_{\nu>0} \nu \phi_{-\nu}^+ \phi_{\nu}^+ \Rightarrow \langle L_0^{\text{Pf}} - \frac{1/2}{24} \rangle_{\beta} = \frac{\alpha^2}{4} - \frac{1}{48} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \alpha - 1/2}{1 + e^{\beta(n + \alpha - 1/2)}} \quad (5.4.14)$$

където отчетохме, че премахването на $\phi^-(z)$ намалява централния заряд на $c = 1/2$. След интегрирането получаваме характеристиките на Пфафовия модел във вида

$$\chi_{\alpha}^{\text{Pf}}(\beta) = q^{\frac{\alpha^2}{4} - \frac{1}{48}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{n + \alpha - 1/2}), \quad (5.4.15)$$

т.е. втората степен в (5.4.11) се заменя с първа.

Забележка 5.3 Коефициентът $\alpha^2/4$ в у-ние (5.4.14) се получава директно при пресмятането на комутатора $[L_1^{\text{Pf}}, L_{-1}^{\text{Pf}}] = 2L_0^{\text{Pf}}$. По същия начин е получен и коефициентът $\alpha^2/2$ в у-ние (5.4.4).

Характерите (5.4.15) могат да бъдат идентифицирани с тези на модела на Изинг [27].

По-нататък, тъй като Пфафовия модел наследява правилото на четност от 331 модела трябва всъщност да намерим характеристиките на четната част на модела на Изинг (т.е. на тази, която се поражда от ТЕИ, а не на супералгебрата на Майорановите фермиони) [В].

$$\begin{aligned} \hat{K}_0 &= \frac{q^{-\frac{1}{48}}}{2} \left(\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{n-\frac{1}{2}}) + \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{n-\frac{1}{2}}) \right) & (= \chi_0(\tau; \text{Ising})) \\ \hat{K}_2 &= \frac{q^{-\frac{1}{48}}}{2} \left(\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{n-\frac{1}{2}}) - \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{n-\frac{1}{2}}) \right) & (= \chi_{1/2}(\tau; \text{Ising})) \\ \hat{K}_1 &= q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n) & (= \chi_{1/16}(\tau; \text{Ising})) \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

Забележка 5.4 Характерът $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{n-\frac{1}{2}})$ се получава след S -трансформация на (5.4.15) или като редукция на Дирак–Вайловите характери (5.4.13) при $w = -1$, т.е. чрез вземане на квадратен корен.

Тогава пълните характери на Пфафовия модел със $c = 3/2$ се получават като заместим в (4.9.34) характеристиките $K_l(\tau; 4)$ на бозонната подалгебра на Дирак–Вайловата част във 331 с характеристиките $\hat{K}_l(\tau)$, т.е.

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_r^1 &= \hat{K}_0 K_{2r}(\tau, 2\zeta; 8) + \hat{K}_2 K_{2r-4}(\tau, 2\zeta; 8) \\ \hat{\chi}_r^2 &= \hat{K}_1 K_{r+\frac{1}{2}}(\tau, \zeta; 2) \\ \hat{\chi}_r^3 &= \hat{K}_0 K_{2r-4}(\tau, 2\zeta; 8) + \hat{K}_2 K_{2r}(\tau, 2\zeta; 8), \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

След редукцията (5.1.4, 5.2.1) получаваме следната модулаторно (S, T^2, U, V) инвариантна статистическа сума (срв. [41])

$$Z^{Pf} = \sum_{r=0}^1 \left\{ |\chi_r^1|^2 + |\chi_r^2|^2 + |\chi_r^3|^2 \right\}, \quad (5.4.18)$$

където предполгаме, че характерите (5.4.17) са допълнително умножени на същите CZ-фактори както тези за 331 модела (4.10.2). С други думи, при ниско-барьерната граница статсумата за 331 модела преминава в тази за Пфафовия модел [B].

5.5 Неабелева статистика

За удобство при пресмятането на S - матрицата ще преозначим характерите (5.4.17)

$$\begin{aligned} \text{ch}_0(\tau, \zeta) &= \chi_0^1(\tau, \zeta), & \text{ch}_2(\tau, \zeta) &= \chi_1^1(\tau, \zeta), & \text{ch}_{-2}(\tau, \zeta) &= \chi_1^3(\tau, \zeta), \\ \text{ch}_4(\tau, \zeta) &= \chi_0^3(\tau, \zeta), & \text{ch}_1(\tau, \zeta) &= \chi_0^2(\tau, \zeta), & \text{ch}_{-1}(\tau, \zeta) &= \chi_1^2(\tau, \zeta). \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

Тогав, S - матрицата действаща върху характерите $\text{ch}_n(\tau, \zeta)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, 4$) може да бъде записана в компактен вид [B]

$$S_{mn} = \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} \sigma_m \sigma_n \right) e^{-i \frac{\pi}{4} mn}, \quad \sigma_n = \frac{3 - (-1)^n}{2}, \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, 4. \quad (5.5.2)$$

Нейната размерност определя топологичния порядък на флуида, който в случая е 6. Съответните пространства на представянията \mathcal{H}_λ ($\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, 4$) имат минимални конформни тегла.

$$\Delta_0 = 0, \quad \Delta_{\pm 1} = \frac{1}{8}, \quad \Delta_{\pm 2} = \frac{1}{4}, \quad \Delta_4 = \frac{1}{2}. \quad (5.5.3)$$

Квантовите размерности $d_n = S_{0n}/S_{00}$ на представянията (± 1) (с характери $\text{ch}_{\pm 1}(\tau, \zeta)$) са $\sqrt{2}$, което е израз на неабелевата статистика на квазичастиците. Съответните правила на сливане могат да се представят

$$[\pm 1] \times [\pm 1] = [2] + [-2], \quad [1] \times [-1] = [0] + [4]. \quad (5.5.4)$$

Останалите правила на сливане са абелеви: тривиалните сливания с вакуума

$$[0] \times [n] = [n] \text{ и}$$

$$\begin{array}{lll} [+1] \times [2] = [-1] & [1] \times [-2] = [-1] & [1] \times [4] = [1] \\ [-1] \times [2] = [1] & [-1] \times [-2] = [1] & [-1] \times [4] = [-1] \\ [2] \times [2] = [4] & [2] \times [-2] = [0] & [2] \times [4] = [-2] \\ [-2] \times [-2] = [4] & [-2] \times [4] = [2] & [4] \times [4] = [0] \end{array}$$

Трябва да отбележим, че в случая неабелевата статистика се получава при калибровъчна редукция (в този случай това е проекцията $\phi^- \rightarrow 0$) на (решетъчен) абелев модел. При тази проекция $W_{1+\infty}$ симетрията се нарушава [B]. (В случая на Пфафиана знак за това е още фактът, че резултатният централен товар, $c = \frac{3}{2}$, не е цял.)

6 Модел на Халдейн–Резай

6.1 Общи сведения

През 1987 г. беше открито първото плато ($\nu = 5/2$ в еднослойна проба на първото възбудено ниво на Ландау) с четен знаменател на фактора на запълване [68]. Изследванията на зависимостта на височината на забранения праг от ъгъла на наклон на магнитното поле показват [36], че това състояние е неполяризирано (или частично поляризирано). Една година по-късно Халдейн и Резай [25] показват, че за дадено хипотетично взаимодействие (псевдопотенциали в т.нар. "hollow-core" модел [69, 70]) може да съществува неизродено основно състояние за несвиваем флуид с фактор на запълване $\nu = 1/2$. Основната идея е, че електроните от една и съща циклотронна орбита в двата слоя първо се сдвояват (образувайки бозонни) и след това кондензират в симетричен Лафлинов флуид. Предложената от Халдейн и Резай вълнова функция (за $m = 2$)

$$\Psi_{HR}(z_i; w_j) = \det \frac{1}{(z_i - w_j)^2} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (z_i - z_j)^m (w_i - w_j)^m \prod_{i,j=1}^N (z_i - w_j)^m e^{-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^N (|z_i|^2 + |w_i|^2)}, \quad (6.1.1)$$

където z_i и w_j са съответно координатите (в комплексната равнина) на електроните в двата слоя, е експлицитно неполяризирана, т.е. спин-синглет относно спина на електроните в двата слоя. По-точно, координатната част на многочастичната вълнова функция (при отсъствие на спин-орбитално взаимодействие) на N -електронната система със пълнен спин S трябва да удовлетворява Фоковите условия [37, 38]:

- (i) да бъде антисиметрична относно размяната на първите $N_{\uparrow} = N/2 + S$ и вторите $N_{\downarrow} = N/2 - S$ координати поотделно
- (ii) антисиметризацията по повече от N_{\uparrow} координати да дава 0, т.е.

$$\left(1 - \sum_{j=1}^N e(z_1, w_j) \right) \Psi_{HR}(z_i; w_j) = 0, \quad (6.1.2)$$

където $e(z_1, w_j)$ означава размяната на координатите z_1 и w_j .

Лесно се проверява, че вълновата функция Ψ_{HR} удовлетворява второто условие за $S = 0$, т.е. това е спин-синглетно състояние, докато Ψ_{331} е спин-триплет, т.е. $S = 1$.) Това ново основно състояние, различно от тези за моделите 331 и Pf дефинира нов клас на универсалност.

Пълният орбитален момент на основното състояние (пълната степен на хомогенност) е $mN(2N - 1) - 2N$, а броят на квантите на магнитния поток $N_{\Phi}^{z,w}$ (максималната степен на произволна координата z_i или w_j) е $N_{\Phi}^{z,w} = m(2N - 1) - 2$, (за $m = 2$) т.е. с 1 по-малка от тази за 331 модела.

Изследването на ефективната конформна теория на полето за това състояние [40, 39] показва, че централния товар на алгебрата на Вирасоро (при определени предположения) е $c = -2$ поради което теорията е неунитарна, т.е. съществуват състояния

с отрицателен квадрат на нормата. За преодоляването на проблемите с отрицателните норми е предложена теория без конформна симетрия [71]. Оказва се обаче, че тази теория е нелокална [В], т.е. нарушава принципа за причинност, поради което е нефизична.

По-нататък, статистическата сума (респ. разширените характеристики на конформната група) не са модуларино инвариантни (ковариантни) [72]. Нещо повече – при S -трансформация се получават характеристики пораждащи отрицателни размерности на собствените подпространства на оператора на енергията, което е недопустимо.

Проблематична е и една от най-важните характеристики на Холовите флуиди – топологичният ред на състоянието HR. Определяйки топологичния ред като броя на независимите основни състояния върху тор [70, 73], т.е. налагайки нетривиални периодични условия, са намерени 10 такива състояния за HR [75, 49]. Това обаче не може да бъде оценено от гледна точка на съществуващата КТП поради присъствието на отрицателните норми, т.е. топологичния ред на състоянието HR е все още неизвестен.

6.2 Конформна теория на полето за "неутралната" част

Като изключим традиционната експонента в (6.1.1) вълновата функция е аналитична функция на z_i и w_j . Както е известно, "Лафлиновият" фактор $\prod_{1 \leq i < j \leq N} (z_i - z_j)^2 (w_i - w_j)^2 \prod_{i,j=1}^N (z_i - w_j)^2$ може да бъде реализиран като корелационна функция в рационална конформна теория с $\widehat{u}(1)$ алгебра на токове с централен товар $c = 1$ (Гаусов модел) и квадрат на заряда (или компактификационен радиус) $m = 2$.

В този раздел ще покажем, че "неутралната" част във вълновата функция (детерминантата) може също да бъде представена като корелационна функция в конформна теория на полето, т.е.

$$\det \frac{1}{(z_i - w_j)^2} = (-1)^{N(N-1)/2} \langle 0 | \prod_{i=1}^N \Psi_+(z_i) \prod_{j=1}^N \Psi_-(w_j) | 0 \rangle = \Phi_{ds}^{(N)}(z_i; w_j). \quad (6.2.1)$$

6.2.1 Конформна размерност на полетата Ψ^\pm

Наистина, от 2-точковата функция

$$\frac{1}{(z_1 - w_1)^2} = \langle 0 | \Psi_+(z_1) \Psi_-(w_1) | 0 \rangle = \frac{1}{(z_1 - w_1)^{\Delta_+ + \Delta_-}}$$

виждаме, че сумата от конформните размерности ще бъде $\Delta_+ + \Delta_- = 2$. Последното равенство, при предположението, че Ψ_\pm са първични полета, води до изискването $\Delta_+ = \Delta_- = 1$, понеже само тогава двуточковата функция е ненулева.

6.2.2 Тензор на напреженията

Следвайки Уен [39, 40] предполагаеме, че в операторното разложение липсва член линейен по $(z_1 - w_1)$ (както ще се убедим в края на § 6.4 това е следствие от факта, че

полетата Ψ^\pm имат сумарна размерност равна на 2 -вж. Забележка 6.3)

$$\Psi_+(z_1)\Psi_-(w_1) = \frac{1}{(z_1 - w_1)^2} \left\{ 1 + \frac{2}{c}(z_1 - w_1)^2 \mathcal{T}(w_1) + \dots \right\}. \quad (6.2.2)$$

Тогава, тензорът на напреженията $\mathcal{T}(z)$ може да бъде изразен

$$\mathcal{T}(w_1) = \frac{c}{2} \lim_{z_1 \rightarrow w_1} \left\{ \Psi_+(z_1)\Psi_-(w_1) - \frac{1}{(z_1 - w_1)^2} \right\} = \frac{c}{2} : \Psi_+(w_1)\Psi_-(w_1) : \quad (6.2.3)$$

По-нататък, можем да използваме конформното тъждество на Уорд

$$\langle \mathcal{T}(w_1)\Psi_+(z_2)\Psi_-(w_2) \rangle = \left\{ \frac{1}{(w_1 - z_2)^2} + \frac{\partial_{z_2}}{(w_1 - z_2)} + \frac{1}{(w_1 - w_2)^2} + \frac{\partial_{w_2}}{(w_1 - w_2)} \right\} \langle \Psi_+(z_2)\Psi_-(w_2) \rangle, \quad (6.2.4)$$

където $\langle \dots \rangle := \langle 0 | \dots | 0 \rangle$, за да определим централния заряд c участващ в дефиницията (6.2.3) на $\mathcal{T}(z)$. Наистина,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T}(w_1)\Psi_+(z_2)\Psi_-(w_2) \rangle &= \frac{c}{2} \lim_{z_1 \rightarrow w_1} \left\{ \left\{ \Psi_+(z_1)\Psi_-(w_1) - \frac{1}{(z_1 - w_1)^2} \right\} \Psi_+(z_2)\Psi_-(w_2) \right\} = \\ &= \frac{c}{2} \lim_{z_1 \rightarrow w_1} \left\{ \langle \Psi_+(z_1)\Psi_-(w_1)\Psi_+(z_2)\Psi_-(w_2) \rangle - \frac{1}{(z_1 - w_1)^2} \langle \Psi_+(z_2)\Psi_-(w_2) \rangle \right\} = \\ &= \frac{c}{2} \lim_{z_1 \rightarrow w_1} \left\{ \Phi_{ds}^{(2)}(z_1, z_2; w_1, w_2) - \frac{1}{(z_1 - w_1)^2} \Phi_{ds}^{(1)}(z_1; w_1) \right\}. \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Замествайки $\Phi_{ds}^{(N)}$ от (6.2.1) получаваме

$$\begin{aligned} \frac{c}{2} \lim_{z_1 \rightarrow w_1} \left\{ \frac{1}{(z_1 - w_1)^2(z_2 - w_2)^2} - \frac{1}{(z_1 - w_2)^2(z_2 - w_1)^2} - \frac{1}{(z_1 - w_1)^2} \frac{1}{(z_2 - w_2)^2} \right\} = \\ = \left\{ \frac{1}{(w_1 - z_2)^2} + \frac{\partial_{z_2}}{(w_1 - z_2)} + \frac{1}{(w_1 - w_2)^2} + \frac{\partial_{w_2}}{(w_1 - w_2)} \right\} \frac{1}{(z_2 - w_2)^2}. \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

След извършване на диференцирането в дясната страна получаваме уравнение от което определяме

$$c = -2. \quad (6.2.7)$$

6.2.3 Локални антикомутационни съотношения за полетата $\Psi_\pm(z)$. Нарушение на връзката между спина и статистиката

От факта, че детерминантата е антисиметрична относно размяната на два реда (т.е. $z_i \leftrightarrow z_j$) или два стълба (т.е. $w_i \leftrightarrow w_j$) поотделно следва локалната антикомутативност на полетата, т.е. $[\Psi_\pm(z_1), \Psi_\pm(z_2)]_+ = 0$.

Така получаваме следните антикомутационни съотношения за основните полета [39, 40]:

$$\Psi_\rho(z)\Psi_\sigma(w) \sim \frac{\varepsilon_{\rho\sigma}}{(z-w)^2}, \quad \rho, \sigma = \pm \quad \iff$$

$$[\Psi_+(z), \Psi_-(w)]_+ = -\delta'(z-w), \quad (6.2.8a)$$

$$[\Psi_+(z), \Psi_+(w)]_+ = [\Psi_-(z), \Psi_-(w)]_+ = 0 \quad (6.2.8b)$$

$$\mathcal{T}(z) = :\Psi_-(z), \Psi_+(z):. \quad (6.2.8c)$$

Както е известно [27, 16, 54, 11], спинът в двумерните конформни теории се изразява чрез конформните размерности $S = \Delta - \bar{\Delta}$ на хиралната и анти-хиралната компоненти на полето. В този случай обаче, полетата $\Psi^\pm(z)$ са фермиони с цял спин. Това нарушение на общата теорема за връзка между спина и статистиката [60] за унитарни квантови теории на полето показва, че $\Psi^\pm(z)$ пораждат *неунитарна* квантова теория. Както ще се убедим по-нататък, в пространството на състоянията присъстват вектори с отрицателен квадрат на нормата. Квантовото описание на физически системи в неунитарни теории изисква отделянето на *физическо подпространство*, където скаларното произведение е *положително дефинитно*.

6.2.4 Корелационната функция

Като използваме теоремата на Вик ще покажем, че корелационната функция възпроизвежда детерминантата във вълновата функция (6.1.1).

Твърдение 6.1 Нека $\Psi_\pm(z)$ са (квази)свободни взаимно локални фермионни полета удовлетворяващи $[\Psi_+(z), \Psi_+(w)]_+ = [\Psi_-(z), \Psi_-(w)]_+ = 0$, $[\Psi_+(z), \Psi_-(w)]_+ \neq 0$ (\mathbb{C} – число). Тогава,

$$\langle 0 | \prod_{i=1}^N \Psi_+(z_i) \prod_{j=1}^N \Psi_-(w_j) | 0 \rangle = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \det \left(\underbrace{\Psi_+(z_i) \Psi_-(w_j)} \right) \langle 0 | 0 \rangle, \quad (6.2.9)$$

където

$$\det \left(\underbrace{\Psi_+(z_i) \Psi_-(w_j)} \right) = \sum_{\sigma \in S_N} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^N \underbrace{\Psi_+(z_i) \Psi_-(w_{\sigma(i)})} \quad (6.2.10)$$

Доказателство:

Тъй като полетата $\Psi_\pm(z)$ имат \mathbb{C} -числови антикомутатори можем да приложим фермионната версия на теоремата на Вик за операторното произведение под вакуумното средно

$$\prod_{i=1}^N \Psi_+(z_i) \prod_{j=1}^N \Psi_-(w_j) = \sum_{p=0}^N \sum_{\sigma_p} \underbrace{:\prod_{i=1}^N \Psi_+(z_i) \prod_{j=1}^N \Psi_-(w_j):}, \quad (6.2.11)$$

където в дясната страна се сумира по всевъзможните нормални произведения със p -на брой сдвоявания σ_p . В този случай Виковите сдвоявания за свободните полета са антисиметрични¹⁹

$$[\Psi_\rho(z), \Psi_\sigma(w)]_+ = -\varepsilon_{\rho\sigma} \delta'(z-w) \Rightarrow \Psi_\rho(z) \Psi_\sigma(w) = \frac{\varepsilon_{\rho\sigma}}{(z-w)^2} + :\Psi_\rho(z) \Psi_\sigma(w): \Rightarrow$$

¹⁹За доказателството на теоремата антисиметрията е достатъчна и не е необходим конкретният вид на сдвояванията

$$\underbrace{\Psi_\rho(z)\Psi_\sigma(w)} = \langle 0 | \Psi_\rho(z)\Psi_\sigma(w) | 0 \rangle = \frac{\epsilon_{\rho\sigma}}{(z-w)^2}. \quad (6.2.12)$$

При това, ненулев принос под вакуумното средно ще дават само нормалните произведения с максимален (N) брой сдвоявания, понеже $\langle 0 | \dots | 0 \rangle = 0$ (изключение прави само единичният оператор). Следователно

$$\langle 0 | \prod_{i=1}^N \Psi_+(z_i) \prod_{j=1}^N \Psi_-(w_j) | 0 \rangle = \sum_{\sigma_N} \langle 0 | \prod_{i=1}^N \underbrace{\Psi_+(z_i)\Psi_-(w_{\sigma(i)})}_{\text{сдвояване}} | 0 \rangle, \quad (6.2.13)$$

където в сумата участват само напълно сдвоените нормални произведения (N на брой сдвоявания). По-нататък, ако фиксираме аргументите $\{z_i\}$ на полетата $\Psi_+(z_i)$, всяко пълно сдвояване дефинира пермутация на вторите индекси $\{w_i\}$. Наистина, нека полето $\Psi_+(z_1)$ е сдвояно с $\Psi_-(w_k)$, $\Psi_+(z_2)$ с $\Psi_-(w_l)$ и т.н., до $\Psi_+(z_N)$ с $\Psi_-(w_m)$. Тогава можем да дефинираме изображението $\sigma : \{1, 2, \dots, N\} \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ по следния начин:

$$\begin{aligned} k &= \sigma(1) \\ l &= \sigma(2) \\ &\vdots \\ m &= \sigma(N). \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

Очевидно $\sigma(i) \neq \sigma(i')$ когато $i \neq i'$ понеже след като означим $\sigma(1) = k$ това k изчезва от множеството в което ще бъде дефинирано $\sigma(i)$, $i = 2, 3, \dots, N$. От друга страна, по построение, броят на елементите $|\text{Image}(\sigma)|$ на образа на изображението σ , е точно N , което доказва, че σ е взаимно-еднозначно изображение на $\{1, 2, \dots, N\}$, т.е. $\sigma \in S_N$ е пермутация. Следователно

$$\begin{aligned} \langle 0 | \prod_{i=1}^N \Psi_+(z_i) \prod_{j=1}^N \Psi_-(w_j) | 0 \rangle &= \\ &= \sum_{\sigma \in S_N} \langle 0 | \underbrace{\Psi_+(z_1)\Psi_-(w_{\sigma(1)})}_{\text{сдвояване}} \underbrace{\Psi_+(z_2)\Psi_-(w_{\sigma(2)})}_{\text{сдвояване}} \dots \underbrace{\Psi_+(z_N)\Psi_-(w_{\sigma(N)})}_{\text{сдвояване}} | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (6.2.15)$$

където $\Psi_+(z_1)$ се сдвоява с $\Psi_-(w_{\sigma(1)})$, $\Psi_+(z_2)$ с $\Psi_-(w_{\sigma(2)})$ и т.н. до $\Psi_+(z_N)$ с $\Psi_-(w_{\sigma(N)})$ ($\sigma(1) = k$, $\sigma(2) = l$, \dots , $\sigma(N) = m$). По-нататък можем да използваме антисиметрията на фермионното сдвояване за да подредим операторите $\Psi_-(w_i)$ в обратен ред, т.е.

$$\prod_{i=1}^N \Psi_-(w_i) = (-1)^{N(N-1)/2} \prod_{i=N}^1 \Psi_-(w_i). \quad (6.2.16)$$

Следователно, за корелационната функция можем да напишем

$$\langle 0 | \prod_{i=1}^N \Psi_+(z_i) \Psi_-(w_i) | 0 \rangle = \sum_{\sigma \in S_N} \langle 0 | \prod_{i=1}^N \Psi_+(z_i) \prod_{j=N}^1 \underbrace{\Psi_-(w_{\sigma(j)})}_{\text{сдвояване}} | 0 \rangle, \quad (6.2.17)$$

където сдвояванията свързват $z_i \leftrightarrow w_{\sigma(i)}$. По-нататък, отново ще използваме антисиметрията на второто операторно произведение за да подредим сдвояваните оператори "един до друг"

$$\prod_{j=N}^1 \Psi_-(w_j) = \prod_{j=N}^1 \Psi_-(w_{\sigma^{-1}(\sigma(j))}) = \text{sgn}(\sigma^{-1}) \prod_{j=N}^1 \Psi_-(w_{\sigma(j)}). \quad (6.2.18)$$

Така, в крайна сметка, (отчитайки $\text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma)$) получаваме

$$\begin{aligned} \langle 0 | \prod_{i=1}^N \Psi_+(z_i) \Psi_-(w_i) | 0 \rangle &= \\ &= \sum_{\sigma \in S_N} \text{sgn}(\sigma) \langle 0 | \underbrace{\Psi_+(z_1) \cdots \Psi_+(z_{N-1}) \Psi_+(z_N) \Psi_-(w_{\sigma(N)}) \Psi_-(w_{\sigma(N-1)}) \cdots \Psi_-(w_{\sigma(1)})}_{\text{reordered}} | 0 \rangle = \\ &= \sum_{\sigma \in S_N} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^N \underbrace{\Psi_+(z_i) \Psi_-(w_{\sigma(i)})}_{\text{paired}} \langle 0 | 0 \rangle = \det \left(\underbrace{\Psi_+(z_i) \Psi_-(w_j)}_{\text{matrix}} \right) \langle 0 | 0 \rangle. \blacksquare \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

6.3 Фермионната двойка духове ξ - η

Да въведем Лорановото развитие на основните полета $\Psi_{\pm}(z)$ пораждащи хиралната алгебра

$$\Psi_{\pm}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Psi_n^{\pm} z^{-n-1}, \quad (6.3.1)$$

които имат конформна размерност 1. Антикмутационните съотношения (6.2.8) могат да бъдат записани чрез Лорановите моди Ψ_n^{\pm} по следния начин

$$[\Psi_n^{\rho}, \Psi_m^{\sigma}]_+ = \oint \frac{dw}{2\pi i} \text{Res}_{z \rightarrow w} z^n w^m \Psi_{\rho}(z) \Psi_{\sigma}(w) = \epsilon_{\rho\sigma} n \delta_{n+m,0} \quad (6.3.2)$$

На тензора на енергията (6.2.8с) в хиралната теория съответства състоянието $\mathcal{T}(0)|0\rangle$. За да съществува това състояние както и условието енергията да е ограничена отдолу, заедно с изискването вакуума да има минимална енергия водят до

$$\Psi_n^{\pm} |0\rangle = 0, \quad n \geq 0. \quad (6.3.3)$$

Трябва да отбележим, че съгласно антикомутационните съотношения (6.3.2) нулевите моди на $\Psi_{\pm}(z)$ антикомутират с всичко останало, така че за тях можем да приложим фермионната версия на лемата на Шур²⁰:

Твърдение 6.2 (Супер-лема на Шур) Нека \mathcal{V} е векторно пространство, което е неприводимо относно действието на операторите $\{X_i\}$ и нека съществува оператор A , който комутира или антикомутира с всяко X_i , т.е.

$$\forall X_i : \quad A X_i = \epsilon_i X_i A, \quad \epsilon_i = \pm 1.$$

²⁰ Дисертантът благодаря на Божко Бакалов за полезната дискусия по този въпрос.

Тогава операторът A има вида ($\alpha \in \mathbb{C}$)

$$A = \alpha \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \pm 1 \end{pmatrix}. \quad (6.3.4)$$

Доказателство:

1. Операторът A има поне един собствен вектор $|v\rangle$, такъв че

$$A|v\rangle = \alpha|v\rangle.$$

2. Векторът $X_i|v\rangle$ е отново собствен за A но със собствена стойност $\varepsilon_i\alpha$, т.е.

$$A(X_i|v\rangle) = \varepsilon_i X_i A|v\rangle = \varepsilon_i \alpha (X_i|v\rangle).$$

3. Пространството

$$N_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{ |x\rangle \in \mathcal{V} \mid A|x\rangle = \pm\alpha|x\rangle \} \subset \mathcal{V}$$

е инвариантно относно действието на $\{X_i\}$, но \mathcal{V} е неприводимо, следователно $N_\alpha \equiv \mathcal{V}$. Накрая да напомним, че N_α се състои от вектори, които са собствени за A , следователно $A_j^i = \varepsilon_i \alpha \delta_j^i$. ■

Забележка 6.1 Смесът на това обобщение на лемата на Шур става съвсем ясен, когато забележим, че за оператора A^2 е в сила стандартната лема на Шур и следователно $A = \alpha^2 1$. Тогава кваднатният корен ще даде отново диагонална матрица, чиито собствени стойности ще бъдат $\pm\alpha$. Типичен пример са матриците на Паули: σ_3 антикомутира с останалите и комутира със себе си; следователно $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Трябва да отбележим, че $(\sigma_1)^2 = (\sigma_2)^2 = 1$, но σ_1 и σ_2 не са диагонални. Те обаче могат да бъдат диагонализирани чрез подходящо въртене, т.е. Твърдение 6.2 се отнася до собствените стойности на дадена матрица. Това е едно отличие от бозонния случай, където естествено единичният оператор е диагонал в всеки базис.

Съгласно Твърдение 6.2 нулевите моди Ψ_0^\pm ще бъдат оператори от типа $\alpha \text{diag}(\pm 1, \pm 1, \dots)$. Тук обаче, $(\Psi_0^\pm)^2 = 0$, следователно $\alpha = 0$ (същото следва и от (6.3.3), но само за вакуумното представяне). Така стигаме до извода, че във всяко неприводимо представяне на супералгебрата породена от Ψ^\pm е в сила $\boxed{\Psi_0^\pm \equiv 0}$ (това ще бъде вярно и във всяко друго представяне).

Както ще видим по-нататък съществуването на фермионни нулеви моди е условие за непротиворечивост в теорията, защото се оказва, че $\langle 0|0\rangle = 0$ и е необходим втори вакуум $|0'\rangle$ с фермионна четност така че $\langle 0|0'\rangle \neq 0$ (виж § 6.5). Затова ще разширим хиралната алгебра породена от полетата $\Psi_\pm(z)$, като добавим един оператор ξ_0 такъв, че

$$[\xi_0, \Psi_n^\pm]_+ = 0, \quad n > 0, \quad [\xi_0, \Psi_0^-]_+ = 0, \quad [\xi_0, \Psi_0^+]_+ = 1. \quad (6.3.5)$$

Тогава операторът Ψ_0^- продължава да антикомутира с всички оператори в алгебрата и следователно е 0. Операторът Ψ_0^+ обаче е вече нетривиален понеже има ненулев антикомутатор с ξ_0 .

Удобството от въвеждането на новия оператор ξ_0 ще проличи впоследствие; засега е важно да напомним, че винаги можем да се върнем към изходната алгебра (тази, която се поражда от $\Psi_{\pm}(z)$) като се ограничим до ядрото $Ker\Psi_0^+$ на оператора Ψ_0^+ . Това линейно пространство (т.е. вакуумно представяне на хиралната алгебра) е изоморфно на изходната алгебра съгласно съответствието между полета и състояния в хиралната теория.

В така разширената хирална алгебра можем да дефинираме следните полета

$$\begin{aligned}\xi(z) &= \xi_0 + \underbrace{\Psi_0^-}_{0} \ln z + \sum_{n \neq 0} \Psi_n^- \frac{z^{-n}}{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi_n z^{-n} \\ \eta(z) &\stackrel{\text{def}}{=} \Psi^+(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \eta_n z^{-n-1},\end{aligned}\tag{6.3.6}$$

така, че $\partial\xi(z) = \Psi^-(z)$. Тогава

$$\xi_n = \begin{cases} -\Psi_n^-/n & n \neq 0 \\ \xi_0 & n = 0 \end{cases}, \quad \eta_n = \Psi_n^+, \tag{6.3.7}$$

а за полетата ξ - η и техните Лоранови моди получаваме следните антикомутационни съотношения

$$[\xi_n, \eta_m]_+ = \delta_{n+m,0} \Leftrightarrow [\xi(z), \eta(w)]_+ = \delta(z-w).\tag{6.3.8}$$

Двойката полета $\xi(z)$ и $\eta(z)$, известна като двойка фермионни духови полета, се появява за първи път в контекста на суперструнните теории [44, 45, 27].

Съгласно (6.3.7) и (6.3.3) модите на ξ - η действат по следния начин върху вакуума

$$\xi_n|0\rangle = 0, \quad n > 0, \quad \eta_n|0\rangle = 0, \quad n \geq 0.\tag{6.3.9}$$

Трябва да отбележим, че $\xi_0|0\rangle = |0'\rangle \neq 0$ понеже в противен случай бихме получили противоречие с $[\xi_0, \eta_0]_+|0\rangle = |0\rangle$.

Ермитовото спрягане на полетата $\xi(z)$ и $\eta(z)$ обикновено се дефинира по следния начин

$$(\xi_n)^* = \xi_{-n}, \quad (\eta_n)^* = \eta_{-n},\tag{6.3.10}$$

но както ще видим по-нататък това не е единствената възможност.

Тензорът на енергията и импулса (6.2.8) може да бъде изразен чрез ξ - η по следния начин

$$\mathcal{T}(z) = :\partial\xi(z)\eta(z):,\tag{6.3.11}$$

($:\xi(z)\eta(w): = \xi(z)\eta(w) - (z-w)^{-1}$) така, че $\xi(z)$ е първично поле с конформна размерност 0, а $\eta(z)$ е първично поле с конформна размерност 1. Наистина, използвайки РОП за ξ - η системата

$$\xi(z)\eta(w) \sim \frac{1}{z-w}, \quad \eta(z)\xi(w) \sim \frac{1}{z-w}\tag{6.3.12}$$

получаваме следните разложения на РОП

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(z)\xi(w) &\sim \underbrace{\partial\xi(z)\eta(z)\xi(w)}_{\square} \sim \frac{\partial\xi(w)}{z-w} \\ \mathcal{T}(z)\eta(w) &\sim \underbrace{\partial\xi(z)\eta(z)\eta(w)}_{\square} \sim -\partial_z \frac{1}{z-w} \eta(z) \sim \frac{\eta(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial\eta(w)}{z-w}, \end{aligned} \quad (6.3.13)$$

където коефициентът пред $(z-w)^{-2}$ е равен на конформната размерност, т.е. $\Delta_\xi = 0$, $\Delta_\eta = 1$.

Въвеждането на нулевия мод ξ_0 ни позволява да дефинираме естествен $U(1)$ -ток в ξ - η системата:

$$J(z) \stackrel{\text{def}}{=} :\xi(z)\eta(z): \Rightarrow J(z)J(w) \sim \frac{1}{(z-w)^2}. \quad (6.3.14)$$

Оказва се обаче, че $J(z)$ е аномален, т.е.

$$\mathcal{T}(z)J(w) \sim \frac{-1}{(z-w)^3} + \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J(w)}{z-w}. \quad (6.3.15)$$

Наистина,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(z)J(w) &\sim \underbrace{\partial\xi(z)\eta(z)\xi(w)\eta(w)}_{\square} + \underbrace{\partial\xi(z)\eta(z)\xi(w)\eta(w)}_{\square} + \underbrace{\partial\xi(z)\eta(z)\xi(w)\eta(w)}_{\square} = \\ &\sim \frac{-1}{(z-w)^3} + \frac{:\xi(w)\eta(w):}{(z-w)^2} + \frac{:\partial\xi(w)\eta(w) + \xi(w)\partial\eta(w):}{z-w}. \end{aligned} \quad (6.3.16)$$

Нулевият мод на този ток ($U(1)$ -заряда) позволява да дефинираме следния оператор на фермионна четност.

Определение 6.1 Операторът на фермионната четност γ_F представлява четността на $U(1)$ заряда

$$\gamma_F \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\pi J_0} \quad (6.3.17)$$

Накрая нека резюмираме:

Операторни разложения в ξ - η системата:

$$\xi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi_n z^{-n}, \quad \eta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \eta_n z^{-n-1}, \quad \xi_n|0\rangle = 0, \quad n \geq 1; \quad \eta_m|0\rangle = 0, \quad m \geq 0$$

$$\xi(z)\eta(w) \sim \frac{1}{z-w}, \quad \eta(z)\xi(w) \sim \frac{1}{z-w}, \quad (6.3.19a)$$

$$J(z) = :\xi(z)\eta(z):, \quad \mathcal{T}(z) = :\partial\xi(z)\eta(z): \quad (6.3.19b)$$

$$J(z)J(w) \sim \frac{1}{(z-w)^2}, \quad \mathcal{T}(z)J(w) \sim \frac{-1}{(z-w)^3} + \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J(w)}{z-w} \quad (6.3.19c)$$

$$J(z)\xi(w) \sim \frac{\xi(w)}{z-w}, \quad \mathcal{T}(z)\xi(w) \sim \frac{\partial\xi(w)}{z-w} \quad (6.3.19d)$$

$$J(z)\eta(w) \sim \frac{-\eta(w)}{z-w}, \quad \mathcal{T}(z)\eta(w) \sim \frac{\eta(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial\eta(w)}{z-w} \quad (6.3.19e)$$

$$\mathcal{T}(z)\mathcal{T}(w) \sim \frac{-1}{(z-w)^4} + \frac{2\mathcal{T}(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial\mathcal{T}(w)}{z-w}. \quad (6.3.19f)$$

Трябва да отбележим, че ξ - η системата е неунитарна конформна теория на полето отново поради нарушената връзка между спина и статистиката – $\xi(z)$ и $\eta(z)$ са фермионни полета с целочислена конформна размерност (респективно – с цял спин).

6.4 Първични полета относно алгебрата $\text{Vir}(c = -2)$. $\text{SU}(2)$ -мултиплетни

В този параграф ще намерим първичните полета относно алгебрата $\text{Vir}(c = -2)$ породена от тензора на енергията и импулса (6.3.11) в ξ - η системата. За тази цел да разгледаме пълната версия на РОП (6.2.2) като използваме апарата на интегрални операторни разложения разработен в [C] (виж по-специално Theorem 1.1 там)

Твърдение 6.3 *В сила е следната формула за разложение на операторни произведения*

$$\Psi^+(z)\Psi^-(w) = \frac{1}{(z-w)^2} - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)!}{l!^2} \int_w^z \frac{(z-\zeta)^l (\zeta-w)^l}{(z-w)^{l+2}} V_{l+1}(\zeta) d\zeta, \quad (6.4.1)$$

където полетата $V_n(z)$ са взаимно ортогонални, т.е.

$$\langle 0|V_n(z)V_m(w)|0\rangle = -\frac{C_n}{(z-w)^{2n}} \delta_{nm} \quad (6.4.2)$$

и триточковите функции се задават с

$$\langle 0|\Psi^+(z)\Psi^-(w)V_n(\zeta)|0\rangle = D_n \frac{(z-w)^{n-2}}{(z-\zeta)^n (w-\zeta)^n}. \quad (6.4.3)$$

Тогава $D_n \equiv C_n$, коефициентите C_n се изчисляват по формулата

$$C_{n+1} = \frac{n(n+1)}{\binom{2n}{n}}, \quad (6.4.4)$$

а полетата $V_n(z)$ могат да бъдат изразени обратно чрез Ψ^\pm

$$V_{n+1}(z) = -\frac{(n+1)!}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \binom{n}{k} \binom{n}{k+1} : \partial^k \Psi^+(z) \partial^{n-k-1} \Psi^-(z) :. \quad (6.4.5)$$

Доказателство:

1. Определяне на коефициентите D_n Да разгледаме вакуумното средно на (6.4.1) с $V_n(\zeta')$

$$\begin{aligned} \langle 0 | \Psi^+(z) \Psi^-(w) V_n(\zeta') | 0 \rangle &\stackrel{(6.4.3)}{=} D_n \frac{(z-w)^{n-2}}{(z-\zeta')^n (w-\zeta')^n} \stackrel{(6.4.2)}{=} \\ &= \frac{1}{(z-w)^2} \underbrace{\langle 0 | V_n(\zeta') | 0 \rangle}_0 - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)!}{l!^2} \int_w^z \frac{(z-\zeta)^l (\zeta-w)^l}{(z-w)^{l+2}} \underbrace{\langle 0 | V_{l+1}(\zeta) V_n(\zeta') | 0 \rangle}_{-C_n (\zeta-\zeta')^{-2n} \delta_{n,l+1}} d\zeta = \\ &= C_n \frac{(2n-1)!}{(n-1)!^2 (z-w)^2} \int_w^z \frac{(z-\zeta)^{n-1} (\zeta-w)^{n-1}}{(z-w)^{n-1} (\zeta-\zeta')^{2n}} d\zeta = C_n \frac{(z-w)^{n-2}}{(z-\zeta')^n (w-\zeta')^n}, \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

където използвахме интегралното представяне на B -функцията на Ойлер [67]

$$\int_{z_2}^{z_1} \frac{(z_1-\zeta)^l (\zeta-z_2)^l}{(z_1-z_2)^l (\zeta-z_3)^{2(l+1)}} d\zeta = \left(\frac{z_{12}}{z_{13} z_{23}} \right)^{l+1} B(l+1, l+1) = \frac{l!^2}{(2l+1)!} \left(\frac{z_{12}}{z_{13} z_{23}} \right)^{l+1}. \quad (6.4.7)$$

Следователно $\boxed{D_n = C_n \forall n}$.

2. Определяне на коефициентите C_n .

Да приложим РОП за последните два оператора Ψ^\pm в 4-точковата функция

$$\begin{aligned} \langle 0 | \Psi^+(z_1) \Psi^-(w_1) \Psi^+(z_2) \Psi^-(w_2) | 0 \rangle &= \frac{1}{(z_1-w_1)^2 (z_2-w_2)^2} - \frac{1}{(z_1-w_2)^2 (z_2-w_1)^2} = \\ &= \langle 0 | \Psi^+(z_1) \Psi^-(w_1) | 0 \rangle \frac{1}{(z-w)^2} - \\ &- \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)!}{l!^2} \int_{w_2}^{z_2} \frac{(z_2-\zeta)^l (\zeta-w_2)^l}{(z_2-w_2)^{l+2}} \langle 0 | \Psi^+(z_1) \Psi^-(w_1) V_{l+1}(\zeta) | 0 \rangle d\zeta \stackrel{(6.4.3)}{=} \\ &= \frac{1}{(z_1-w_1)^2 (z_2-w_2)^2} - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)!}{l!^2} C_{l+1} \int_{w_2}^{z_2} \frac{(z_2-\zeta)^l (\zeta-w_2)^l}{(z_2-w_2)^{l+2}} \frac{(z_1-w_1)^{l-1}}{(z_1-\zeta)^{l+1} (w_1-\zeta)^{l+1}} d\zeta. \end{aligned}$$

Като извадим $(z_1-w_1)^{-2} (z_2-w_2)^{-2}$ от двете страни получаваме

$$\frac{1}{(z_1-w_2)^2 (z_2-w_1)^2} = \sum_{l=0}^{\infty} C_{l+1} \frac{(2l+1)!}{l!^2} \frac{(z_1-w_1)^{l-1}}{(z_2-w_2)^{l+2}} \int_{w_2}^{z_2} \frac{(z_2-\zeta)^l (\zeta-w_2)^l}{(z_1-\zeta)^{l+1} (w_1-\zeta)^{l+1}} d\zeta. \quad (6.4.8)$$

Тук ще използваме интегралното представяне на изродената хипергеометрична функция (вж. стр. 1053 в [67])

$$\int_{z_4}^{z_3} \frac{(z_3-\zeta)^l (\zeta-z_4)^l}{(z_1-\zeta)^{l+1} (z_2-\zeta)^{l+1}} d\zeta = \frac{l!^2}{(2l+1)!} \frac{z_{34}^{2l+1}}{(z_{13} z_{24})^{l+1}} F(l+1, l+1; 2(l+1); \eta), \quad (6.4.9)$$

където $\eta = \frac{z_{12}z_{34}}{z_{13}z_{24}}$. Като преозначим $z_1 = z_1$, $w_1 = z_2$, $z_2 = z_3$, $w_2 = z_4$ можем да запишем (6.4.8) в следния вид

$$\frac{1}{z_{14}^2 z_{23}^2} = \sum_{l=0}^{\infty} C_{l+1} \frac{1}{z_{13}^2 z_{24}^2} \eta^{l-1} F(l+1, l+1; 2(l+1); \eta). \quad (6.4.10)$$

Можем да преработим лявата страна като използваме

$$1 - \eta = \frac{z_{14}z_{23}}{z_{13}z_{24}} \Rightarrow \frac{1}{z_{14}z_{23}} = \frac{1}{(1 - \eta)z_{13}z_{24}}$$

и впоследствие да умножим двете страни на $(z_{13}z_{24})^2$ получавайки

$$\frac{1}{(1 - \eta)^2} = \sum_{l=0}^{\infty} C_{l+1} \eta^{l-1} F(l+1, l+1; 2(l+1); \eta). \quad (6.4.11)$$

Константите C_{l+1} могат да бъдат определени като развием двете страни на уравнение (6.4.11) в ред по степените на η и сравним коефициентите. За целта ще използваме разложението на хипергеометричната функция [67]

$$F(l+1, l+1; 2(l+1); \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{l+n}{l}^2}{\binom{2l+1+n}{2l+1}} \eta^n \quad (6.4.12)$$

и това на лявата страна

$$\frac{1}{(1 - \eta)^2} = \frac{d}{d\eta} \frac{1}{1 - \eta} = \frac{d}{d\eta} \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \eta^l. \quad (6.4.13)$$

Следователно

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \eta^l &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{l+1} \frac{\binom{l+n}{l}^2}{\binom{2l+1+n}{2l+1}} \eta^{n+l-1} = \left(\begin{array}{c} \text{смяна на променливите} \\ l =: \text{fixed} \\ n + l - 1 =: m \end{array} \right) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=l-1}^{\infty} C_{l+1} \frac{\binom{m+1}{l}^2}{\binom{m+l+2}{2l+1}} \eta^m = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{l+1} \frac{\binom{m+1}{l}^2}{\binom{m+l+2}{2l+1}} \eta^m, \end{aligned} \quad (6.4.14)$$

където за продължаване на втората сума използвахме, че

$$\frac{\binom{m+1}{l}^2}{\binom{m+l+2}{2l+1}} = 0 \quad \text{за } m < l - 1. \quad (6.4.15)$$

Сравнявайки коефициентите пред степените на η в двете страни (и прилагайки отново (6.4.15)) получаваме следната линейна триъгълна система за C_{l+1}

$$\sum_{l=0}^{m+1} C_{l+1} \frac{\binom{m+1}{l}^2}{\binom{m+l+2}{2l+1}} = m + 1. \quad (6.4.16)$$

Решението на системата (6.4.16) може да бъде намерено по индукция във вида

$$C_{l+1} = l(l+1) \frac{l!^2}{(2l)!}. \quad (6.4.17)$$

3. Изразяване на $V_n(z)$ чрез Ψ^\pm

Можем да определим нормалното произведение на Ψ^+ и Ψ^- като регулярната част в операторното произведение (6.4.1), т.е.

$$:\Psi^+(z)\Psi^-(w): = \Psi^+(z)\Psi^-(w) - \frac{1}{(z-w)^2} = - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)!}{l!^2} \int_w^z \frac{(z-\zeta)^l (\zeta-w)^l}{(z-w)^{l+2}} V_{l+1}(\zeta) d\zeta. \quad (6.4.18)$$

Да разгледаме израза

$$A_n = \lim_{z_1, z_2 \rightarrow z} \partial_1^n (-\partial_2)^n \left(z_{12}^{n+1} : \Psi^+(z)\Psi^-(w) : \right) \quad (6.4.19)$$

и да интегрираме по отсечката ($z = z_1, w = z_2$)

$$\zeta = z_1 t + (1-t)z_2 (= z_2 + z_{12}t), \quad t \in [0, 1], \Rightarrow d\zeta = z_{12}dt \quad (6.4.20)$$

получавайки

$$A_n = - \lim_{z_1, z_2 \rightarrow z} \partial_1^n (-\partial_2)^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)!}{l!^2} z_{12}^{n+l} \int_0^1 t^l (1-t)^l V_{l+1}(z_1 t + z_2(1-t)) dt. \quad (6.4.21)$$

Като приложим формулата на Лайбниц за диференциране можем да запишем

$$\begin{aligned} A_n = & - \lim_{z_1, z_2 \rightarrow z} \partial_1^n (-\partial_2)^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)!}{l!^2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{j} \partial_1^{n-i} (-\partial_2)^{n-j} \left(z_{12}^{n+l} \right) \times \\ & \times \int_0^1 t^l (1-t)^l \partial_1^i (-\partial_2)^j V_{l+1}(z_1 t + z_2(1-t)) dt. \end{aligned} \quad (6.4.22)$$

Тук ще използваме следните две формули

$$\lim_{z_1, z_2 \rightarrow z} \partial_1^{n-i} (-\partial_2)^{n-j} \left(z_{12}^{n+l} \right) = (n+l)! \delta_{i+j+l, n} \quad (6.4.23a)$$

$$\lim_{z_1, z_2 \rightarrow z} \partial_1^i (-\partial_2)^j V_{l+1}(z_1 t + z_2(1-t)) = (-1)^j t^i (1-t)^j \partial^{i+j} V_{l+1}(z) \quad (6.4.23b)$$

както и интегралното представяне на B -функцията; получаваме

$$\begin{aligned} A_n = & - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)!}{l!^2} (n+l)! \partial^{n-l} V_{l+1}(z) A_{n,l} = -(2n)! V_{n+1}(z) \\ A_{n,l} = & \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{j} \delta_{i+j+l, n} (-1)^j B(l+i+1, l+j+1) = \frac{n!^2}{(2n+1)!} \delta_{n,l}, \end{aligned} \quad (6.4.24)$$

следователно

$$V_{n+1}(z) = -\frac{1}{(2n)!} \lim_{z_1, z_2 \rightarrow z} \partial_1^n (-\partial_2)^n \left(z_{12}^{n+1} : \Psi^+(z_1) \Psi^-(z_2) : \right). \quad (6.4.25)$$

Прилагайки отново формулата на Лайбниц и (6.4.23а) получаваме (6.4.5) с което твърдението е доказано. ■

Забележка 6.2 Условиата на твърдение (6.3) не изискват полетата $V_{l+1}(\zeta)$ бъдат първични или квази-първични относно Vir(c = -2). Достатъчно е техните корелационни функции да бъдат зададени с (6.4.2, 6.4.3). Както ще видим полетата $V_{l+1}(\zeta)$ няма да бъдат дори квази-основни относно една друга алгебра на Вирасоро, но техните свойства (6.4.2, 6.4.3) се запазват.

Примери:

$$V_1(z) = 0, \quad C_1 = 0 \quad (6.4.26)$$

$$V_2(z) = : \Psi^-(z) \Psi^+(z) :, \quad C_2 = 1 \quad (6.4.27)$$

$$V_3(z) = \frac{1}{2} \left(: \Psi^+(z) \partial \Psi^-(z) : - : \partial \Psi^+(z) \Psi^-(z) : \right), \quad C_3 = 1. \quad (6.4.28)$$

Асимптотично поведение на малки разстояния:

Като използваме интеграла по отсечката (6.4.21) можем да разгледаме Гейлъровото развитие по z_1 около точката z_2 , т.е.

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^l (1-t)^l V_{l+1}(z_1 t + z_2 (1-t)) dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_{12}^n}{n!} \frac{(l+n)!!}{(2l+n+1)!} \partial^n V_{l+1}(z_2) \\ &\simeq \frac{l!^2}{(2l+1)!} (V_{l+1}(z_2) + \frac{1}{2} z_{12} \partial V_{l+1}(z_2) + \dots) \end{aligned} \quad (6.4.29)$$

можем да получим асимптотичната форма на (6.4.1) във вида

$$\Psi^+(z) \Psi^-(w) = \frac{1}{(z-w)^2} - V_2(w) + O(z-w), \quad (6.4.30)$$

т.е. това разложение съвпада с (6.2.2), където очевидно $\mathcal{T}(z) \equiv V_2(z)$.

Забележка 6.3 Уен и съавтори [39, 40] предполагат, че в асимптотичното развитие на малки разстояния (6.4.30) отсъства член пропорционален на $(z-w)^{-1}$. Ние получаваме това като следствие (изразено във $V_1(z) \equiv 0$) от факта, че сумарната размерност на Ψ^\pm е 2 и следователно няма как да получим поле с размерност 1 като диференцираме нормалното произведение (6.4.18). Това, обаче, все още не означава, че полетата Ψ^\pm са неутрални.

6.4.1 Първични полета

Това, че познаваме $2N$ -точковите корелационни функции (6.2.1) ни позволява да определим напълно първичните относно $\text{Vir}(c = -2)$ полета които се пораждат от основните Ψ^\pm . Да разгледаме, например, следното РОП

$$\Psi^+(z_1)\Psi^+(z_2) \simeq z_{12}^{\alpha_{1/2}}V_1^1(z_2) + \dots, \quad \alpha_{1/2} = \Delta_1 - \Delta_{1/2} - \Delta_{1/2}, \quad \Delta_{1/2} = 1. \quad (6.4.31)$$

Можем да определим показателя $\alpha_{1/2}$, например, като "слеем" първата двойка полета в 4-точковата функция в границата $z_1 \rightarrow z_2$, т.е.

$$\begin{aligned} \Psi_{HR}(z_1, z_2; w_1, w_2) &= \det \begin{pmatrix} \frac{1}{(z_1-w_1)^2} & \frac{1}{(z_1-w_2)^2} \\ \frac{1}{(z_2-w_1)^2} & \frac{1}{(z_2-w_2)^2} \end{pmatrix} = \langle 0 | \Psi^+(z_1)\Psi^+(z_2)\Psi^-(w_1)\Psi^-(w_2) | 0 \rangle \stackrel{z_1 \rightarrow z_2}{\simeq} \\ &\stackrel{z_1 \rightarrow z_2}{\simeq} z_{12}^{\alpha_{1/2}} \langle 0 | V_1^1(z_2)\Psi^-(w_1)\Psi^-(w_2) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (6.4.32)$$

където очевидно оставащата корелационна функция е константа при $z_1 \rightarrow z_2$. Следователно $\alpha_{1/2}$ е степента, с която 4-точковата функция клони към 0, когато $z_1 \rightarrow z_2$. Веднага се вижда, че

$$\Psi_{HR}(z_1, z_2; w_1, w_2) \stackrel{z_1 \rightarrow z_2}{\simeq} z_{12} \Rightarrow \alpha_{1/2} = 1 \Rightarrow \Delta_1 = 3. \quad (6.4.33)$$

Полето $V_1^1(z)$, с конформна размерност $\Delta_1 = 3$ може да бъде определено директно от РОП (6.4.31)

$$\lim_{z_1 \rightarrow z_2} \partial_{z_1} \left(\Psi^+(z_1)\Psi^+(z_2) \right) = \partial \Psi^+(z_2)\Psi^+(z_2) = V_1^1(z_2), \quad (6.4.34)$$

където обикновеното произведение съвпада с нормалното, понеже $\langle 0 | \Psi^+(z_1)\Psi^+(z_2) | 0 \rangle = 0$.

Гореописаната схема може да бъде обобщена индуктивно [B]. Наистина, да разгледаме следното РОП

$$\Psi^+(z_1)V_j^j(z_2) \simeq z_{12}^{\alpha_j}V_{j+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}(z_2) + \dots, \quad \alpha_j = \Delta_{j+\frac{1}{2}} - \Delta_j - \Delta_{1/2}. \quad (6.4.35)$$

Тогавя, последователно да направим следните гранични преходи в корелационната функция (6.2.1)

$$z_{2j} \rightarrow z_{2j+1}, \quad z_{2j-1} \rightarrow z_{2j+1}, \quad z_{2j-2} \rightarrow z_{2j+1}, \quad \dots, \quad z_2 \rightarrow z_{2j+1}, \quad z_1 \rightarrow z_{2j+1}. \quad (6.4.36)$$

Получаваме

$$\begin{aligned} &\langle 0 | \Psi^+(z_1)\Psi^+(z_2)\Psi^+(z_3) \dots \Psi^+(z_{2j})\Psi^+(z_{2j+1})\Psi^-(w_1) \dots | 0 \rangle \stackrel{z_{2j} \rightarrow z_{2j+1}}{\simeq} \\ &\stackrel{z_{2j} \rightarrow z_{2j+1}}{\simeq} z_{2j,2j+1}^{\alpha_{1/2}} \langle 0 | \Psi^+(z_1)\Psi^+(z_2)\Psi^+(z_3) \dots V_1^1(z_{2j+1})\Psi^-(w_1) \dots | 0 \rangle \stackrel{z_{2j} \rightarrow z_{2j+1}}{\simeq} \\ &\stackrel{z_{2j-1} \rightarrow z_{2j+1}}{\simeq} z_{2j,2j+1}^{\alpha_{1/2}} z_{2j-1,2j+1}^{\alpha_1} \langle 0 | \Psi^+(z_1) \dots \Psi^+(z_{2j-2}) \dots V_{3/2}^{3/2}(z_{2j+1})\Psi^-(w_1) \dots | 0 \rangle \\ &\vdots \\ &\stackrel{z_1 \rightarrow z_{2j+1}}{\simeq} \prod_{k=1}^{2j} (z_k - z_{2j+1})^{\alpha_{j+\frac{1-k}{2}}} \langle 0 | V_{j+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}(z_{2j+1})\Psi^-(w_1) \dots | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (6.4.37)$$

Следователно, за да определим α_j трябва да намерим асимптотиката на (6.2.1) при границата (6.4.36). За целта ще използваме, че

$$\det \left(\frac{1}{(z_i - w_j)^2} \right) = \text{perm} \left(\frac{1}{z_i - w_j} \right) \det \left(\frac{1}{z_i - w_j} \right) \quad (6.4.38)$$

и формулата на Коши (3.1.2)

$$\det \left(\frac{1}{z_i - w_j} \right) = (-1)^{N(N-1)/2} \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq N} (z_i - z_j)(w_i - w_j)}{\prod_{i,j=1}^N (z_i - w_j)}. \quad (6.4.39)$$

Перманентата, която по определение е симетричния аналог на детерминантата, има крайна (ненулева) граница, когато $z_i \rightarrow z_j$

$$\text{perm} \left(\frac{1}{z_i - w_j} \right) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \prod_{k=1}^N \frac{1}{(z_k - w_{\sigma(k)})} \xrightarrow{z_i \rightarrow z, w_i \rightarrow w} \frac{N!}{(z - w)^N} \quad (6.4.40)$$

така, че не допринася към асимптотиката. Следователно трябва да определим степента α_j на разликата $z_1 - z_{2j+1}$ в асимптотиката на (6.2.1)

$$\begin{aligned} \Psi_{HR}(z_i; w_j) &\simeq \prod_{1 \leq i < j \leq N} (z_i - z_j) = \prod_{l=2}^N (z_1 - z_l) \prod_{2 \leq i < j \leq N} (z_i - z_j) \simeq \prod_{l=2}^N (z_1 - z_l) \simeq \\ &\simeq \prod_{l=2}^{2j+1} (z_1 - z_l) \rightarrow (z_1 - z_{2j+1})^{2j} \\ &z_2 \rightarrow z_3 \rightarrow \dots \rightarrow z_{2j-1} \rightarrow z_{2j} \rightarrow z_{2j+1}. \end{aligned} \quad (6.4.41)$$

Следователно,

$$\boxed{\alpha_j = \Delta_{j+\frac{1}{2}} - \Delta_j - \Delta_{1/2} = 2j.} \quad (6.4.42)$$

Тогава, по индукция можем да докажем, че

$$\boxed{\Delta_j = j(2j + 1)}, \quad j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+. \quad (6.4.43)$$

Отново можем да определим полетата $V_j^j(z)$ директно от РОП (6.4.35).

Твърдение 6.4 Полетата $V_j^j(z)$ участващи в (6.4.35) могат да бъдат изразени чрез Ψ^+ по следния начин

$$V_j^j(z) = \prod_{k=1}^{2j} \frac{\partial^{2j-k} \Psi^+(z)}{(2j-k)!}. \quad (6.4.44)$$

Доказателство: Математическа индукция с база $j = \frac{1}{2}$. Индукционното предположение се задава с формула (6.4.44). Тогава да диференцираме (6.4.35) $2j$ -пъти по z_1

$$\begin{aligned} \lim_{z_1 \rightarrow z_2} \partial_1^{2j} \left(\Psi^+(z_1) V_j^j(z_2) \right) &= \lim_{z_1 \rightarrow z_2} \partial_1^{2j} \left((z_1 - z_2)^{2j} V_{j+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}(z_2) \right) = (2j)! V_{j+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}(z_2) \Rightarrow \\ V_{j+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}(z_2) &= \frac{1}{(2j)!} \partial^{2j} \Psi^+(z_2) V_j^j(z_2) = \prod_{k=1}^{2j+1} \frac{\partial^{2j+1-k} \Psi^+(z)}{(2j+1-k)!} \end{aligned} \quad (6.4.45)$$

■
Аналогично твърдение можем да получим и за полетата породени от $\Psi^-(z)$. Двете заедно можем да запишем като

$$V_{\pm j}^j(z) = \prod_{k=1}^{2j} \frac{\partial^{2j-k} \Psi^{\pm}(z)}{(2j-k)!}, \quad \Delta_{\pm j}^j = j(2j+1), \quad j \in \frac{1}{2} \mathbb{Z}_+. \quad (6.4.46)$$

Да проверим, че полетата (6.4.46) са наистина първични относно $\mathcal{T}(z)$.

Твърдение 6.5 Полетата (6.4.46) са първични, относно алгебрата $\text{Vir}(c = -2)$ породена от $\mathcal{T}(z)$, с конформна размерност $\Delta_{\pm j}^j = j(2j+1)$, т.е.

$$[\mathcal{T}(z), V_{\pm j}^j(w)] = -j(2j+1) \delta'(z-w) V_{\pm j}^j(w) + \delta(z-w) \partial V_{\pm j}^j(w). \quad (6.4.47)$$

Доказателство:

Ще използваме, че полетата Ψ^{\pm} са първични относно $\mathcal{T}(z)$ с размерност 1, т.е.

$$[\mathcal{T}(z), \Psi^{\pm}(w)] = -\delta'(z-w) \Psi^{\pm}(w) + \delta(z-w) \partial \Psi^{\pm}(w), \quad (6.4.48)$$

както и равенството (което лесно се доказва по индукция)

$$\left[A, \prod_{k=1}^N B_k \right] = \sum_{k=1}^N \left(\prod_{l=1}^{k-1} B_l \right) [A, B_k] \left(\prod_{l=k+1}^N B_l \right). \quad (6.4.49)$$

Тогава, като изпуснем факториалите и пренаредим за удобство полетата

$\prod_{k=1}^{2j} \partial^{2j-k} \Psi^{\pm}(w) = (-1)^{j(2j-1)} \prod_{k=0}^{2j-1} \partial^k \Psi^{\pm}(w)$, можем да запишем

$$\begin{aligned} [\mathcal{T}(z), \prod_{k=0}^{2j-1} \partial^k \Psi^{\pm}(w)] &= \sum_{k=0}^{2j-1} \left(\prod_{l=0}^{k-1} \partial^l \Psi^{\pm}(w) \right) [\mathcal{T}(z), \partial^k \Psi^{\pm}(w)] \prod_{l=k+1}^{2j-1} \partial^l \Psi^{\pm}(w) = \\ &= \sum_{k=0}^{2j-1} \left(\prod_{l=0}^{k-1} \partial^l \Psi^{\pm}(w) \right) \partial^k \left\{ -\Psi^{\pm}(w) \delta'(z-w) + \partial \Psi^{\pm}(w) \delta(z-w) \right\} \prod_{l=k+1}^{2j-1} \partial^l \Psi^{\pm}(w) = \\ &= \sum_{k=0}^{2j-1} \left(\prod_{l=0}^{k-1} \partial^l \Psi^{\pm}(w) \right) \left\{ -\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \partial_w^i \Psi^{\pm}(w) \partial_w^{k-i} \delta'(z-w) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \partial_w^{i+1} \Psi^{\pm}(w) \partial_w^{k-i} \delta(z-w) \right\} \prod_{l=k+1}^{2j-1} \partial^l \Psi^{\pm}(w), \end{aligned} \quad (6.4.50)$$

където използвахме комутационните съотношения (6.4.48) както и формулата на Лайбниц за диференциране на произведение. По-нататък, използваме антисиметрията на нормалното произведение (което в случая съвпада с обикновеното произведение), в частност, $\partial^l \Psi^\pm(w) \partial^l \Psi^\pm(w) = 0$. В първата сума по i , в у-ние (6.4.50), ненулев принос ще даде само членът с $i = k$, понеже в останалите случаи $i (< k)$ ще съвпада с някое l в първото произведение $\prod_{l=0}^{k-1} \partial^l \Psi^\pm(w)$. Във втората сума е по-сложно: $i = k - 1$ получава по същия начин както в първата сума. Тук, обаче има допълнителен ненулев член $i = k$. Наистина, в този случай, $\partial^{i+1} \Psi^\pm$ съвпада с някое $\partial^l \Psi^\pm$ (и следователно дава нула) в $\prod_{l=k+1}^{2j-1} \partial^l \Psi^\pm(w)$ освен за $k = 2j - 1$. Оставащият член, $\left(\prod_{l=1}^{2j-2} \partial^l \Psi^\pm(w) \right) \partial^{2j} \Psi^\pm(w)$, съвпада с $\partial \prod_{l=0}^{2j-1} \partial^l \Psi^\pm(w)$ отново поради анулирането на квадратите на полетата. Следователно

$$\begin{aligned} [\mathcal{T}(z), \prod_{i=0}^{2j-1} \partial^i \Psi^\pm(w)] &= -\delta'(z-w) \left(\sum_{k=0}^{2j-1} (1+k) \right) \prod_{l=0}^{2j-1} \partial^l \Psi^\pm(w) + \\ &+ \delta(z-w) \sum_{k=0}^{2j-1} \left(\prod_{l=0}^{k-1} \partial^l \Psi^\pm(w) \right) \partial(\partial^k \Psi^\pm(w)) \prod_{l=k+1}^{2j-1} \partial^l \Psi^\pm(w) = \\ &= \left(-j(2j+1)\delta'(z-w) + \delta(z-w)\partial_w \right) \prod_{i=0}^{2j-1} \partial^i \Psi^\pm(w), \quad (6.4.51) \end{aligned}$$

с което твърдението е доказано. ■

6.4.2 $\text{SU}(2)$ симетрия

Полетата $\Psi^\pm \equiv V_{\pm 1/2}^{1/2}$ могат да бъдат разглеждани като елементи на $\text{SU}(2)$ -дублет, което ще запишем по следния начин

$$\Psi^\pm(z) \stackrel{\text{def}}{=} V^{1/2}(z) \otimes \zeta_\pm, \quad (6.4.52)$$

където *спинорите* ζ_\pm са съответно старшият и младшият вектори на $\text{SU}(2)$ -представянето с $j = \frac{1}{2}$, а действието на съответните генератори се задава с

$$\begin{aligned} S_+ &\stackrel{\text{def}}{=} (\zeta_+, \zeta_-) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_+ \\ \partial_- \end{pmatrix} = \zeta_+ \frac{\partial}{\partial \zeta_-} \\ S_- &\stackrel{\text{def}}{=} (\zeta_+, \zeta_-) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_+ \\ \partial_- \end{pmatrix} = \zeta_- \frac{\partial}{\partial \zeta_+} \\ S_3 &\stackrel{\text{def}}{=} (\zeta_+, \zeta_-) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_+ \\ \partial_- \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\zeta_+ \frac{\partial}{\partial \zeta_+} - \zeta_- \frac{\partial}{\partial \zeta_-} \right). \quad (6.4.53) \end{aligned}$$

Това поражда естествена $\text{SU}(2)$ симетрия за полетата породени от Ψ^\pm , т.е. полетата получени в операторните произведения на (6.4.52) ще бъдат тензорни произведения по спинорите

$$V_{\pm j}^j(z) = V^j(z) \otimes \underbrace{(\zeta_\pm \otimes \zeta_\pm \otimes \dots \otimes \zeta_\pm)}_{2j\text{-пъти}}. \quad (6.4.54)$$

В частност, тензорът на енергията и импулса $\mathcal{T}(z)$ е спин-синглет. Наистина,

$$\begin{aligned} S_+ \mathcal{T}(z) &= : \Psi^+(z) \Psi^+(z) : = 0 \\ S_- \mathcal{T}(z) &= : \Psi^-(z) \Psi^-(z) : = 0 \\ S_3 \mathcal{T}(z) &= \frac{1}{2}(-1+1) : \Psi^-(z) \Psi^+(z) : = 0. \end{aligned} \quad (6.4.55)$$

Това означава, че $SU(2)$ симетрията "комутира" с конформната инвариантност, т.е.

Твърдение 6.6 Ако полето $V^j(z)$ първично относно тензора на енергията $\mathcal{T}(z)$ то и полетата $S_{\pm} V^j(z)$ ще бъдат първични със същата размерност.

Доказателство:

Да действаме с повишаващия и понижаващия оператори върху комутатора на $\mathcal{T}(z)$ и $V^j(w)$

$$\begin{aligned} S_{\pm} [\mathcal{T}(z), V^j(w)] &= S_{\pm} \left(\mathcal{T}(z) V^j(w) - V^j(w) \mathcal{T}(z) \right) = \\ &= \underbrace{S_{\pm} \mathcal{T}(z)}_0 V^j(w) + \mathcal{T}(z) S_{\pm} V^j(w) - S_{\pm} V^j(w) \mathcal{T}(z) - V^j(w) \underbrace{S_{\pm} \mathcal{T}(z)}_0 = \\ &= [\mathcal{T}(z), S_{\pm}(V^j(w))] \quad (\text{от др. стр.}) \\ &= -j(2j+1) \delta'(z-w) S_{\pm}(V^j(w)) + \delta(z-w) \partial_w S_{\pm}(V^j(w)). \end{aligned} \quad (6.4.56)$$

Следователно полетата $S_{\pm} V^j(z)$ са също $\text{Vir}(c = -2)$ - първични (когато са ненулеви) и то със същата размерност. ■

Съгласно тази теорема, действайки последователно с понижаващия оператор S_- върху старшия вектор $V_j^j(z)$ получаваме пълен $SU(2)$ j - мултиплет от първични полета с еднаква размерност

$$\begin{aligned} V_m^j(z) &\stackrel{\text{def}}{=} (S_-)^{j-m} V_j^j(z), \quad \Delta_m^j = j(2j+1), \quad m = -j, \dots, j \\ [\mathcal{T}(z), V_m^j(z)] &= -j(2j+1) \delta'(z-w) V_m^j(w) + \delta(z-w) \partial_w V_m^j(w). \end{aligned} \quad (6.4.57)$$

Построяване на полетата в мултиплетите

Да видим как действа понижаващият оператор S_- върху полето $V_j^j(z)$

$$\begin{aligned} S_- V_j^j(z) &= S_- \left(\prod_{k=0}^{2j-1} \frac{\partial^k V^{\frac{1}{2}}(z)}{k!} \underbrace{\zeta_+ \otimes \dots \otimes \zeta_+}_{2j\text{-пъти}} \right) = \prod_{k=0}^{2j-1} \frac{\partial^k V^{\frac{1}{2}}(z)}{k!} \times \\ &\times \left(\underbrace{S_- \zeta_+}_{\zeta_-} \otimes \zeta_+ \otimes \dots \otimes \zeta_+ + \zeta_+ \otimes \underbrace{S_- \zeta_+}_{\zeta_-} \otimes \dots \otimes \zeta_+ + \dots + \zeta_+ \otimes \dots \otimes \underbrace{S_- \zeta_+}_{\zeta_-} \right) = \\ &\stackrel{\text{def}}{=} V_{j-1}^j = \sum_{k=0}^{2j-1} : \left(\prod_{l=0}^{k-1} \frac{\partial^l \Psi^+(z)}{l!} \right) \frac{\partial^k \Psi^-(z)}{k!} \left(\prod_{l=k+1}^{2j-1} \frac{\partial^l \Psi^+(z)}{l!} \right) :. \end{aligned} \quad (6.4.58)$$

С последователно прилагане на понижаващия оператор получаваме общия вид на полетата $V_m^j(z)$

$$V_m^j(z) = : \frac{\Psi^{(-)}(z) \partial \Psi^{-}(z)}{0!} \frac{\partial \Psi^{-}(z)}{1!} \dots \frac{\partial^{j-m-1} \Psi^{-}(z)}{(j-m-1)!} \frac{\partial^{j-m} \Psi^{+}(z)}{(j-m)!} \dots \frac{\partial^{2j-1} \Psi^{+}(z)}{(2j-1)!} :, \quad (6.4.59)$$

където скобите между първия минус и последния плюс означава пълна симетризация по знаците. С други думи полетата във j -мултиплета се получават от полето $V_j^j(z)$ като заместим $j-m$ на брой Ψ^{+} с Ψ^{-} и симетризираме по знаците.

Пример: SU(2) - триплет ($j = 1, \Delta^j = 3$)

$$\begin{aligned} V_1^1(z) &= \partial \Psi^{+}(z) \Psi^{+}(z) \\ V_0^1(z) &= \frac{1}{2} (:\partial \Psi^{-}(z) \Psi^{+}(z): + :\partial \Psi^{+}(z) \Psi^{-}(z):) \\ V_{-1}^1(z) &= \partial \Psi^{-}(z) \Psi^{-}(z) \end{aligned} \quad (6.4.60)$$

Забележка 6.4 Полето $V_0^1(z)$ заедно с $\mathcal{T}(z)$ поражда алгебрата W_3 с централен товар $c = -2$ [76].

6.4.3 Първични полета породени от $\xi(z)$

Освен полетата породени от $\Psi^{+}(z) = \eta(z)$ и $\Psi^{-}(z) = \partial \xi(z)$ съществува още една безкрайна серия от първични полета, породени от полето $\xi(z)$ (оставащи извън SU(2)-мултиплетите) които задължително трябва да присъстват в теорията

$$\prod_{i=0}^{2j-1} \frac{\partial^i \xi(z)}{i!}, \quad \Delta'_j = j(2j-1), \quad j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+. \quad (6.4.61)$$

Първичността на полетата (6.4.61) относно Vir($c = -2$) се доказва по същия начин както това беше направено в Твърдение 6.5 за полетата (6.4.46), разликата е само в това, че $\Delta'_j = 0$, което води до различните размерности Δ'_j в (6.4.61).

Трябва да отбележим, че размерностите Δ'_j попадат в същото множество както Δ^j понеже $\Delta'_j = \Delta^{j-1/2}$. Това само променя степента на израждане на размерностите.

6.4.4 U(1)-алгебра на токове и снемане на израждането

Естественят U(1) ток присъстващ в ξ - η системата определя допълнително квантово число, което сменя израждането на конформните размерности. Наистина, оператора J_0 приписва заряд ∓ 1 на полетата Ψ^{\pm} и заряд 1 на полето ξ . Тогава

$$\begin{aligned} [J_0, V_m^j(z)] &= \{\#(-) - \#(+)\} V_m^j(z) = \{j-m - (j+m)\} V_m^j(z) = -2m V_m^j(z) \\ [J_0, \prod_{k=0}^{2j-1} \partial^k \xi(z)] &= 2j \prod_{k=0}^{2j-1} \partial^k \xi(z). \end{aligned} \quad (6.4.62)$$

Следователно собствената стойност на J_0 е допълнителното квантово число необходимо за пълното квантово описание на системата (напомниме, че $[\mathcal{L}_0, J_0] = 0$). За $SU(2)$ мултиплетите, очевидно, оператора J_0 съвпада с (минус два пъти) третата проекция на спина

$$J_0 \equiv -2S_3. \quad (6.4.63)$$

Трябва да отбележим, че симетрията породена от J_0 е локална само в ξ - η системата и не е такава в $\text{Ker} \eta_0$ (поради отсъствието на ξ_0).

6.5 Отрицателни норми

Да разгледаме следната корелационна функция

$$\langle 0 | \xi_0 \Psi_0^+ \prod_{i=1}^N \Psi^+(z_i) \prod_{j=1}^N \Psi^-(w_j) | 0 \rangle. \quad (6.5.1)$$

От една страна $\xi_0 \Psi_0^+ = 1 - \Psi_0^+ \xi_0$ така, че $\langle 0 | \xi_0 \Psi_0^+ = \langle 0 |$ понеже $\langle 0 | \Psi_0^+ = 0$. Тогава

$$\langle 0 | \xi_0 \Psi_0^+ \prod_{i=1}^N \Psi^+(z_i) \prod_{j=1}^N \Psi^-(w_j) | 0 \rangle = \langle 0 | \prod_{i=1}^N \Psi^+(z_i) \prod_{j=1}^N \Psi^-(w_j) | 0 \rangle. \quad (6.5.2)$$

От друга страна можем да изкомутираме Ψ_0^+ надясно така, че

$$\langle 0 | \xi_0 \Psi_0^+ \prod_{i=1}^N \Psi^+(z_i) \prod_{j=1}^N \Psi^-(w_j) | 0 \rangle = (-1)^{2N} \langle 0 | \xi_0 \prod_{i=1}^N \Psi^+(z_i) \prod_{j=1}^N \Psi^-(w_j) \underbrace{\Psi_0^+ | 0 \rangle}_0 = 0. \quad (6.5.3)$$

Следователно

$$\langle 0 | \prod_{i=1}^N \Psi^+(z_i) \prod_{j=1}^N \Psi^-(w_j) | 0 \rangle \equiv 0, \quad (6.5.4)$$

т.е. всички корелационни функции пресметнати между едноименни вакуумни вектори ($|0\rangle$ или $|0'\rangle = \xi_0|0\rangle$) са 0. Трябва да отбележим, че $|0'\rangle$ е нов вакуумен вектор, понеже $\mathcal{L}_0|0'\rangle = 0$, нееквивалентен на първия $|0\rangle$ тъй като има отрицателна фермионна четност. В частност, за $N = 0$ получаваме

$$\langle 0|0\rangle = \langle 0'|0'\rangle = 0. \quad (6.5.5)$$

Това не налага, обаче, никакви условия върху вакуумните средни от типа $\langle 0|0'\rangle = \langle 0'|0\rangle = 1$. Последното равенство следва (след нормиране) от неизродеността на метриката. Следователно, метричният тензор във вакуумното подпространство $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, след диагонализиране придобива вида

$$\begin{aligned} |\Omega\rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{|0\rangle + |0'\rangle}{\sqrt{2}} \\ |\Omega'\rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{|0\rangle - |0'\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} \langle \Omega | \Omega \rangle & \langle \Omega | \Omega' \rangle \\ \langle \Omega' | \Omega \rangle & \langle \Omega' | \Omega' \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.5.6)$$

Същият ефект се наблюдава и върху останалите състояния: на всяко състояние с положителен квадрат на нормата съответства такова с отрицателен. Например

$$\|\mathcal{T}(0)|\Omega\rangle\|^2 = \frac{c}{2}, \quad \|\mathcal{T}(0)|\Omega'\rangle\|^2 = -\frac{c}{2} \quad (c = -2). \quad (6.5.7)$$

Статистическата интерпретация на квантовата теория в пространства с индефинитна метрика изисква отделянето на *физическо* подпространство без отрицателни (или нулеви) квадрати на нормата. Премахването на нефизичните състояния обаче трябва да бъде съгласувано с динамиката и симетриите на системата. Директното изхвърляне на всички състояния с отрицателна норма има смисъл само когато съответния проектор комутира с ТЕИ, което не е изпълнено в този случай понеже едното от състоянията (6.5.7) е винаги с отрицателна норма. Следователно, трябва да се приложи БРС-процедурата на ковариантно квантуване за отделяне на физическо фактор-пространство.

6.6 БРС заряд и физическо фактор-пространство

Процедурата за отделяне на отрицателните квадрати изисква дефиниранто на БРС оператор на заряда [77].

Определение 6.2 Операторът Q се нарича оператор на БРС-заряд ако удовлетворява (i) $Q^\dagger = Q$, (ii) $Q^2 = 0$. Физическото подпространство се дефинира като фактор-пространство

$$\mathcal{H}_{\text{физ}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker } Q / \text{Im } Q, \quad (6.6.1)$$

където $\text{Ker } Q$ и $\text{Im } Q$ са съответно ядрото и образът на оператора Q .

По-нататък ще ни бъде необходимо следното твърдение.

Твърдение 6.7 БРС оператора се изразява в ортонормиран базис ($\langle e_i | e_j \rangle = -\langle f_i | f_j \rangle = \delta_{ij}$, $\langle e_i | f_j \rangle = 0$) чрез

$$Q = \frac{1}{2} \sum_i (|e_i\rangle\langle e_i| + |e_i\rangle\langle f_i| + |f_i\rangle\langle e_i| + |f_i\rangle\langle f_i|). \quad (6.6.2)$$

Доказателство: Тъй като операторът Q е нилпотентен неговата матрица в произволен базис ще бъде пряка сума от Жорданови клетки с размерност не по-голяма от 2. Наистина, за всеки вектор от пространството съществуват две възможности:

$$Q|q\rangle = q|q\rangle \quad \Rightarrow \quad q \stackrel{(ii)}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad Q|q\rangle = 0 \quad (6.6.3a)$$

$$Q|u\rangle = |v\rangle \neq |u\rangle \quad \Rightarrow \quad Q|v\rangle = Q^2|u\rangle \stackrel{(ii)}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad Q \begin{pmatrix} |u\rangle \\ |v\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |u\rangle \\ |v\rangle \end{pmatrix}. \quad (6.6.3b)$$

По построение приемаме, че $|u\rangle$ и $|v\rangle$ са линейно независими, (в противен случай е в сила (6.6.3a)) Лесно се вижда, че $\langle v|v\rangle = 0$ и $\langle u|v\rangle \neq 0$ (последното следва от неизродеността на метриката). След подходящо нормиране можем да запишем метриката отговаряща на двумерната Жорданова клетка във вида

$$\begin{pmatrix} \langle u|u\rangle & \langle u|v\rangle \\ \langle v|u\rangle & \langle v|v\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q \Big|_{\mathbb{C}[|u\rangle, |v\rangle]} = |v\rangle\langle v|. \quad (6.6.4)$$

По-нататък, цялото пространство може да се представи

$$\mathcal{H} = \bigoplus_i [\mathbb{C}|u_i\rangle + \mathbb{C}|v_i\rangle] \bigoplus_a \mathbb{C}|q_a\rangle, \quad (6.6.5)$$

където

$$Q|q_a\rangle = 0, \quad Q \begin{pmatrix} |u_i\rangle \\ |v_i\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |u_i\rangle \\ |v_i\rangle \end{pmatrix}, \quad \langle u_i|v_j\rangle = \delta_{i,j}, \quad \langle u_i|u_j\rangle = \langle v_i|v_j\rangle = 0. \quad (6.6.6)$$

Тогава операторът на БРС заряда се представя във вида

$$Q = \sum_i |v_i\rangle\langle v_i|, \quad (6.6.7)$$

а след въвеждането на ортонормиран базис

$$\begin{aligned} |e_i\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_i\rangle + |v_i\rangle), & |f_i\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-|u_i\rangle + |v_i\rangle) \\ \langle e_i|e_j\rangle &= -\langle f_i|f_j\rangle = \delta_{i,j}, & \langle q_a|q_b\rangle &= \delta_{a,b} \end{aligned} \quad (6.6.8)$$

получаваме (6.6.2). ■

При това, за физическото подпространство получаваме

$$\text{Ker } Q = \bigoplus_i \mathbb{C}|v_i\rangle \bigoplus_a \mathbb{C}|q_a\rangle, \quad \text{Im } Q = \bigoplus_i \mathbb{C}|v_i\rangle \Rightarrow \mathcal{H}_{\text{физ}} = \bigoplus_a \mathbb{C}|q_a\rangle. \quad (6.6.9)$$

Следователно базисът на физическото подпространство се състои от всички вектори принадлежащи на едномерните Жорданови клетки, т.е. всички двумерни клетки се изхвърлят. Иначе казано с всеки базисен вектор с отрицателна норма от пространството се изхвърля и съответния вектор с положителна норма принадлежащ на същата Жорданова клетка. Тогава размерността на физическото подпространство ще удовлетворява

$$\dim \mathcal{H}_{\text{физ}} = \dim \mathcal{H} - 2\#(-), \quad (6.6.10)$$

където $\#(-)$ означава броя на минусите по диагонала на ортонормираната метрика.

Следствие: Броят на състоянията с отрицателен квадрат на нормата в пространството на състоянията за модела HR е равен на броя на тези с положителен. Тогава $\#(-) = \dim \mathcal{H}/2$ и следователно

$$\dim \mathcal{H}_{\text{физ}} = 0. \quad (6.6.11)$$

Извод: БРС процедурата за отделяне на физическо фактор-пространство не е ефективна за неунитарния модел HR.

Забележка 6.5 В § 6.3 видяхме, че алгебрата породена от Ψ^\pm при $c = -2$ може да се дефинира като $\text{Ker } \eta_0$. Сега можем да отбележим, че $\text{Im } \eta_0 \cup \text{Ker } \eta_0 = \{0\}$. Наистина, елементите $x \in \text{Ker } \eta_0$ задължително не съдържат ξ_0 и следователно ако $x = \eta_0 y$ (т.е. $x \in \text{Im } \eta_0$) то y не съдържа ξ_0 (в противен случай $\eta_0 y$, разглеждано като моном по модите на ξ и η , ще съдържа ξ_0 също), а η_0 антикомутира с всичко останало така, че $\eta_0 y = 0 \forall y \in \text{Ker } \eta_0$. Следователно факторът $\text{Ker } \eta_0 / \text{Im } \eta_0$ е БРС пространство относно БРС-оператора η_0 ($\eta_0^* = \eta_0$, $\eta_0^2 = 0$). Тази БРС процедура обаче не дефинира положителна метрика.

7 331 моделът като унитарна рационална конформна теория за състоянието на Халдейн-Резай

7.1 Предефиниране на тензора на енергията и импулса

Както видяхме в предишните раздели не съществува съгласувана физична теория за модела на Халдейн-Резай, когато $c = -2$. Съществува, обаче, възможност за предефиниране на тензора на енергията и импулса. Наистина, нека дефинираме

$$T(z) = \mathcal{T}(z) - \frac{1}{2}\partial J(z), \quad (7.1.1)$$

където $J(z) = :\xi(z)\eta(z):$ и $\mathcal{T}(z) = :\partial\xi(z)\eta(z):$ са съответно естественят $U(1)$ ток и тензорът на напреженията в системата ξ - η . Тогава,

$$\begin{aligned} T(z) &= :\partial\xi(z)\eta(z): - \frac{1}{2}\partial:\xi(z)\eta(z): = \\ &= \frac{1}{2}\left(:\partial\xi(z)\eta(z): - :\xi(z)\partial\eta(z):\right). \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

Първо трябва да проверим, че $T(z)$ наистина удовлетворява комутационните съотношения на алгебрата на Вирасоро. За целта, използвайки $\oint \frac{dz}{2\pi i} z^n = \delta_{n+1,0}$, нека запишем уравнение (7.1.1) за модите на $\mathcal{T}(z)$ и $T(z)$

$$\begin{aligned} J(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n z^{-n-1} &\implies J_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^n J(z), \\ \mathcal{T}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}_n z^{-n-2} &\implies \mathcal{L}_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} \mathcal{T}(z), \\ T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2} &\implies L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z). \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

Следователно

$$L_n = \mathcal{L}_n + \frac{n+1}{2} J_n. \quad (7.1.4)$$

Твърдение 7.1 Лорановите моди L_n на полето $T(z)$ удовлетворяват комутационните съотношения на алгебрата на Вирасоро с централен товар $c = 1$

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{1}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0}. \quad (7.1.5)$$

Доказателство: Ще използваме стандартната формула за изразяване на (анти)комутатора като двоен резидуум от операторното произведение, в частност

$$[\mathcal{L}_n, J_m] = \oint \frac{dw}{2\pi i} \operatorname{Res}_{z \rightarrow w} \left(z^{n+1} w^m \mathcal{T}(z) J(w) \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \oint \frac{dw}{2\pi i} w^m \operatorname{Res}_{z \rightarrow w} z^{n+1} \left(\frac{-1}{(z-w)^3} + \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J(w)}{z-w} \right) = \\
 &= -mJ_{n+m} - \frac{n(n+1)}{2} \delta_{n+m,0}.
 \end{aligned} \tag{7.1.6}$$

Сега можем да пресметнем $[L_n, L_m]$ като използваме още (6.3.19c) (6.3.19f) записани чрез комутатори

$$\begin{aligned}
 [J_n, J_m] &= n\delta_{n+m,0}; \quad [\mathcal{L}_n, J_m] = -mJ_{n+m} - \frac{n(n+1)}{2} \delta_{n+m,0} \\
 [\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m] &= (n-m)\mathcal{L}_{n+m} + \frac{-2}{12} n(n^2-1) \delta_{n+m,0}.
 \end{aligned} \tag{7.1.7}$$

Наистина,

$$\begin{aligned}
 [L_n, L_m] &= [\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m] + \frac{m+1}{2} [\mathcal{L}_n, J_m] - \frac{n+1}{2} [\mathcal{L}_m, J_n] + \frac{(n+1)(m+1)}{4} [J_n, J_m] = \\
 &= (n-m) \left\{ \mathcal{L}_{n+m} + \frac{n+m+1}{2} J_{n+m} \right\} + \frac{1}{12} n(n^2-1) \delta_{n+m,0}. \blacksquare
 \end{aligned} \tag{7.1.8}$$

По-нататък, нека пресметнем РОП на $T(z)$ с останалите полета като използваме РОП (6.3.19) на $\mathcal{T}(z)$ и $J(z)$.

$$\begin{aligned}
 T(z)\xi(w) &\sim \frac{\partial \xi(w)}{z-w} - \frac{1}{2} \partial_z \frac{\xi(w)}{z-w} = \\
 &= \frac{\frac{1}{2}\xi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial \xi(w)}{z-w},
 \end{aligned} \tag{7.1.9a}$$

$$\begin{aligned}
 T(z)\eta(w) &\sim \frac{\eta(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial \eta(w)}{z-w} - \frac{1}{2} \partial_z \left(-\frac{\eta(w)}{z-w} \right) = \\
 &= \frac{\frac{1}{2}\eta(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial \eta(w)}{z-w},
 \end{aligned} \tag{7.1.9b}$$

$$\begin{aligned}
 T(z)J(w) &\sim \left\{ \frac{-1}{(z-w)^3} + \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J(w)}{z-w} \right\} - \frac{1}{2} \partial_z \frac{1}{(z-w)^2} = \\
 &= \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J(w)}{z-w}.
 \end{aligned} \tag{7.1.9c}$$

В заключение можем да кажем, че предефинирания тензор на енергията удовлетворява комутационните съотношения на алгебрата на Вирасоро с централен товар $c = 1$, т.е. теорията е унитарна, $U(1)$ тока $J(z)$ остава без аномалия, а полетата $\xi(z), \eta(z)$ стават първични полета с размерност $1/2$.

Забележка 7.1 Корелационните функции (6.2.1) (респ. антикомутационните съотношения (6.2.8b)) допускат еднопараметрична фамилия от ТЕИ [44, 46] свързани с тензора $\mathcal{T}(z)$ които възпроизвеждат

$$T_\kappa(z) = \mathcal{T}(z) - \kappa \partial J(z), \quad c_\kappa = 1 - 3(2\kappa - 1)^2 \tag{7.1.10}$$

но $\kappa = 1/2$ е единствената унитарна точка [В].

7.2 Ермитово спрягане и бозонизация

Ермитовото спрягане на операторите в квантовата теория на полето определя скаларното произведение в хилбертовото пространство на състоянията. То трябва да бъде инволюция, т.е. квадрата му да бъде 1, съответното скалярно произведение да бъде положително дефинитно и физичните величини да се представят чрез ермитови (самоспрегнати) оператори. Освен това, взаимно спрегнатите полета в унитарните конформни теории трябва да имат еднаква конформна рамерност.

За ξ - η системата естественото спрягане се дефинира чрез $\xi^* = \xi$, $\eta^* = \eta$, при което тензорът на енергията и токът (6.3.19b) са антиермитови, т.е. $\mathcal{L}_n^* = -\mathcal{L}_{-n}$, $J_n^* = \delta_{n,0} - J_{-n}$.

Относно предефинирания тензор на енергията обаче можем да определим ново ермитово спрягане на пораждащите полета

$$\begin{aligned}\xi^*(z) = \eta(z) &\Leftrightarrow \xi_n^* = \eta_{-n}, \\ \eta^*(z) = \xi(z) &\Leftrightarrow \eta_n^* = \xi_{-n}.\end{aligned}\tag{7.2.1}$$

Това спрягане има физически смисъл само в ($c = 1$) теорията понеже ξ и η имат еднаква конформна размерност $\frac{1}{2}$. Тогава тензорът на енергията $T(z)$ е ермитов. Наистина, съгласно правилата за спрягане в аналитичната картина (3.4.20)

$$\begin{aligned}(\xi(z))^* &= (1/\bar{z})^{2\Delta_\xi} \xi^*(1/\bar{z}) = (1/\bar{z}) \eta(1/\bar{z}) = z \eta(z), \\ (\eta(z))^* &= (1/\bar{z}) \xi(1/\bar{z}) = z \xi(z)\end{aligned}\tag{7.2.2}$$

и $\bar{z} = \frac{1}{z}$, когато $z \in S^1$.

Да спрегнем ермитово полето (7.1.2).

$$\begin{aligned}(:\partial\xi(z)\eta(z):)^* &= \lim_{w \rightarrow z} \left(\partial\xi(z)\eta(w) - \frac{1}{(z-w)^2} \right)^* = \\ &= \lim_{w \rightarrow z} \left(w\xi(w)\partial_{\bar{z}}[(1/\bar{z})\eta(1/\bar{z})] - \frac{1}{(\bar{z}-\bar{w})^2} \right) = \\ &= -z^4 : \xi(z)\partial\eta(z) : - z^3 : \xi(z)\eta(z) :, \\ (:\xi(z)\partial\eta(z):)^* &= -z^4 : \partial\xi(z)\eta(z) : - z^3 : \xi(z)\eta(z) :.\end{aligned}\tag{7.2.3}$$

Следователно,

$$(T(z))^* = z^4 T(z) \Rightarrow \boxed{T^*(z) = T(z)}\tag{7.2.4}$$

т.е. предефинирания тензор на енергията (7.1.2) е ермитов оператор за разлика от тензора $\mathcal{T}(z)$.

Освен това, $U(1)$ -тока е вече ермитово поле:

$$\begin{aligned}(J(z))^* &= (:\xi(z)\eta(z):)^* = :(\eta(z))^* (\xi(z))^* : = z^2 : \xi(z)\eta(z) : = z^2 J(z) \Rightarrow \\ &\boxed{J^*(z) = J(z)},\end{aligned}\tag{7.2.5}$$

което е вече първично, т.е. без аномалия.

По-нататък ще напомним накратко процедурата на бозонизация в този случай. Първо нека разгледаме полето

$$T_J(z) = \frac{1}{2} :J(z)J(z):. \quad (7.2.6)$$

Използвайки РОП (6.3.14) на тока със себе си можем да пресметнем

$$T_J(z)T_J(w) \sim \frac{1/2}{(z-w)^4} + \frac{2T_J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T_J(z)}{z-w}. \quad (7.2.7)$$

След това да разгледаме разликата $T_R(z) = T(z) - T_J(z)$, така че $[T_R(z), J(w)] = 0$. Модите на това поле отново затварят алгебра на Вирасоро, но с централен товар $c_R = c - c_J = 1 - 1 = 0$. В една унитарна конформна теория обаче (каквато е теорията при $c = 1$), нулевият централен товар е възможен само когато самия тензор на енергията T_R е нула [66]. Така получаваме *формулата на Сугавара*

$$T(z) = T_J(z) = \frac{1}{2} :J(z)^2: \implies L_n = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} + \sum_{k=-n}^{\infty} \right) J_{-k} J_{n+k}. \quad (7.2.8)$$

От друга страна можем да запишем условията (6.3.19с), (7.1.9а) за U(1)- и Vir-ковариантност на първичните полета $V_{\Delta, \lambda}(z)$ чрез комутатори

$$\begin{aligned} [L_n, V_{\Delta, \lambda}(z)] &= z^n (z\partial + (n+1)\Delta) V_{\Delta, \lambda}(z), \\ [J_n, V_{\Delta, \lambda}(z)] &= \lambda z^n V_{\Delta, \lambda}(z). \end{aligned} \quad (7.2.9)$$

Като заместим израза за L_n от у-ние (7.2.8) в у-ние (7.2.9) и сравним коефициентите пред степените на z получаваме две условия за съгласуваност на U(1)- инвариантността и репараметризационната инвариантност на първичните полета с формулата на Сугавара:

$$\Delta = \frac{\lambda^2}{2} \quad \boxed{\frac{d}{dz} V_{\Delta, \lambda}(z) = \lambda :J(z)V_{\Delta, \lambda}(z):}. \quad (7.2.10)$$

Второто условие се нарича *уравнение на Книженик-Замолдчиков*. Неговото решение, при фиксирано нормировъчно условие $\langle 0 | V_{\Delta, -\lambda}(z) V_{\Delta, \lambda}(w) | 0 \rangle = (z-w)^{-2\Delta}$ може да се запише във вида

$$V_{\Delta, \lambda}(z) = :e^{i\lambda\phi(z)}:, \quad i\partial\phi(z) = J(z). \quad (7.2.11)$$

Така, в крайна сметка, можем да представим полетата ξ, η

$$\begin{aligned} \xi(z) &= :e^{i\phi(z)}:, & \eta(z) &= :e^{-i\phi(z)}:, \\ J(z) &= i\partial\phi(z), & T(z) &= -\frac{1}{2} :(\partial\phi(z))^2:. \end{aligned} \quad (7.2.12)$$

Благодарение на процедурата на бозонозация всички корелационни функции могат да бъдат пресметнати точно (виж у-ние (3.6.21)).

Извод: След предефинирането на тензора на енергията и импулса "неутралната част" на конформната теория описваща динамиката на повърхнинните вълни за модела на Халдейн–Резай може да бъде отъждествена с конформната теория на Дирак–Вайлови фермиони с централен товар $c = 1$.

7.3 Основното състояние на Халдейн–Резай като възбудено състояние в модела 331

"Неутралната" част на вълновата функция на основното състояние на модела на Халдейн–Резай може да бъде реализирано като корелационна функция на Дирак–Вайлови фермиони пораждащи неутралната част на модела 331. Наистина, тъй като корелационните функции на квазисвободни полета зависят само от (анти)комутиационните съотношения (и не зависят от вида на тензора на енергията, нито от ермитовото спрягане), като припомним отъждествяването $\Psi_+(z) = \eta(z)$, $\Psi_-(z) = \partial\xi(z)$, можем да запишем

$$\begin{aligned}
 \Psi_{HR}(z_i; w_j) &= \langle 0 | \prod_{i=1}^N \Psi_+(z_i) \prod_{j=1}^N \Psi_-(w_j) | 0 \rangle = \langle 0 | \prod_{i=1}^N \eta(z_i) \prod_{j=1}^N \partial\xi(w_j) | 0 \rangle = \\
 &= \prod_{k=1}^N \partial_{w_k} \langle 0 | \prod_{i=1}^N \eta(z_i) \prod_{j=1}^N \xi(w_j) | 0 \rangle = \prod_{k=1}^N \partial_{w_k} \det \left(\frac{1}{z_i - w_j} \right) = \\
 &= \prod_{k=1}^N \partial_{w_k} \sum_{\sigma \in S_N} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^N \frac{1}{z_{\sigma(i)} - w_i} = \sum_{\sigma \in S_N} \text{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^N \partial_{w_k} \frac{1}{z_{\sigma(k)} - w_k} \\
 &= \sum_{\sigma \in S_N} \text{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^N \frac{1}{(z_{\sigma(k)} - w_k)^2} = \det \left(\frac{1}{(z_i - w_j)^2} \right). \tag{7.3.1}
 \end{aligned}$$

Така успяхме да намерим унитарна конформна теория, която да възпроизвежда (неутралната част на) вълновата функция на основното състояние за модела на Халдейн–Резай като корелационна функция. Вълновите функции на повърхнинните вълни се получават също като корелационни функции, в които обаче участват още модите J_n на тока.

7.4 Взаимно-еднозначно съответствие между първичните полета на ξ – η системата и тези на Дирак–Вайловите фермиони

Съгласно § 6.2 първичните полета относно алгебрата $\text{Vir}(c = -2)$ се подреждат в $SU(2)$ мултиплети, понеже тензорът на енергията е спин-синглет, и в една безкрайна серия породена от $\xi(z)$. След предефинирането на тензора на енергията и импулса, съгласно (7.1.1), тези полета ще бъдат първични относно $c = 1$ тензора $T(z)$ тогава и само тогава, когато са първични относно тока $J(z)$. Освен това, поради бозонозацията на двата

тензора $\mathcal{T}(z)$ и $T(z)$ чрез $U(1)$ -тока $J(z)$ алгебрата на токове играе по-основна роля в теорията. Затова е необходимо да знаем кои от $\text{Vir}(c = -2)$ първичните полета са освен това първични и относно $U(1)$ -алгебрата на токове (респ. относно $\text{Vir}(c = 1)$). Следващото твърдение определя връзката между първичните полета относно $\text{Vir}(c = -2)$ и $\text{Vir}(c = 1)$.

Твърдение 7.2 $\text{Vir}(c = -2)$ - първичното поле $\phi_{\tilde{\Delta},\lambda}(z)$ е първично и относно $U(1)$ алгебрата на токове породена от $J(z)$ тогава и само тогава, когато неговата ($c = -2$) размерност $\tilde{\Delta}$ и $U(1)$ -заряд λ удовлетворяват условието

$$\tilde{\Delta} = \frac{\lambda(\lambda - 1)}{2}. \quad (7.4.1)$$

В този случай полето $\phi_{\tilde{\Delta},\lambda}(z)$ е също първично (c конформна размерност $\Delta = \lambda^2/2$) относно алгебрата $\text{Vir}(c = 1)$, породена от тензора на енергията $T(z)$.

Доказателство:

Да допуснем, че полето $\phi_{\tilde{\Delta},\lambda}(z)$ е първично както относно $\mathcal{T}(z)$ така и относно $J(z)$. Съгласно взаимно-однозначното съответствие (поле \leftrightarrow състояние) на всяко първично поле отговаря младши вектор $|\tilde{\Delta}, \lambda\rangle = \phi_{\tilde{\Delta},\lambda}(0)|0\rangle$ такъв, че

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n|\tilde{\Delta}, \lambda\rangle &= J_n|\tilde{\Delta}, \lambda\rangle = 0, \quad \text{за } n > 0, \\ \mathcal{L}_0|\tilde{\Delta}, \lambda\rangle &= \tilde{\Delta}|\tilde{\Delta}, \lambda\rangle, \quad J_0|\tilde{\Delta}, \lambda\rangle = \lambda|\tilde{\Delta}, \lambda\rangle. \end{aligned} \quad (7.4.2)$$

Тогавата, съгласно у-ние (7.1.4),

$$\begin{aligned} L_n|\tilde{\Delta}, \lambda\rangle &= \left(\mathcal{L}_n + \frac{n+1}{2}J_n \right) |\tilde{\Delta}, \lambda\rangle = 0, \quad \text{за } n > 0, \\ L_0|\tilde{\Delta}, \lambda\rangle &= \Delta|\tilde{\Delta}, \lambda\rangle = \left(\mathcal{L}_0 + \frac{1}{2}J_0 \right) |\tilde{\Delta}, \lambda\rangle = \left(\tilde{\Delta} + \frac{\lambda}{2} \right) |\tilde{\Delta}, \lambda\rangle. \end{aligned} \quad (7.4.3)$$

Следователно $\Delta = \tilde{\Delta} + \lambda/2$. От друга страна, съгласно формулата на Сугавара (7.2.8), приложена в частност за нулевия мод $L_0 = \frac{1}{2}J_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}J_n$, конформната размерност относно $T(z)$ придобива вида $\Delta = \lambda^2/2$. Така, в крайна сметка получаваме (7.4.1).

Обратно, нека наложим условие (7.4.1) върху $\text{Vir}(c = -2)$ -първичните полета $\phi_{\tilde{\Delta},\lambda}(z)$:

- $SU(2)$ -мултиплет:

Размерностите и зарядите на полетата $V_m^j(z)$ са съответно $\tilde{\Delta} = j(2j + 1)$ и $\lambda = 2m$. Тогавата за решенията на квадратното уравнение по m получаваме

$$\tilde{\Delta} = j(2j + 1) = m(2m - 1) \Rightarrow m = \begin{cases} j + \frac{1}{2} \\ -j \end{cases} \quad (7.4.4)$$

Първото решение $m = j + \frac{1}{2}$ на (7.4.4) попада извън $SU(2)$ мултиплета ($m = -j, -j+1, \dots, j$) и следователно не върши работа. Второто решение $m = -j$ отговаря на полето $V_{-j}^j(z)$.

- ξ -серия:

Полетата (6.4.61) имат размерности и заряди съответно $\Delta'_j = j(2j-1)$, $\lambda_j = 2j$, които очевидно удовлетворяват (7.4.1).

Следователно, условието (7.4.1) е изпълнено само за

$$\prod_{k=0}^{2j-1} \partial^k \xi(z), \quad \prod_{k=0}^{2j-1} \partial^k \eta(z). \quad (7.4.5)$$

Директната проверка, буквално повтаряща доказателството на Твърдение 6.5, показва, че полетата (7.4.5) са наистина първични относно тока $J(z)$

$$\begin{aligned} [J(z), \prod_{k=0}^{2j-1} \partial^k \xi(w)] &= 2j \delta(z-w) \prod_{k=0}^{2j-1} \partial^k \xi(w) \\ [J(z), \prod_{k=0}^{2j-1} \partial^k \eta(w)] &= -2j \delta(z-w) \prod_{k=0}^{2j-1} \partial^k \eta(w). \end{aligned} \quad (7.4.6)$$

■

Твърдение 7.2 показва, че от целия j -мултиплет от $\text{Vir}(c = -2)$ -първични полета само полето с минимална проекция $m = -j$ е първично и относно $U(1)$ тока. Освен това, всички $\text{Vir}(c = -2)$ -първични полета породени от $\xi(z)$ са също $U(1)$ -първични. Тези две безкрайни серии са следователно първични и относно $\text{Vir}(c = 1)$). Трябва да отбележим, че тези две серии изчерпват всички $\text{Vir}(c = -2)$ -първични полета, които са $U(1)$ - (респ. $\text{Vir}(c = 1)$ -) първични, понеже уравнение (7.4.1) има най-много две решения за фиксирано j .

Извод: $SU(2)$ мултиплетната структура на първичните полета $V_m^j(z)$ се нарушава при прехода от тензора на енергията $\mathcal{T}(z)$ ($c = -2$) към тензора $T(z)$ ($c = 1$). Първични полета в $c = 1$ теорията продължават да бъдат само полетата с минимална проекция на спина $m = -j$ заедно с тези от безкрайната серия породена от $\xi(z)$ (извън $SU(2)$ мултиплетите). Всички останали полета от $SU(2)$ мултиплетите са наследници на първичните полета.

Пример:

Полето $\Psi^-(z) = \partial \xi(z)$ не удовлетворява (7.4.1), понеже $\Delta = 1, \lambda = 1$. То се изразява като нормално произведение на първичното поле $\xi(z)$ с тока $J(z)$

$$\partial \xi(z) = :J(z)\xi(z): \quad (7.4.7)$$

и следователно не е първично относно алгебрата $\widehat{u(1)}$.

Забележка 7.2 Съответствието между конформните размерности на полетата (7.4.5) (първични както в ($c = -2$) така и в ($c = 1$) моделите) следваще от връзката (7.1.1) между тензорите на енергията

$$\Delta_\lambda = \tilde{\Delta}_\lambda + \frac{\lambda}{2}. \quad (7.4.8)$$

От друга страна директно се проверява, че съществува следното съответствие (основаващо се на равенството между характеристиките) между размерностите в двете теории [D], [47, 45]

$$\Delta^{(c=1)} - \frac{1}{24} = \Delta^{(c=-2)} + \frac{1}{12}, \quad (7.4.9)$$

където добавката съвпада със $-c/24$ в двата модела. На пръв поглед двете съответствия са коренно различни, понеже първото зависи линейно от заряда, а второто води о константно отместване със $1/8$ на всички конформни размерности. Сега ще покажем, че второто съответствие следва от първото. Наистина, първото съответствие удовлетворява

$$\boxed{\Delta_\lambda - \frac{1}{24} = \tilde{\Delta}_{\lambda + \frac{1}{2}} + \frac{1}{12}}, \quad \left(\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \right) \quad (7.4.10)$$

т.е. размерностите $\Delta_\lambda^{(c)} - \frac{c}{24}$ съвпадат дори като множества.

Трябва да отбележим, че при прехода от $c = -2$ към $c = 1$ полетата ξ и η придобиват полуцели размерности, но Лорановото им развитие, като ред по степените на z , се запазва. За да отличаваме полетата в $c = 1$ теорията (от тези при $c = -2$) ще въведем следните означения

$$\Psi^*(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Psi_{n-\alpha}^* z^{-n+\alpha-\frac{1}{2}} \stackrel{\text{def}}{=} \xi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi_n z^{-n} \quad \left(\alpha = \frac{1}{2} \right), \quad (7.4.11)$$

$$\Psi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Psi_{n-\alpha} z^{-n+\alpha-\frac{1}{2}} \stackrel{\text{def}}{=} \eta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \eta_n z^{-n-1} \quad \left(\alpha = -\frac{1}{2} \right). \quad (7.4.12)$$

Сравнявайки коефициентите в съответните редове виждаме, че получените Вайловите фермиони Ψ, Ψ^* се намират в NS-сектора (антипериодичен), $\alpha = 1/2 \pmod{1}$ и

$$\xi_n \equiv \Psi_{n-\frac{1}{2}}^*, \quad \eta_n \equiv \Psi_{n+\frac{1}{2}}, \quad [\Psi_{n-\frac{1}{2}}^*, \Psi_{m+\frac{1}{2}}]_+ = \delta_{n+m,0}. \quad (7.4.13)$$

нека напомним, че нулевият мод ξ_0 беше въведен в § 6.3 от съображения за удобство. Тук виждаме, че антикомутационните съотношения (респ. корелационните функции) са инвариантни относно предфинирането (7.1.10) на ТЕИ. Сега можем да опитаме да се ограничим до първоначалната алгебра, която беше изоморфна на $\text{Ker} \eta_0$ при $c = -2$. Това означава да премахнем оператора $\Psi_{-1/2}^*$, който съответства на ξ_0 съгласно (7.4.13) при $c = 1$, респ. да се ограничим до ядрото на спрегнатия му оператор $\Psi_{\frac{1}{2}}$. Оказва се обаче, че проектирането на оператора $\Psi_{-1/2}^*$ в $c = 1$ теорията нарушава конформната инвариантност понеже същия не комутира с оператора L_0 на енергията (за разлика от нулевия мод ξ_0 , който комутиреше с L_0).

Извод: Операторът ξ_0 , който беше необходим за формулиране на унитарната теория не може да бъде премахнат след прехода към $c = 1$.

7.5 Рационално разширение на хиралната алгебра в $c = -2$ теорията. Идентификация с четната част на Дирак–Вайловата хирална алгебра

Както вече се убедихме алгебрата на токове $\widehat{u(1)}$ играе фундаментална роля както в ($c = -2$) така и в ($c = 1$) теорията. При това, операторът $J(z)$ е един и същ в двете теории (макар, че неговото ермитовото спрягане е различно), така, че собствените стойности на J_0 са инвариантна характеристика на състоянията в двете различни теории. Забележително е, че полета (7.4.5), които са първични относно $\text{Vir}(c = -2)$ и $\text{Vir}(c = 1)$ са също така първични относно $\widehat{u(1)}$ и следователно се характеризират напълно чрез този инвариантен $U(1)$ -заряд. По-нататък, бозонизацията позволява да изразим всички първични полета като вертексни експоненти от (инвариантния) $U(1)$ ток, което означава, че първичните полета в двете теории носещи един и същи заряд просто съвпадат.

От друга страна, тъй като полетата $\xi(z)$, $\eta(z)$ се използват за построяване на операторите на физическите електрони в двата слоя и участват във корелационната функция (6.2.9), трябва да поискаме те да принадлежат на хиралната супералгебра. По-точно, тъй като това са фермионни полета, те не са наблюдаеми в строгия смисъл на думата, но техните квадратични комбинации са такива и следователно трябва да принадлежат на хиралната алгебра. Това означава, че заедно с $\xi(z)$, $\eta(z)$ в супералгебрата ще присъстват и всички първични полета породени от тях. Следователно хиралната алгебра $\widehat{u(1)}$ се разширява с вертексите експоненти $:e^{\pm i\phi(z)}:$, които пораждат рационалното разширение на $\widehat{u(1)}$ с решетка на зарядите \mathbb{Z} известно като модел на Дирак–Вайлови фермиони (когато $\xi^* = \eta$). Истинската, в строгия смисъл на думата, хирална алгебра представлява бозонната подалгебра на тази супералгебра и съвпада с решетъчното разширение на $\mathcal{A}(\widehat{u(1)}, 2\mathbb{Z})$ породено от двойката бозонни полета $\xi(z)\partial\xi(z)$, $\eta(z)\partial\eta(z)$ със заряд ± 2 .

След като разширим хиралната алгебра в $c = -2$ модела с двойката $\xi(z)\partial\xi(z)$, $\eta(z)\partial\eta(z)$ получаваме една рационална конформна теория, чийто сектори на суперотбор \mathcal{H}_λ са изоморфни (буквално съвпадат) с тези в рационалната теория с хирална алгебра – бозонната подалгебра на Дирак–Вайловия фермион

$$\mathcal{H}_\lambda = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{V}_{\lambda+2n}, \quad \lambda = \frac{l}{2}, \quad l = -1, 0, 1, 2, \quad (7.5.1)$$

където $\mathcal{V}_{\lambda+2n}$ е модулът на Верма [27, 29] за алгебрата на токове $\widehat{u(1)}$ построен върху младшия вектор $|\frac{l}{2} + 2n\rangle$.

С други думи двете теории се строят върху едно и също пространство, секторите на суперотбор съвпадат, разликата е само в дефиницията на тензорите на енергията $T(z)$ и $\mathcal{T}(z)$ (респ. хамилтонианите L_0 и \mathcal{L}_0) и в дефиницията на скаларните произведения, които се пораждат от ермитовите спряганя²¹ на основните полета и очевидно не са еквивалентни

$$\xi^*(z) \stackrel{(c=1)}{=} \eta(z) \quad \xi^*(z) \stackrel{(c=-2)}{=} \xi(z), \quad \eta^*(z) \stackrel{(c=-2)}{=} \eta(z). \quad (7.5.2)$$

²¹ в унитарната теория това е вече заложено в у-ние (7.4.11)

Съответствието между секторите на суперотбор за двете теории, техните минимални размерности и заряди, както и съответните характерни на конформната група (хирални статсуми) е резюмирано в Таблица 2.

Таблица 2: Съответствието $(c = -2) \iff (c = 1)$

l	$\sigma = l/2$	$\Delta_{\sigma}^{(c=-2)} = \sigma(\sigma - 1)/2$	$\Delta_{\sigma}^{(c=1)} = \sigma^2/2$	$\chi_{\sigma}^{(-2)}(\tau)$	$\chi_{\sigma}^{(1)}(\tau)$
-1	-1/2	3/8	1/8	$K_2(\tau; 4)$	$K_{-1}(\tau; 4)$
0	0	0	0	$K_{-1}(\tau; 4)$	$K_0(\tau; 4)$
1	1/2	-1/8	1/8	$K_0(\tau; 4)$	$K_1(\tau; 4)$
2	1	0	1/2	$K_1(\tau; 4)$	$K_2(\tau; 4)$

7.6 Съответствие между характерите. Статистическа сума на Рийд и Милованович за модела на Халдейн–Резай и нейното подобрене

Познаването на секторите на суперотбор \mathcal{H}_{λ} изграждащи пространството на състоянията в $(c = -2)$ теорията все още не означава, че можем да пресметнем съответните характерни. Причината е в това, че в модулите на Верма по принцип присъстват т.нар. "сингуларни" вектори [27, 29], които са ортогонални на целия модул, водят до неговата приводимост и трябва да бъдат изхвърлени от неприводимите представяния на хиралната алгебра. Намирането на сингуларните вектори е по принцип нетривиална задача, решението на която може да бъде избегнато.

Съответствието между пространствата \mathcal{H}_{λ} в двете теории ни позволяват да пресметнем характерите на конформната група за $(c = -2)$ модела чрез съответните характерни за $(c = 1)$, които са добре известни. Наистина, да разгледаме характера на $\mathcal{H}_{\lambda}^{(c=-2)}$ като използваме връзката $\mathcal{L}_0 = L_0 - J_0/2$

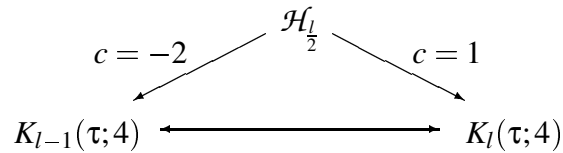
$$\begin{aligned} \chi_{\lambda}^{(c=-2)}(\tau) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{tr}_{\mathcal{H}_{\lambda}} \left(q^{\mathcal{L}_0 + 1/12} \right) = \text{tr}_{\mathcal{H}_{\lambda}} \left(q^{L_0 - \frac{J_0}{2} + 1/12} \right) = q^{\frac{1}{8}} \text{tr}_{\mathcal{H}_{\lambda}} \left(q^{L_0 - \frac{J_0}{2} - 1/24} \right) = \\ &\stackrel{\text{def}}{=} q^{\frac{1}{8}} K_l(\tau, -\tau; 4) = K_{l-1}(\tau, 0; 4). \end{aligned} \quad (7.6.1)$$

Последното равенство се получава чрез

$$\begin{aligned} q^{\frac{1}{8}} K_l(\tau, -\tau; 4) &= \frac{q^{\frac{1}{8}}}{\eta(\tau)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{2(n+l/4)^2} e^{2\pi i(-\tau)(n+l/4)} = \frac{1}{\eta(\tau)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{2(n+l/4)^2 - (n+l/4) + 1/8} = \\ &= \frac{1}{\eta(\tau)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{2(n + \frac{l-1}{4})^2} \stackrel{\text{def}}{=} K_{l-1}(\tau; 4). \end{aligned}$$

Следователно, виждаме, че на едни и същи модули \mathcal{H}_{λ} отговарят различни характерни. Съответствието между тях е изобразено в последните две колонки на Таблица 2 и Фиг. 14.

Фигура 14: Съответствие между характерите на $(c = -2)$ и $(c = 1)$ теориите върху пространството \mathcal{H}_λ за $\lambda = l/2$



С други думи, характерът на конформната група върху пространството $\mathcal{H}_{l/2}$ зависи от гледната точка – в $(c = -2)$ теорията характера е $K_{l-1}(\tau; 4)$ докато в $(c = 1)$ теорията съвпада с $K_l(\tau; 4)$. От физична гледна точка, обаче, не можем да интерпретираме $(c = -2)$ -характерите като хирални статсуми, понеже пространствата върху които са пресметнати съответните следи съдържат вектори с отрицателна норма, т.е. необходимо е да се проектира, под знака на следата, върху физическото подпространство. Следователно, единствено възможната физическа интерпретация е в $(c = 1)$ унитарната конформна теория.

Рийд и Милованович [41] правят подробно изследване на $(c = -2)$ модела за описание на класа на универсалност на Халдейн–Резай като пресмятат съответните характеры използвайки правило на четност аналогично на това за 331 модела (но все пак различно). За съжаление те не предлагат никакво решение на проблема с присъствието на отрицателни норми в пространството на състоянията. Освен това, те твърдят, че построената от тях статсума, чийто топологичен ред е равен на 8, е модулрано-инвариантна, което не е вярно [72].

Тъй като $(c = -2)$ и $(c = 1)$ теориите са свързани чрез предефиниране на тензора на енергията (7.1.1), а тока е един и същ и пространствата на суперотбор просто съвпадат (с точност до нееквивалентните скаларни произведения) всички резултати получени в $(c = -2)$ теорията могат да бъдат преформулирани в тази с $c = 1$. В частност съответствието между характерите, породено от изоморфизма между секторите на суперотбор $\mathcal{H}_{l/2}$, което се изразява просто в отнемстване на индекса на характерите при прехода от $c = -2$ към $c = 1$ теорията, ни позволява да запишем характерите на Рийд–Милованович, но вече в унитарната конформна теория. За тази цел първо ще запишем техните характеры, зададени с у-ния (4.14) и (4.15) в [41], чрез нашите K -функции и η -функцията

$$\begin{aligned} \chi_0^\Psi &= \left(\frac{1}{2} [K_1(\tau; 4) + K_{-1}(\tau; 4)] + \eta^2 \right) / 2, & \chi_1^\Psi &= \left(\frac{1}{2} [K_1(\tau; 4) + K_{-1}(\tau; 4)] - \eta^2 \right) / 2 \\ \chi_{-1/8}^\Psi &= K_0(\tau; 4), & \chi_{3/8}^\Psi &= K_2(\tau; 4) \\ \frac{1}{2} (\chi_{r/q}^+ + \chi_{r/q}^-) &= K_{2r}(\tau, 2\zeta; 4q), & \frac{1}{2} (\chi_{r/q}^+ - \chi_{r/q}^-) &= K_{2r \pm 2q}(\tau, 2\zeta; 4q). \end{aligned} \quad (7.6.2)$$

Тогава за "твистираните" характеры на Рийд–Милованович можем да запишем ($q = 2$)

$$\chi_{(r+\frac{1}{2})/q, ev, tw}^{HR} = K_0(\tau; 4)K_{2r+1}(\tau, 2\zeta; 8) + K_2(\tau; 4)K_{2r-3}(\tau, 2\zeta; 8) \xrightarrow{(c \rightarrow 1)}$$

$$\longrightarrow K_1(\tau; 4)K_{2r+1}(\tau, 2\zeta; 8) + K_{-1}(\tau; 4)K_{2r-3}(\tau, 2\zeta; 8) = \chi_\lambda^{331}, \quad (7.6.3)$$

където $\lambda = \begin{cases} 1, & r = 0 \\ -1, & r = 1 \end{cases}$ и аналогично

$$\begin{aligned} \chi_{(r+\frac{1}{2})/q, od, tw}^{HR} &= K_2(\tau; 4)K_{2r+1}(\tau, 2\zeta; 8) + K_0(\tau; 4)K_{2r-3}(\tau, 2\zeta; 8) \xrightarrow{(c \rightarrow 1)} \\ &\longrightarrow K_{-1}(\tau; 4)K_{2r+1}(\tau, 2\zeta; 8) + K_1(\tau; 4)K_{2r-3}(\tau, 2\zeta; 8) = \chi_\lambda^{331}, \end{aligned} \quad (7.6.4)$$

където $\lambda = \begin{cases} -3, & r = 0 \\ 3, & r = 1 \end{cases}$.

При нетвистираните характери положението е по-сложно. Поради правилото на четност в статсумата се появява само сумата (с коефициент 2) на нетвистираните характери така, че η^2 -функцията не участва в нея

$$\begin{aligned} \chi_{r/q, ev, untw}^{HR} + \chi_{r/q, od, untw}^{HR} &= \frac{1}{2} \left(K_1(\tau; 4) + K_{-1}(\tau; 4) \right) K_{2r}(\tau, 2\zeta; 8) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(K_1(\tau; 4) + K_{-1}(\tau; 4) \right) K_{2r+4}(\tau, 2\zeta; 8) = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(K_1(\tau; 4)K_{2r}(\tau, 2\zeta; 8) + K_{-1}(\tau; 4)K_{2r+4}(\tau, 2\zeta; 8) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(K_{-1}(\tau; 4)K_{2r}(\tau, 2\zeta; 8) + K_1(\tau; 4)K_{2r+4}(\tau, 2\zeta; 8) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (7.6.5)$$

където разделянето на K -функциите в големите скоби е направено с оглед на правилото на четност, съгласно което $K_{-1}(4)$ е четен, а $K_1(4)$ – нечетен характер. Тогава, приносът на нетвистираните характери към статсумата може да се запише

$$\begin{aligned} 2|\chi_{r/q, ev, untw}^{HR} + \chi_{r/q, od, untw}^{HR}|^2 &= \\ &= \frac{1}{2} \left| \left(K_1(4)K_{2r}(8) + K_{-1}(4)K_{2r+4}(8) \right) + \left(K_{-1}(4)K_{2r}(8) + K_1(4)K_{2r+4}(8) \right) \right|^2 = \\ &= |K_1(4)K_{2r}(8) + K_{-1}(4)K_{2r+4}(8)|^2 + |K_{-1}(4)K_{2r}(8) + K_1(4)K_{2r+4}(8)|^2. \end{aligned} \quad (7.6.6)$$

Последния израз е еквивалентен на у-ние (4.17) в [41] понеже $K_{-1}(\tau, 0; 4) = K_1(\tau, 0; 4)$, но ние предпочитаме този запис понеже тук е отделен приноса както на четните така и на нечетните характери. Като направим прехода към ($c = 1$) в последните 4 характера получаваме

$$K_1(4)K_{2r}(8) + K_{-1}(4)K_{2r+4}(8) \xrightarrow{(c \rightarrow 1)} K_2(4)K_{2r}(8) + K_0(4)K_{2r+4}(8) = \chi_\lambda^{331}, \quad (7.6.7)$$

където $\lambda = \begin{cases} 4, & r = 0 \\ 2, & r = 1 \end{cases}$ и също

$$K_{-1}(4)K_{2r}(8) + K_1(4)K_{2r+4}(8) \xrightarrow{(c \rightarrow 1)} K_0(4)K_{2r}(8) + K_2(4)K_{2r+4}(8) = \chi_\lambda^{331}, \quad (7.6.8)$$

където $\lambda = \begin{cases} 0, & r = 0 \\ -2, & r = 1 \end{cases}$. Това, всъщност означава, че след прехода от ($c = -2$) към ($c = 1$) теорията, при запазване на правилото на четност статсумата за модела на Халдейн–Резай преминава в статсумата на 331 модела. Обратната посока, от ($c = 1$) към

($c = -2$) е без особености и се проверява директно. Окончателно, за статсумите на двата модела можем да запишем

$$\boxed{Z^{HR} \iff Z^{331}}$$

$$(c = -2) \iff (c = 1) \quad (7.6.9)$$

Извод: *Описанието на състоянието на Халдейн-Резай и неговите възбуждания чрез унитарна ефективна теория на полето е възможно и непротиворечиво. В допълнение към положителната дефинитност на скаларното произведение намерената теория притежава модулрано-инвариантна статистическа сума, която съвпада с тази на модела 331, т.е. рационалната конформна теория на полето за модела на Халдейн-Резай може да бъде отъждествена с тази на модела 331.*

Както се вижда от направения анализ правилата на четност за моделите 331 и HR се едни и същи. От гледна точка на характеристиките това се изразява в нетривиалното вдвояване между характеристиките на неутралната и заредената части на теорията (виж уравнение (4.9.34)), т.е. пълните характеристики са определени комбинации от $K_I(\tau; 4)$ и $K_I(\tau, 2\zeta; 8)$. За изследването на други възможности за вдвояване (респ. други правила на четност) трябва да се направи класификация на модулрано инвариантните статсуми (тъй като при тяхното диагонализиране се получават търсените комбинации от характеристики) за решетъчната РКТП с хирална алгебра $\mathcal{A}(\widehat{u(1)}^2, \Gamma_{4,8})$, с матрица на Грам $\Gamma_{4,8} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$. Пълната класификация на тези S -инвариантните статсуми е направена в [B] като е използван метода въведен в [31]. В резултат са получени 19 статсуми от които $3 \times 5 = 15$ факторизуеми (т.е. произведения от статсуми за $\mathcal{A}(\widehat{u(1)}, 2\mathbb{Z})$ и $\mathcal{A}(\widehat{u(1)}, 2\sqrt{2}\mathbb{Z})$) и 4 нефакторизуеми. Нови комплексни правила на четност могат да дефинират само нефакторизуемите статсуми, но след налагането на всички физически условия [B] остава само една допустима статистическа сума, която съвпада със статсумата за модела 331 (виж Theorem 4.1 в [B]). Това доказва, че РКТП за 331 модела е единствената допустима ефективна теория за състоянието на Халдейн-Резай в рамките на решетъчните рационални конформни теории на полето.

Съществува още една възможна РКТП за състоянието на Халдейн-Резай, която е все още в процес на изследване: основното състояние на Халдейн-Резай притежава допълнителна \mathbb{Z}_2 симетрия относно зарядовото спрягане на основните полета. Ако се факторизира по тази симетрия, съгласно теорията на орбифолдите (виж § 4), получената теория ще удовлетворява всички останали физически условия.

7.7 Абелева и неабелева статистика. Правила на сливане

Основна характеристика на възбужданията в една Холова система са правилата на сливане, т.е. правилата за получаване на нови частици съставени от основните. Важно нещо е статистическата фаза, която придобиват корелационните функции, когато две

квазичастици си разменят местата. При неабелевата статистика фазата се заменя със т.нар. "braid" матрица.

Въпреки общоприетото схващане, че квазичастиците в модела на Халдейн–Резай се подчиняват на неабелева статистика, проведеня анализ показва, че статистиката е абелева, поради съответствието с абелевия модел 331.

От една страна, анализа на размерностите показва, че ($c = -2$) модела на Халдейн–Резай може да се разглежда като гранична точка в серията от минимални модели на алгебрата на Вирасоро

$$\Delta_{r,r'} = \frac{(rp' - pr')^2 - (p - p')^2}{4pp'}, \quad c_{p,p'} = 1 - 6\frac{(p - p')^2}{pp'} \quad (7.7.1)$$

($r < p, r' < p'$) за $p = 1, p' = 2$. Тогава първичните полета $[r, s]$ от таблицата на Кац удовлетворяват правила на сливане от типа $SU(2) \times SU(2)$ [27]

$$[r, s] \times [r', s'] = \sum_{\substack{0 \leq n \leq \min(r, r') - 1 \\ 0 \leq m \leq \min(s, s') - 1}} [|r - r'| + 1 + 2n, |s - s'| + 1 + 2m], \quad (7.7.2)$$

които са неабелеви.

Пример: Полето $[3, 1]$.

Това е $SU(2)$ триплета V_m^j със спин $j = 1$ и размерност 3 (6.4.60). От една страна, съгласно (7.7.2), е изпълнено

$$[3, 1] \times [3, 1] = [1, 1] + [3, 1] + [5, 1]. \quad (7.7.3)$$

Тъй като полетата, които се раждат при сливане трябва да участват в сингулярната част на РОП полето $[5, 1]$ няма да присъства, понеже $\Delta_{5,1} = 10 > 2\Delta_{3,1}$. От друга страна, формулите (6.4.60) ни позволяват да пресметнем директно сингулярната част на РОП като използваме РОП за Ψ^\pm :

$$\begin{aligned} V_1^1(z)V_{-1}^1(w) &\simeq \frac{2}{(z-w)^6} - \frac{6\mathcal{T}(w)}{(z-w)^4} - \frac{3\partial\mathcal{T}(w)}{(z-w)^3} + \frac{9}{10} \frac{\partial^2\mathcal{T}(w)}{(z-w)^2} + \dots \\ &+ 2\frac{V_0^1(w)}{(z-w)^3} - 5\frac{\partial V_0^1(w)}{(z-w)^2} + \dots \end{aligned} \quad (7.7.4)$$

Полетата $1, \mathcal{T}(w), \partial\mathcal{T}(w), \partial^2\mathcal{T}(w)$ принадлежат на семейството $[1, 1]$ на единицата, докато $V_0^1, \partial V_0^1$ принадлежат на семейството на $[3, 1]$. Присъствието на повече от един сектор в РОП е белег на неабелевата статистика. Следователно, от гледна точка на минималните модели, първичните полета (7.7.1) се подчиняват на неабелева статистика.

От гледна точка на разширената хирална алгебра $\mathcal{A}(\widehat{u(1)}, 2\mathbb{Z})$, обаче, полетата $V_0^1, \partial V_0^1$ отново попадат в класа на единицата, понеже в този случай класовете са $[l/2]$, ($l = -1, 0, 1, 2$), тъй като са неутрални. Следователно в РОП участва само класа на единицата, т.е. няма белези на неабелева статистика.

Пълното доказателство на твърдението, че статистиката е абелева следва от отъждествяването на двата модела.

8 Максимално симетрично $c = 3$ описание на сдвоени Холови състояния

8.1 Рационално разширение на алгебрата $\widehat{u(1)}^3$ – модел на Фрьолих

До този момент разглеждахме само зарядови решетки от ранг 2 (които отговарят на централен товар на алгебрата на Вирасоро $c = 2$). Изглежда естествено да предположим, че зарядовите решетки свързани с квантово Холови флуиди трябва да имат минимален възможен ранг. От тази гледна точка може да изглежда излишно да търсим решетки с по-висок ранг, когато имаме задоволително описание на $v = \frac{1}{2}$ състоянието чрез $\mathcal{A}(\widehat{u(1)}^2, \Gamma)$.

Както обаче отбелязват Фрьолих, Щтудер и Тиран (ФЩТ) (вж. § 5 и § 7 и Таблица В.2 в Appendix В в [50]) съществува решетка с ранг 3, която дефинира "максимално симетричен" модел за състоянието с $v = \frac{1}{2}$. Изучаването на този модел се оказва доста полезно: както се отбелязва в [50] той съдържа локална $SU(2) \times SU(2)$ симетрия отговаряща на спинови въртения и размяна на слоевете.

Ние ще покажем, че $c = 2$ модела разгледан в § 4 може да бъде разглеждан като $U(1)$ (Вайлова част) калибровъчна редукция на ФЩТ модела.

Хиралната Холова решетка на модела ФЩТ, т.е. двойката (G, Q) е дефинирана в нормален базис (у-ние (9.5) [50]) както следва

$$\Gamma = \Gamma_{\text{phys}} = \{\mathbb{Z}q + \mathbb{Z}\vec{\alpha}^1 + \mathbb{Z}\vec{\alpha}^2\}, \quad G_{\Gamma} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = q^* = \frac{1}{2}(q - \frac{\vec{\alpha}^1 + \vec{\alpha}^2}{2}). \quad (8.1.1)$$

Структурата на секторите на суперотбор и техните правила на сливане е подобна на тази на 331 модела. В сила е

$$\Gamma^*/\Gamma = \mathbb{Z}_8 \quad (\Rightarrow |\Gamma| = \det G_{\Gamma} = 8); \quad (8.1.2)$$

ненулевите елементи на адитивната група Γ^*/Γ (подобно на базиса (4.3.4) на L^*/L) имат вида:

$$\begin{aligned} \pm \vec{\alpha}_1^* &= \pm \frac{1}{8}(5\vec{\alpha}^1 + \vec{\alpha}^2) \mp \frac{1}{4}q \in \pm \vec{\alpha}_1^* + \Gamma, \quad \Delta_{\pm 1} = \frac{1}{2}|\vec{\alpha}_1^*|^2 = \frac{5}{16}, \quad (Q|\vec{\alpha}_1^*) = -\frac{1}{4}; \\ \pm(2\vec{\alpha}_1^* - \vec{\alpha}^1) &= \pm \frac{1}{4}(\vec{\alpha}^1 + \vec{\alpha}^2) \mp \frac{1}{2}q \in \pm 2\vec{\alpha}_1^* + \Gamma, \\ \Delta_{\pm 2} &= \frac{1}{4}, \quad (Q|2\vec{\alpha}_1^* - \vec{\alpha}^1) = -\frac{1}{2}; \\ \pm(3\vec{\alpha}_1^* - 2\vec{\alpha}^1 + q) &= \pm \frac{1}{8}(3\vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}^1) \pm \frac{1}{4}q \in \pm 3\vec{\alpha}_1^* + \Gamma, \\ \Delta_{\pm 3} &= \frac{5}{16}, \quad (Q|3\vec{\alpha}_1^* - 2\vec{\alpha}^1 + q) = \frac{1}{4}; \\ \frac{1}{2}(\vec{\alpha}^1 + \vec{\alpha}^2) &\in 4\vec{\alpha}_1^* + \Gamma, \quad \Delta_4 = \frac{1}{2}, \quad \left(Q\left|\frac{(\vec{\alpha}^1 + \vec{\alpha}^2)}{2}\right.\right) = 0. \end{aligned} \quad (8.1.3)$$

Отново, както при модела 331, секторите на суперотбор са представени в Таблица 3

Таблица 3: Сектори на суперотбор за модела ФЩТ

косет (λ) = $\lambda\vec{\alpha}_1^* + \Gamma$	представител q^*	заряд ($Q q^*$)	размерност $\Delta = \frac{1}{2} q^* ^2$
(0)	0	0	0
(± 1)	$\pm\vec{\alpha}_1^*$	$\mp\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$
(± 2)	$\pm(2\vec{\alpha}_1^* - \vec{\alpha}^1)$	$\mp\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
(± 3)	$\pm(3\vec{\alpha}_1^* - 2\vec{\alpha}^1 + q)$	$\pm\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$
(4)	$\frac{1}{2}(\vec{\alpha}^1 + \vec{\alpha}^2)$	0	$\frac{1}{2}$

Трябва да отбележим, че размерностите Δ_{2n} отговарящи на класовете с четен заряд от нетвистирания сектор ($\Delta_0 = 0$, $\Delta_{\pm 2} = \frac{1}{4}$, $\Delta_4 = \frac{1}{2}$) съвпадат точно с тези от \mathbb{Z}_4 подгрупата на L^*/L определена чрез (4.3.4) за $m = 2$. Същото е вярно и за минималните стойности на скаларните произведения на \mathbb{Q} с векторите във всеки от класовете изброени в последната колона на у-ние (8.1.3). В двата случая, *най-малкият положителен (дробен) електричен заряд на квазичастица* $e \frac{1}{4}$.

Решетката Γ (8.1.1) изпълнява условието Q3 за връзка между заряда и статистиката. При това Γ_{phys} съдържа двойка вектори q^i , $i = 1, 2$, които заедно с вектора на електричния заряд Q , удовлетворяват Q1 – Q3 с фактор на запълване $\nu = (Q|Q) = 1/2$.

За да проверим това твърдение преминаваме от нормалния базис (8.1.1) на Γ към нейния *симетричен базис* (ФЩТ [50] § 3),

$$q^1 = q - \vec{\alpha}^1, \quad q^2 = q - \vec{\alpha}^2, \quad q^3 = q \quad (\Rightarrow \vec{\alpha}^i = q^3 - q^i, \quad i = 1, 2, 3) \quad (8.1.4a)$$

който се характеризира чрез

$$G_{\Gamma}(q^i) = \left((q^i|q^j)_{i,j=1,2} \right) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad (Q|q^i) = 1. \quad (8.1.4b)$$

Получената рационална конформна теория с хирална алгебра $\mathcal{A}(\Gamma)$ отново може да бъде разглеждана като \mathbb{Z}_2 орбифолд на тензорно произведение съответстващо на ортогоналната решетка $\Gamma_{2,1,1}$ (която разширява Γ)

$$\begin{aligned} (\Gamma \subset) \Gamma_{2,1,1} &= \{ \mathbb{Z}e^0 \oplus \mathbb{Z}e^1 \oplus \mathbb{Z}e^2 \}, \quad e^0 = 2Q = q - e^1, \quad e^1 = \frac{1}{2}(\vec{\alpha}^1 + \vec{\alpha}^2), \\ e^2 &= \frac{1}{2}(\vec{\alpha}^1 - \vec{\alpha}^2), \quad (e^\mu|e^\nu) = |e^\mu|^2 \delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, \quad |e^0|^2 = 2, \quad |e^1|^2 = |e^2|^2 = 1. \end{aligned} \quad (8.1.5)$$

Наистина, ако въведем тока

$$J^\sigma(z) = J^Q(z) + J^{\vec{\alpha}^1}(z) \quad (\vec{\alpha}^1 = e^1 + e^2, \quad J^Q(z) = \frac{1}{2}J^{e^0}(z)), \quad (8.1.6)$$

тогава вътрешния автоморфизъм σ на разширената хирална алгебра зададен с

$$\sigma(A) = e^{i\pi J_0^\sigma} A e^{-i\pi J_0^\sigma}, \quad \text{for } A \in \mathcal{A}_{2,1,1} \quad (8.1.7)$$

оставя инвариантен всеки елемент на физическата подалгебра $\mathcal{A}(\Gamma)$ и променя знака на основните оператори на отместване на заряда $E^{\pm e^v}$ и асоциираните Бозе (за $v = 0$) и Ферми (за $v = 1, 2$) локални заредени полета.

В този случай Правилото на Четност може да бъде изобразено схематично

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / (-1)^{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} = 1, \quad (8.1.8)$$

т.е. елементът $\vec{\omega} = \omega_i e^i \in \Gamma_{2,1,1}$ ($\omega_i \in \mathbb{Z}$) е също елемент на Γ (8.1.1) тогава и само тогава, когато $(-1)^{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} = 1$. Както ще видим по нататък моделът 331 се получава от този модел чрез подходяща редукция при която правилото на четност (8.1.8) преминава в това (4.5.5) за модела 331.

Характерите $\chi_\lambda^\Gamma(\tau, \zeta)$ на неприводимите представления на хиралната алгебра $\mathcal{A}(\Gamma)$ се дават със следния аналог на (4.9.34)

$$\chi_\lambda^\Gamma(\tau, \zeta) = e^{-\frac{\pi}{2} \frac{(\text{Im}\zeta)^2}{\text{Im}\tau}} \text{ch}_\Gamma^\lambda(\tau, \zeta) \quad (8.1.9a)$$

$$\text{ch}_\Gamma^\lambda(\tau, \zeta) = K_0(\tau; 2)K_\lambda(\tau; 2)K_{-\lambda}(\tau, 2\zeta; 8) + K_1(\tau; 2)K_{\lambda+1}(\tau; 2)K_{4-\lambda}(\tau, 2\zeta; 8) \quad (8.1.9b)$$

($\lambda \bmod 8$). Доказателството на (8.1.9) е напълно аналогично на това за (4.9.34).

Така отново получаваме статсума, която е (T^2, S, U, V) инвариантна

$$Z_\Gamma(\tau, \zeta) = \sum_{\lambda=-3}^4 |\chi_\lambda^\Gamma(\tau, \zeta)|^2. \quad (8.1.10)$$

Следователно модела на ФЦТ удовлетворява всичките необходими физически условия за Холов флуид с $v = 1/2$. В допълнение към това, този модел притежава $\widehat{su(2)} \otimes \widehat{su(2)}$ алгебра на токове като подалгебра на $\mathcal{A}(\Gamma)$ породена от заредените токове $E^{\pm \vec{\alpha}^i}(z)$ удовлетворяващи

$$[E^{\vec{\alpha}^i}(z_1), E^{-\vec{\alpha}^j}(z_2)] = \left(J^{\vec{\alpha}^i}(z_2) \delta(z_{12}) - \delta'(z_{12}) \right) \delta_{ij}, \quad (8.1.11)$$

където $J^{\vec{\alpha}}$ са съответните Картанови токове (присъстващи вече в (8.1.6)) които комутират с електромагнитния ($u(1)$ -) ток $J^Q(z)$ (дефиниран в у-ние (8.1.6)). Той осигурява локална реализация на $SU(2)_{\text{spin}} \times SU(2)_{\text{layer}}$ симетрията на модела (оправдаваща наименованието на ФЦТ "максимално симетричен").

8.2 Калибровъчни редукции на модела на Фрьолих: 331 модел и Пфафов модел

Реализацията на $v = \frac{1}{2}$ състоянието чрез алгебрата $\mathcal{A}(L)$ на модела 331 дадена в предходните параграфи може да бъде възпроизведена от модела ФЦТ ако премахнем $U(1)$ тока

$$I(z) (\equiv J^{e^2}(z)) = \frac{1}{2} \left(J^{\bar{\alpha}^1}(z) - J^{\bar{\alpha}^2}(z) \right) \quad (8.2.1)$$

породен от двойката спрегнати Вайлови спинори

$$\varphi(z) = E^{-e^2}(z), \quad \varphi^*(z) = E^{e^2}(z) \Rightarrow I(z) = : \varphi^*(z) \varphi(z) :. \quad (8.2.2)$$

В частност, тензора на енергията

$$T_L(z) = \frac{1}{2} : \left\{ J_1(z) J^1(z) + J_2(z) J^2(z) \right\} :, \quad (8.2.3)$$

където $\{J^i\}$ и $\{J_i\}$ са дуалните базиси на Картановата подалгебра на $\mathcal{A}(L)$ се получава от тензора $T_\Gamma(z)$ на $\mathcal{A}(\Gamma)$ чрез изваждане на приноса (по формулата на Сугавара) на $I(z)$:

$$T_L(z) = T_\Gamma(z) - \frac{1}{2} : I^2(z) :. \quad (8.2.4)$$

С други думи $\mathcal{A}(L)$ се получава от $\mathcal{A}(\Gamma)$ ако "откалибрираме" втория фактор в разширената алгебра

$$\mathcal{A}(\Gamma_{2,1,1}) = \mathcal{A}(\Gamma_{2,1}) \otimes \mathcal{A}(\Gamma_1) \quad (8.2.5)$$

съответстваща на решетката (8.1.5) и след това направим \mathbb{Z}_2 орбифолд.

Обобщавайки тази процедура можем още да получим Пфафовия модел като калибровъчна редукция на 331 модела [В] както това беше направено в § 5.

Накрая трябва да отбележим, че Пфафовият модел се получава от модела на Фрьолих чрез две последователни калибровъчни редукции, които са еквивалентни на афинния косет

$$\text{Ising} = \frac{\widehat{su(2)}_1 \oplus \widehat{su(2)}_1}{\widehat{su(2)}_2}. \quad (8.2.6)$$

Наистина, при първата редукция се премахва $\widehat{u(1)}$ -тока (8.2.1) при което получаваме 331 модела. Следващата стъпка е да унищожим имагинарната част на Вайловия фермион оставащ в 331 модела (виж § 5), който е Майоранов фермион. Комбинирайки тези две стъпки и отчитайки релацията

$$\text{Ising} \otimes \widehat{u(1)} = \widehat{su(2)}_2$$

получаваме у-ние (8.2.6).

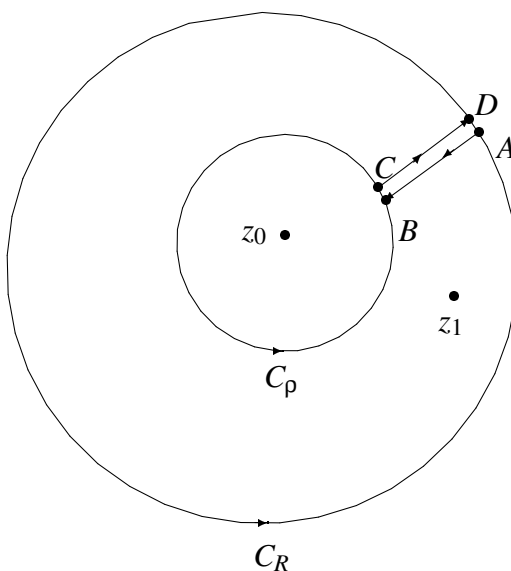
Допълнение А Аналитична δ -функция

Изхождаме от дефиницията на δ -функционала

$$\langle \delta_{z_1} | u \rangle = u(z_1) = \oint_{S_1} \delta(z_1 - z_2) u(z_2) \frac{dz_2}{2\pi i}, \quad (\text{A.1})$$

където пробната функция $u(z)$ е аналитична в кръговия венец ограничен от контурите C_R и C_p изобразени на Фиг. 15.

Фигура 15: Контурите C_R и C_p по които се извършва интегрирането при Лорановото развитие на δ -функцията



Да приложим формулата на Коши за аналитичната функция $u(z)$

$$u(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{u(z_2)}{z_2 - z_1} dz_2, \quad (\text{A.2})$$

където затворения контур се оформя от $\Gamma = C_R + \bar{C}_p + \vec{AB} + \vec{CD}$. Като отчетем, че интегралите по контурите \vec{AB} и \vec{CD} се компенсират взаимно

$$\int_A^B \frac{u(z_2)}{z_2 - z_1} dz_2 = - \int_C^D \frac{u(z_2)}{z_2 - z_1} dz_2 \quad (\text{A.3})$$

за пълния контурен интеграл можем да запишем

$$u(z_1) = \langle \delta_{z_1} | u \rangle = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \oint_{C_R} \frac{u(z_2)}{z_2 - z_1} dz_2 - \oint_{C_p} \frac{u(z_2)}{z_2 - z_1} dz_2 \right\}. \quad (\text{A.4})$$

Да преработим поотделно двата контурни интеграла:

1. Когато $z_2 \in C_R$: $|z_2 - z_0| > |z_0 - z_1| \Rightarrow$

$$\frac{1}{z_2 - z_1} = \frac{1}{z_2 - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \right)^n \Rightarrow \oint_{C_R} \frac{u(z_2)}{z_2 - z_1} dz_2 = \oint_{C_R} \frac{1}{z_2 - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \right)^n u(z_2) dz_2. \quad (\text{A.5})$$

2. Когато $z_2 \in C_p$: $|z_1 - z_0| > |z_2 - z_0| \Rightarrow$

$$\frac{1}{z_2 - z_1} = -\frac{1}{z_1 - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \right)^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z_1 - z_0)^n}{(z_2 - z_0)^{n+1}}. \quad (\text{A.6})$$

Освен това можем да деформираме контура $C_p \rightarrow C_R$ без да преминаваме през особени точки, следователно

$$\oint_{C_p} \frac{u(z_2)}{z_2 - z_1} dz_2 = -\oint_{C_R} \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z_1 - z_0)^n}{(z_2 - z_0)^{n+1}} u(z_2) dz_2. \quad (\text{A.7})$$

Така, в крайна сметка, получаваме

$$\langle \delta_{z_1} | u \rangle = \oint_{S_1} \delta(z_1 - z_2) u(z_2) \frac{dz_2}{2\pi i} = \oint_{C_R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z_1 - z_0)^n}{(z_2 - z_0)^{n+1}} u(z_2) \frac{dz_2}{2\pi i}. \quad (\text{A.8})$$

По-нататък, без ограничение на общността, избираме $z_0 = 0$ и $C_R \equiv S_1$, така че

$$\begin{aligned} \delta(z_1 - z_2) &= \frac{1}{z_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^n = \frac{1}{z_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^n = \frac{1}{z_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^n + \frac{1}{z_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^n = \\ &= \frac{1}{z_1 - z_2} + \frac{1}{z_2 - z_1}, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

където използвахме означението

$$\frac{1}{z_1 - z_2} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{z_1 \rightarrow z_2 \\ |z_1| > |z_2|}} \frac{1}{z_1 - z_2} = \lim_{|z_1| \rightarrow |z_2|^+} \frac{1}{z_1 - z_2}. \quad (\text{A.10})$$

Уравнение (A.9) изразява *тъждеството на Сохоцки*.

Допълнение В Неприводими представяния на абелевата група \mathbb{Z}_N

Нека

$$\mathbb{Z}_N = \left\{ g = e^{2\pi i \frac{\mu}{N}} \mid 0 \leq \mu \leq N-1 \right\}. \quad (\text{B.1})$$

Тогава изображението

$$\begin{aligned} (0) \quad & \varphi: \mathbb{Z}_N \rightarrow \text{End } \mathcal{V} \\ (i) \quad & \varphi(1) = 1 \\ (ii) \quad & \varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in \mathbb{Z}_N \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

се нарича представяне на \mathbb{Z}_N . Броят на неприводимите нееквивалентни представяния на една крайна група е равен на броя на *класовете на спрегнатост* [38, 37], които представляват орбитите на действие на групата върху себе си

$$[g] = \{h^{-1}gh \mid g \in \mathbb{Z}_N\}. \quad (\text{B.3})$$

За една абелева група $hg = gh$ и следователно всеки клас на спрегнатост съдържа по един елемент, т.е. броят на класовете на спрегнатост (респективно броят на нееквивалентните неприводими представяния) съвпада с порядъка $|\mathbb{Z}_N| = N$ на абелевата група. Също така, размерностите n_i на неприводимите представяния удовлетворяват [38]

$$\sum_i n_i^2 = |\mathfrak{G}|, \Rightarrow \sum_{i=0}^{N-1} n_i^2 = |\mathbb{Z}_N| = N \Rightarrow n_i = 1 \quad \forall i.$$

Така виждаме, че всички неприводими представяния на една крайна абелева група са едномерни (директно доказателство на този факт може да бъде направено още с помощта на лемата на Шур.)

Сега можем да дефинираме следните представяния:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(h) & \in \text{End } \mathbb{C} \\ \varphi_\alpha(h)x & = h^\alpha x, \quad \forall h \in \mathbb{Z}_N, \forall x \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Проверяваме дефиниционните условия:

$$\begin{aligned} (i) \quad & : \quad \varphi_\alpha(1)x = (1)^\alpha x = 1 \cdot x \\ (ii) \quad & : \quad \varphi_\alpha(g_1)\varphi_\alpha(g_2)x = (g_1)^\alpha (g_2)^\alpha x = (g_1 \cdot g_2)^\alpha x = \varphi_\alpha(g_1 \cdot g_2)x. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Следователно, у-ние (B.4) наистина дефинира представяне на \mathbb{Z}_N .

Ограничения върху α

1) Целочисленост:

Тъй като \mathbb{Z}_N е циклична група трябва да е изпълнено

$$h^N = 1 \quad \forall h \in \mathbb{Z}_N \Rightarrow$$

$$\varphi_\alpha(h^N) = \varphi_\alpha(1) = 1 = h^{\alpha N} = e^{2\pi i \frac{\mu}{N} \alpha N} = e^{2\pi i \mu \alpha} = 1.$$

Но по определение $\mu = 0, \dots, N-1$ следователно параметърът α на допустимите представяния на \mathbb{Z}_N трябва да удовлетворява $\alpha \in \mathbb{Z}$.

2) Периодичност:

Очевидно в този случай е изпълнено

$$\varphi_{\alpha+N}(g) \equiv \varphi_\alpha(g).$$

Тогава нееквивалентните неприводими представяния на групата \mathbb{Z}_N се задават с

$$\begin{aligned} \forall g = e^{2\pi i \frac{\mu}{N}} \in \mathbb{Z}_N \\ \varphi_\alpha(g) = g^\alpha, \quad \alpha \bmod N \text{ (напр. } 0 \leq \alpha \leq N-1). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Броят на така дефинираните нееквивалентни представяния (които са неприводими, понеже са едномерни) е N , т.е. това са всичките неприводими нееквивалентни представяния на крайната абелева група \mathbb{Z}_N .

Характерите на тези представяния

$$\sigma_\alpha(g) \stackrel{\text{def}}{=} \text{tr}_{\mathbb{C}} \varphi_\alpha(g) \equiv g^\alpha \quad (\text{B.7})$$

съвпадат със самите матрични елементи, понеже представянията са едномерни.

Друга особеност на абелевите групи е, че централизаторът на всеки елемент съвпада с цялата група. Наистина,

$$\forall h \in \mathfrak{G} \quad h^{-1}gh = g \Rightarrow \mathfrak{G}_g \equiv \mathfrak{G}$$

Допълнение С Пфафианът като антисиметризация на детерминантата

В това допълнение ще покажем, че антисиметризацията на детерминантата точно възпроизвежда Пфафиана. Да означим детерминантата ($w_i = z_{N+i}$)

$$\det\left(\frac{1}{z_i - w_j}\right) = \Delta(z_i, z_{N+i}) = \sum_{\rho \in S_N} \text{sgn}(\rho) \prod_{i=1}^N \frac{1}{z_i - z_{N+\rho(i)}} \quad (\text{C.1})$$

и да антисиметризираме относно всичките $2N$ индекса

$$\mathcal{A} \Delta(z_i, z_{N+i}) = \frac{1}{2^N (N!)^2} \sum_{\sigma \in S_{2N}} \text{sgn}(\sigma) \sum_{\rho \in S_N} \text{sgn}(\rho) \prod_{i=1}^N \frac{1}{z_{\sigma(i)} - z_{\sigma(N+\rho(i))}} \quad (\text{C.2})$$

Нормировъчния фактор отчита първоначалната симетрия на детерминантата:

- размяна на стълбове и редове: това е антисиметрия на детерминантата (C.1) относно размяната $z_i \leftrightarrow z_j$ и $z_{N+i} \leftrightarrow z_{N+j}$ поотделно. Следователно трябва да разделим на $(N!)^2$
- поради антисиметрията на матрицата $\frac{1}{z_i - z_j} = -\frac{1}{z_j - z_i}$ трябва още да разделим на 2^N .

Тогава да разгледаме следната пермутация

$\rho' = [1, 2, \dots, N; N + \rho(1), N + \rho(2), \dots, N + \rho(N)] =: \varepsilon \oplus \rho \in S_{2N}$ (където $\varepsilon \in S_N$ е единичната пермутация) така, че

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \Delta(z_i, z_{N+i}) &= \\ &= \frac{1}{2^N (N!)^2} \sum_{\rho' \in \varepsilon \oplus S_N} \text{sgn}(\rho') \sum_{\sigma \in S_{2N}} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^N \frac{1}{z_{\sigma(\rho'(i))} - z_{\sigma(\rho'(N+i))}} = \\ &= \frac{1}{2^N (N!)^2} \sum_{\rho' \in \varepsilon \oplus S_N} \sum_{\sigma' \in S_{2N}} \text{sgn}(\sigma') \prod_{i=1}^N \frac{1}{z_{\sigma'(i)} - z_{\sigma'(N+i)}} = \left(\frac{\text{смяна на променливите}}{\sigma' = \sigma \circ \rho'} \right) \\ &= \frac{N!}{2^N (N!)^2} \sum_{\sigma' \in S_{2N}} \text{sgn}(\sigma') \prod_{i=1}^N \frac{1}{z_{\sigma'(i)} - z_{\sigma'(N+i)}} = \\ &= \frac{1}{2^N N!} \sum_{\sigma' \in S_{2N}} \text{sgn}(\sigma') \prod_{i=1}^N \frac{1}{\xi_{\sigma'(2i-1)} - \xi_{\sigma'(2i)}} = \text{Pf}\left(\frac{1}{\xi_i - \xi_j}\right), \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

където $z_i = \xi_{2i-1}$, $z_{N+i} = \xi_{2i}$. По-нататък, понеже Пфафианът е напълно антисиметричен, преминаването от ξ_i обратно към z_i добавя само фактора $(-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}$. Така получихме следния резултат

$$\mathcal{A} \det\left(\frac{1}{z_i - z_{N+j}}\right) = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \text{Pf}\left(\frac{1}{z_i - z_j}\right). \quad (\text{C.4})$$

Заклучение. Приноси на дисертанта

Проведеното изследване позволява да бъдат направени следните изводи:

- Всички конформни модели предложени за описание на платото $\nu = 1/2$ наблюдавано в двуслойни Холови системи могат да бъдат получени чрез подходящи калибровъчни редукции от един единствен модел – Максимално симетричния модел попадащ в класификацията на Фрьолих.
- Решетъчният подход към модела 331 е еквивалентен на \mathbb{Z}_2 орбифолда на алгебрата $\mathcal{W}_1 \otimes \widehat{su}(2)_1$, т.е. 331 моделът може да бъде разглеждан като калибровъчна теория с крайна калибровъчна група. Правилото на четност се реализира чрез вътрешни автоморфизми на абелевата алгебра на токове.
- Пфафовият модел се реализира като калибровъчна редукция на 331 модела, при която се унищожава имагинерната част на Вайловите фермиони изграждащи неутралната част от 331 модела. В резултат от проекцията се нарушава динамичната симетрия $W_{1+\infty}$ на несвиваемите квантови флуиди. Правилата на сливане от абелеви, за 331 модела, се превръщат в неабелеви след проекцията към Пфафовия модел.
- Намерено е описание на HR модела чрез унитарна КТП с (пълн) централен товар на Вирасоро $c = 2$ и положително дефинитно скалярно произведение. След прехода към унитарната теория $SU(2)$ симетрията на вълновите функции и първичните полета, присъстваща в $c = -1$ теорията, се нарушава. Предефинирането на тензора на енергията води до същото множество от характери, но с отместени индекси и този път върху пространство с дефинитна метрика. Пълните характери, удовлетворяващи общото правило на четност съвпадат (след отместването на индексите им) с тези на 331 модела. По този начин всички характеристики, включително статсумите, на моделите HR и 331 съвпадат. Статистиката на квазидупките в унитарния модел е дробна, но абелева, а топологичния ред е равен на осем.
- Съществува възможност да се отдели основното състояние на модела HR от 331 модела като се направи \mathbb{Z}_2 орбифолд относно действието на товароспрягането. Тогава очаквания топологичен ред е 18, а правилата на сливане както и обменната статистика на квазичастиците се очаква да бъде неабелева.

Тези изводи представляват основния принос на дисертанта. Те са публикувани в [B,A,C,D]. Към тях трябва да се добавят приносите за разработване на апарата на развитие на операторни произведения, използвани в анализа на алгебрата $W_{1+\infty}$, чрез използването на *билокални полета* [C,A] и модификацията [A] на орбифолдната конструкция на Кац–Годоров за прилагане върху пълните характери, т.е. за ненулеви елементи от Картановата подалгебра (респ. ненулев химичен потенциал), какъвто е случая на КТП прилагани към квантовия ефект на Хол.

Благодарности

Бих искал да изкажа най-сърдечни благодарности на моя научен ръководител акад. Иван Тодоров и на моя научен консултант проф. Андреа Капели за усилията, проявеното търпение и постоянното насърчаване по време на съвместната ни работа. Благодарен съм също на Божко Бакалов от Massachusetts Institute of Technologies, ст.н.с. II ст., д-р Людмил Хаджииванов, ст.н.с. I ст. д-р Владимир Герджиков, както и на цялата група по Теория на Елементарните Частици към ИЯИЯЕ за многобройните дискусии по време на моята докторантура. Специална благодарност заслужава н.с. Владимир Молотков за неограничената техническа помощ при различните етапи на предпечатна подготовка на дисертацията.

Дисертантът благодари на следните институции за получената финансова подкрепа при пътуванията по време на подготовката на дисертационния труд:

- Национален Институт за Ядрена Физика (Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, sez. di Firenze) и на Факултета по Физика към Университета на Флоренция (Dipartimento di Fisica – Università di Firenze) за финансовата подкрепа и изключителното гостоприемство по време на неговите посещения през 1996, 1998 г.
- Erwin Schrodinger Institute for Mathematical Physics, Виена – за гостоприемство и подкрепа (м. Септември 1998) в заключителната фаза на последната публикация [B].
- Международен Институт за Теоретична Физика, Триест (International Center for Theoretical Physics) и в частност на организаторите на "III Trieste Conference on Statistical Field Theory" (м. Юни 1998 г.) за финансовата подкрепа.
- Висшето Международно Училище, Триест (Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati - SISSA) за финансовата подкрепа при посещението му през м. Март 1995 г.
- Национална Фондация за Научни Изследвания за частична финансова подкрепа по договор Ф-404.

Списък на публикациите върху които е изграден дисертационният труд

- [A] L.S. Georgiev, I.T. Todorov, *Rational conformal field theory extensions of $W_{1+\infty}$ in terms of bilocal fields*, J. Math. Phys. **39** (1998) pp. 5762–5771.
- [B] A. Cappelli, L.S. Georgiev, I.T. Todorov, *A unified conformal field theory description of paired quantum Hall states*, Preprint ESI 621 (1998); hep-th/9810105 (submitted to Comm. Math. Phys.).
- [C] B.N. Bakalov, L.S. Georgiev, I.T. Todorov, *A QFT approach to $W_{1+\infty}$* , in **New Trends in Quantum Field Theory** Proc. of 1995 Razlog (Bulgaria) Workshop, A. Ganchev, R. Kerner, I.T. Todorov (Eds.) (Heron Press, Sofia 1996) pp. 147–158.
- [D] L.S. Georgiev, I.T. Todorov, *Characters and partition function for the Wen–Wu model of the Haldane–Rezayi quantum Hall state*, hep-th/9611084.

Доклади на международни семинари и конференции

- Ноември 1996, Февруари 1998 – Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, sez. di Firenze.
- Юни 1998 – "III Trieste Conference on Statistical Field Theory", Trieste.
- Септември 1998 – "Number Theory and Physics", Erwin Schrodinger Institute for Mathematical Physics, Vienna.

Литература

- [1] K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 494.
- [2] M.A. Chang, and J.E. Cunningham, Solid State Commun. **72** (1989) 652.
- [3] R.G. Clark, J.R. Mallett, S.R. Haynes, J.J. Haris, and C.T. Foxon, Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 1747.
- [4] J.P. Eisenstein, R.L. Willett, H.L. Stormer, D.C. Tsui, A.C. Gossard, and J.H. English, Phys. Rev. Lett. **61** (1988) 997; J.P. Eisenstein, R.L. Willett, H.L. Stormer, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, Surf. Sci. **229** (1990) 31.
- [5] X.-G. Wen, *Topological orders and edge excitations in FQH states*, cond-mat/9506066.

- [6] R.E. Prange, S.M. Girvin, *The Quantum Hall Effect*, Springer–Verlag, New York, 1987.
- [7] *Perspectives in Quantum Hall effects*, (S. Das Sarma and A. Pinczuk, eds.) Wiley, New York (1997).
- [8] R.B. Laughlin, Phys. Rev. Lett.**50** (1983) 1395; Elementary theory: the incompressible quantum fluid, in [6].
- [9] L. Saminadayar, D.C. Glatli, Y. Jin, B. Etienne, *Observation of the $e/3$ fractionally charged Laughlin quasiparticles*, Phys. Rev. Lett.**78** (1997) 2526.
- [10] R. de Picciotto, M. Reznikov, M. Heiblum, V. Umanski, G. Bunin and D. Mahalu, *Direct observation of fractional charges*, Nature **389** (1997) 162; R. de Picciotto, *Shot noise of non-interacting composite fermions*, cond-mat/9802221.
- [11] Y. Stanev, I.T. Todorov, *Chiral Current Algebras and 2-Dimensional Conformal Models*, lectures delivered at the Troisieme Cycle de la Physique en Suisse Romande (Lousanne 1992).
- [12] F.D.M. Haldane, Phys. Rev. Lett.**67** (1991) 937.
- [13] Yong-Shi Wu, Phys. Rev. Lett.**73** (1994) 992.
- [14] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. **B241** (1984) 333.
- [15] J.L. Cardy, *Conformal invariance and statistical mechanics*, E. Brezin and J. Zinn-Justin, eds. Les Houches School, Session XLIX, 1988, in "Fields, Strings and Critical Phenomena", Elsevier Science Publishers B.V. (1989).
- [16] P. Ginsparg, *Applied Conformal Field Theory*, Les Houches School (1988).
- [17] K. Schoutens, Phys. Rev. Lett.**79** (1997) 2608; P. Bouwknecht and K. Schoutens, Nucl. Phys. **B482** (1996) 345; R.A.J. Elburg and K. Schoutens, *Quasi-particles in fractional quantum Hall effect edge theories*, cond-mat/9801272.
- [18] J. Frohlich, U.M. Studer, E. Thirran, *Quantum Theory of Large Systems of Non-Relativistic Matter*, Les Houches Summer School, Session 62 (1994): Fluctuating Geometries in Statistical Mechanics and Field Theories.
- [19] E. Witten, Comm. Math. Phys. **121** (1989) 351; G. Moore, N. Seiberg, Phys. Lett. **B220** (1989) 422.

- [20] A. Cappelli, C. A. Trugenberger, G. R. Zemba, Nucl. Phys. **B396** (1993) 465; Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 1902.
- [21] A. Cappelli, C.A. Trugenberger, C.R. Zemba, Nucl. Phys. **B448** [FS] (1995) 470; hep-th/9502021.
- [22] A. Cappelli, C. A. Trugenberger, G. R. Zemba, $W_{1+\infty}$ dynamics of edge excitations, Ann. Phys. (NY) **246** (1996) 86 (see also cond-mat/9407095); Int. J. Mod. Phys. **A12** (1997) 1101.
- [23] G. Moore, N. Read, Nucl. Phys. **B360** (1991) 362.
- [24] B. Halperin, Helv. Phys. Acta. **56** (1983) 1031.
- [25] F.D.M. Haldane, E.H. Rezayi, Phys. Rev. Lett.**60**, 956, (1988).
- [26] J. Polchinski, *What is string theory?*, in the 1994 Les Houches Summer School "Fluctuating Geometries in Statistical Mechanics and Field Theory".
- [27] P. Furlan, G. Sotkov, I.T. Todorov, *Two-Dimensional Conformal Quantum Field Theory*, Riv. Nuovo Cim. **12** : 6 (1989) 1.
- [28] P. Degiovanni, C. Chaubet, R. Melin, *Conformal field theory approach to gapless 1D fermion systems and application to the edge excitations of the $\nu = 1/(2p + 1)$ quantum Hall sequences*, cond-mat/9711173.
- [29] V. G. Kac, *Vertex algebras*, in *New Trends in Quantum Field Theory Proc. of 1995 Razlog (Bulgaria) Workshop*, A. Ganchev et al. (eds.) (Heron Press, Sofia 1996), pp. 261; *Vertex Algebras for Beginners* (AMS University Lecture Series, Vol. 10, 1997).
- [30] A. Cappelli, G.R. Zemba, *Modular invariant partition functions in the quantum Hall effect*, Nucl. Phys. **B490** [FS] (1997) 595.
- [31] T. Gannon, *$U(1)^m$ modular invariants, $N = 2$ minimal models, and the quantum Hall effect*, Nucl. Phys. **B 491** (1997) 659.
- [32] B.I. Halperin, P.A. Lee, and N. Read, *Phys. Rev.* **B47**, 7312, (1993).
- [33] M. Greiter, X.G. Wen, F. Wilczek, *Paired Hall states in double layer electron systems*, Phys. Rev. Lett.**66** (1991) 3205; Preprint IASSNS-HEP-92/1.
- [34] Y.W. Suen et al., Phys. Rev. Lett.**68** (1992) 1379.
- [35] J.P. Eisenstein, Phys. Rev. Lett.**68** (1992) 1383.

- [36] J.P. Eisenstein, Experimental studies of multicomponent quantum Hall systems, *Perspectives in Quantum Hall effects*, (S. Das Sarma and A. Pinczuk, eds.) Wiley, New York (1997).
- [37] M. Hamermesh, *Group Theory and its Application to Physical Problems*, Addison-Wesley series in physics (1962).
- [38] М.И. Петрашень, Е.Д. Трифонов, *Применение теории групп в квантовой механике*, Наука, Москва (1967).
- [39] X.-G. Wen, Y.-S. Wu, Nucl. Phys. **B419** [FS] (1994) 455.
- [40] X.-G. Wen, Y.-S. Wu, Y. Hatsugai, Nucl. Phys. **B422** [FS] (1994) 476.
- [41] M. Milovanovic and N. Read, Phys. Rev. **B53** (1996) 13559.
- [42] R. Dijkgraaf, C. Vafa, E. Verlinde, H. Verlinde, Commun. Math. Phys. **123** (1989) 485.
- [43] V.G. Kac and I.T. Todorov, *Affine orbifolds and rational conformal field theory extensions of $W_{1+\infty}$* , Commun. Math. Phys. **190** (1997) 57.
- [44] D.Friedan, E. Martinec, S. Shenker, Nucl.Phys. **B271** (1986) 93.
- [45] H. Kausch, Curiosities at $c = -2$, hep-th/9510149.
- [46] W. Eholzer, L. Feher, A. Honecker, Nucl. Phys. **B518** (1998) 669.
- [47] S. Guruswamy, A.W.W. Ludwig, Nucl. Phys. **B 519** (1998) 661.
- [48] V. Gurarie and M. Flohr, C. Nayak, Nucl. Phys. **B498** (1997) 513.
- [49] N. Read, E. Rezayi, Phys. Rev. **B 56** (1996) 16864.
- [50] J. Frohlich, E. Thirran, J. Stat. Phys. **76** (1994) 209; J. Frohlich, U.M. Studer, E. Thirran, J. Stat. Phys. **86** (1997) 821; J. Frohlich, T. Kerler, U.M. Studer, E. Thirran, Nucl. Phys. **B453** (1995) 670.
- [51] D.C. Tsui, H.L. Stormer, A.C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 1559; Phys. Rev. B **25** (1982) 1405; D.C. Tsui, H.L. Stormer, J.C.M. Hwang, J.S. Brooks, M.J. Naughton, Phys. Rev. B **28** (1983) 2274.
- [52] V. Kac and A. Radul, Comm. Math. Phys. **157** (1993) 429; Transformation Groups **1** (1996) 41.

- [53] E. Frenkel, V. Кас, A. Radul and W. Wang, *Comm. Math. Phys.* **170** (1995) 337.
- [54] I.T. Todorov, *Conformal Description of Spinning Particles*, Trieste Notes in Physics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1986.
- [55] R. Haag, *Local Quantum Physics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1992.
- [56] Ч. Кител, Х. Кремер, *Статистическа Термодинамика*, Наука и Изкуство, София (1988).
- [57] V. Кас, A.K. Raina, *Bombay Lectures on Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras*, Advanced Ser. in Math. Phys. **2** (World Scientific, Singapore).
- [58] В. Кац, *Безконечномерные алгебры Ли*, Москва, Мир (1993).
- [59] E. Verlinde, *Nucl. Phys.* **B300** (1988) 360.
- [60] N.N. Bogolubov, A.A. Logunov, A.I. Oksak, I.T. Todorov, *General Principles of Quantum Field Theory*, Kluwer Acad. Publishers Dordrecht-Boston-London (1990).
- [61] R. Varnhagen, *Topology and fractional quantum Hall effect*, Preprint BONN-Th-94-22, hep-th/9411031.
- [62] J.H. Conway, N.J.A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*, 2nd edition (Springer-Verlag, Berlin, 1993).
- [63] D. Gepner, Z. Qui, *Nucl. Phys.* **B285** (1987) 423; P. Di Francesco, H. Saleur, J.-B. Zuber, *Nucl. Phys.* **B285** (1987) 454; R. R. Paunov, I. T. Todorov, *Phys. Lett.* **B196** (1987) 519.
- [64] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Статистическая физика*, част 1, Москва, Наука, 1995.
- [65] I. Affleck, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 746.
- [66] P. Goddard and D. Olive, *Int. J. Mod. Phys.* **1** (1986) 303.
- [67] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryshik, *Tables of Integrals, Series and Products* (Academic Press, 1980).
- [68] R. Willett, J.P. Eisenstein, H.L. Stormer, D.C. Tsui, A.C. Gossard, J.H. English, *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 1776.
- [69] F.D.M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 605, (1983).

- [70] F.D.M. Haldane, E.H. Rezayi Phys. Rev. Lett.**54** (1985) 237.
- [71] J.-C. Lee and X.-G. Wen *Electron and quasi-particle exponents of Haldane-Rezayi state in non-abelian quantum Hall theory*, Preprint cond-mat/9705303.
- [72] K. Ino, *Modular Invariants in the fractional quantum Hall effect*, cond-mat/9804198.
- [73] F.D.M. Haldane, Phys. Rev. Lett.**55** (1985) 2095.
- [74] F.D.M. Haldane, E.H. Rezayi Phys. Rev. **B 31** (1985) 2529.
- [75] X.-G. Wen and E. Keski-Vakkuri, Int. J. Mod. Phys. **B7** (1993) 4227.
- [76] W. Wang, Comm. Math. Phys. **195** (1998) 95; *Classification of irreducible modules of W_3 algebra with $c = -2$* , Preprint q-alg/9708016.
- [77] C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, Phys. Lett. **B52** (1974) 344; N. Dragon, *BRS symmetry and cohomology*, hep-th/9602163.