



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

SCUOLA DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Fisica e Astrofisica

Tesi di Laurea

Stabilità degli isolanti topologici

Relatore:

**Prof.
Andrea Cappelli**

Candidato:

**Luca Gonfiantini
Mat. 7050240**

ANNO ACCADEMICO 2023/24

Indice

Indice	1
1 Effetto Hall quantistico	3
1.1 Introduzione	3
1.2 L'effetto Hall quantistico intero	5
1.2.1 Livelli di Landau	5
1.2.2 Quantizzazione della conduttività Hall	7
1.2.3 Argomento di Laughlin	8
1.2.4 Disordine e stati di bordo	10
2 Isolanti Topologici in due dimensioni	12
2.1 Inversione temporale e teorema di Kramers	13
2.2 Modello di Bernevig e Zhang del QSHE	15
2.3 Argomento di Fu, Kane e Mele e indice \mathbb{Z}_2	16
Bibliografia	20

Introduzione

Che cos'è un isolante?

Sebbene la domanda possa sembrare banale, la risposta ha completamente rivoluzionato il paradigma della fisica dello stato condensato.

Verso la fine del 1900 sono state infatti osservate sperimentalmente nuove fasi della materia non ascrivibili a processi di rottura spontanea di simmetria, bensì caratterizzate da un comportamento collettivo degli elettroni, detto *ordine topologico*.

Si parla in questi casi di *fasi topologiche della materia*.

Esattamente come per un isolante ordinario, un isolante topologico è caratterizzato dalla presenza di un gap energetico nel bulk del campione. Ciò che differenzia i due sistemi è la presenza, in un isolante topologico, di eccitazioni di bordo a massa nulla, la cui stabilità viene garantita dall'invarianza del sistema sotto inversione temporale. Si parla in questo caso di *ordine topologico protetto da simmetria*.

I primi comportamenti inaspettati vennero ottenuti nel 1981 da Von Klitzing nello studio dell'effetto Hall in regimi di basse temperature e alti campi magnetici. Infatti, in queste condizioni, la conduttività Hall si stabilizza su certi plateau in corrispondenza dei quali assume valori quantizzati in unità di e^2/h .

Successivamente, agli inizi degli anni 2000, Fu e Kane intuirono che l'interazione spin-orbita, presente all'interno dei solidi reali, potesse produrre stati topologici non banali simili a quelli osservati nell'effetto Hall quantistico.

La tesi è strutturata come segue: nel primo capitolo andremo ad analizzare la fisica dell'effetto Hall quantistico intero, caratterizzato dalla presenza di un campo magnetico che rompe l'invarianza sotto inversione temporale. Analizzeremo la quantizzazione della conduttività Hall per mezzo di un argomento euristico elaborato nel 1981 da Robert Laughlin e concluderemo il capitolo con la descrizione degli stati di bordo.

Nel secondo capitolo studieremo la simmetria di inversione temporale in meccanica quantistica e, come applicazione, il teorema di Kramers.

Presenteremo in seguito un prototipo di un isolante topologico bidimensionale, ovvero l'effetto Hall quantistico di spin, descrivibile come due copie dell'effetto Hall quantistico. Concluderemo con l'argomento di Fu, Kane e Mele per la stabilità degli stati di bordo, garantita dall'invarianza sotto inversione temporale, e con la classificazione degli isolanti topologici per mezzo di un indice \mathbb{Z}_2 .

Capitolo 1

Effetto Hall quantistico

1.1 Introduzione

Una particella di carica q subisce la forza di Lorentz data da:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}). \quad (1.1)$$

Se la particella è vincolata a muoversi in un piano perpendicolare alla direzione di un campo magnetico uniforme \mathbf{B} , è facile convincersi che questa esegua un moto circolare. Queste considerazioni ci permettono di introdurre un semplice effetto che permise di determinare il segno di carica dei portatori di corrente, l'*Effetto Hall*. Il setup sperimentale è il seguente: consideriamo una lastra metallica immersa all'interno di un campo magnetico diretto lungo l'asse ortogonale z ed accendiamo un campo elettrico lungo l'asse y . Per effetto della forza di Lorentz i portatori di carica si accumuleranno da una parte della lastra, producendo una differenza di potenziale V_H e di conseguenza un campo elettrico lungo la direzione dell'asse x . La condizione di equilibrio verrà raggiunta quando la forza di Lorentz agente sui portatori di carica sarà nulla:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}) = \mathbf{0}. \quad (1.2)$$

Ricordando che $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{j}}{qn}$, con n la densità numerica di portatori di carica, e definendo il tensore conduttività σ_{ij} si ottiene:

$$j_i = \sigma_{ij} E_j, \quad \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & qn/B \\ -qn/B & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

La resistività è definita come l'inverso della conduttività:

$$\rho_{ij} = (\sigma_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -B/qn \\ B/qn & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Osserviamo quindi che nell'effetto Hall è presente una relazione lineare tra il campo magnetico e la resistività trasversale, il cui segno dipende dalla carica dei portatori di corrente. A temperature basse e campi magnetici molto alti, questa descrizione classica è tuttavia molto diversa dal risultato sperimentale, che ha un'origine quantistica. Questi nuovi comportamenti vennero messi in evidenza per la prima volta negli anni '80 da Von Klitzing, utilizzando

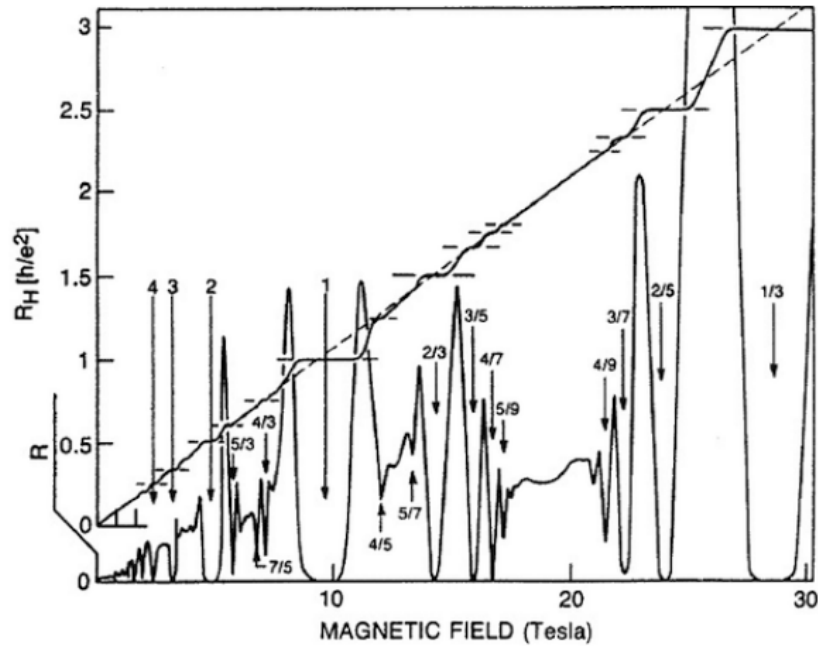


Figura 1.1: Andamento sperimentale della resistività Hall trasversa R_H e della resistività longitudinale R in funzione del campo magnetico applicato.

campioni preparati da Dorda e Pepper. L'andamento della resistività Hall osservato è riportato in 1.1. Notiamo che per certi valori del campo magnetico la resistività Hall ρ_{xy} si stabilizza su dei plateau in corrispondenza dei quali assume i valori:

$$\rho_{xy} = \frac{2\pi\hbar}{e^2} \frac{1}{\nu}, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots \quad (1.5)$$

La conduttività Hall di conseguenza è data da:

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \nu. \quad (1.6)$$

In corrispondenza dei plateau, la conducibilità longitudinale è nulla, indicando la presenza di un gap di energia nel sistema. Si osservano inoltre anche dei plateau più piccoli a valori frazionari di ν .

La precisione con cui i valori interi di ν sono misurati è strabiliante, una delle misure più precise mai realizzate, pari all'incirca ad una parte su un miliardo! Questo risultato è molto sorprendente perchè tipicamente gli apparati sperimentali sono ricchi di impurità e ci aspettiamo che una misura molto precisa dei valori di ν sia molto difficile da ottenere. Com'è possibile? Notiamo inoltre che all'aumentare del disordine i plateau misurati sperimentalmente diventano più ampi. Il comportamento appena descritto va sotto il nome, per ovvi motivi, di *Effetto Hall quantistico* (QHE). Cerchiamo adesso di giustificare quanto osservato sulla base di una trattazione quantistica. Ci limiteremo alla descrizione del sistema nel caso di ν intero

perchè il caso frazionario richiede la conoscenza della teoria quantistica dei sistemi a molti corpi, che non può essere affrontata in questa tesi.

1.2 L'effetto Hall quantistico intero

1.2.1 Livelli di Landau

Iniziamo ad analizzare la dinamica di una particella carica vincolata a muoversi in un piano (x, y) ed immersa all'interno di un campo magnetico uniforme perpendicolare al piano. L'hamiltoniana del sistema è data da:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2M} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2. \quad (1.7)$$

In presenza di un campo magnetico il momento dinamico $\boldsymbol{\pi}$ e quello canonico \mathbf{p} non coincidono, $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}$. Determiniamo adesso lo spettro e le autofunzioni dell'hamiltoniana nella cosiddetta *gauge simmetrica* in cui il potenziale vettore assume la forma $\mathbf{A} = \left(-\frac{yB}{2}, \frac{xB}{2}, 0\right)$.

Siccome il campo magnetico è uniforme, il sistema è invariante sia sotto traslazioni lungo x che lungo y . Sappiamo che in assenza di un campo magnetico il momento canonico rappresenta il generatore delle traslazioni spaziali. Qual è l'operatore che genera tali traslazioni in presenza di un campo magnetico? Le regole di commutazione di π_x con π_y sono:

$$[\pi_x, \pi_y] = ieB\hbar = -i\frac{\hbar^2}{l^2}, \quad (1.8)$$

dove abbiamo introdotto la *lunghezza magnetica* $l = \sqrt{\hbar/|e|B}$. È facile convincersi che nè il momento canonico, nè quello dinamico sono gli operatori che cerchiamo, poichè \mathbf{p} e $\boldsymbol{\pi}$ non commutano con l'hamiltoniana del nostro sistema. Possiamo quindi introdurre i cosiddetti operatori di traslazione magnetica definiti come:

$$k_i = \pi_i - eB\epsilon_{ij}x_j. \quad (1.9)$$

Gli operatori così definiti commutano sia con l'hamiltoniana che con il momento dinamico $\boldsymbol{\pi}$. D'altra parte:

$$[k_x, k_y] = i\frac{\hbar^2}{l^2}. \quad (1.10)$$

Possiamo quindi definire una prima coppia di operatori di creazione e distruzione:

$$b = \frac{l}{\sqrt{2\hbar}} (k_x + ik_y), \quad (1.11)$$

$$b^\dagger = \frac{l}{\sqrt{2\hbar}} (k_x - ik_y), \quad (1.12)$$

che soddisfano:

$$[b, b^\dagger] = 1, \quad [b, H] = 0, \quad [b^\dagger, H] = 0. \quad (1.13)$$

Com'è noto questi operatori agiscono in un insieme infinito di stati e quindi i livelli di energia sono infinitamente degeneri nel piano infinito. In una visione semiclassica gli

operatori precedentemente introdotti sono proporzionali agli operatori, X ed Y , associati alle coordinate del centro dell'orbita dell'elettrone. In particolare:

$$k_x = -eBY, \quad k_y = eBX. \quad (1.14)$$

Gli operatori X ed Y commutano con l'hamiltoniana e di conseguenza la degenerazione dei livelli di Landau è associata alla libertà nella scelta di X ed Y . Lo spettro dell'hamiltoniana si determina nel seguente modo: osserviamo che la forma quadratica e la regola di commutazione (1.8) ci ricordano l'oscillatore armonico uni-dimensionale. Siamo portati quindi a definire una seconda coppia di operatori di creazione e distruzione:

$$a = \frac{l}{\sqrt{2}\hbar} (\pi_x - i\pi_y), \quad (1.15)$$

$$a^\dagger = \frac{l}{\sqrt{2}\hbar} (\pi_x + i\pi_y), \quad [a, a^\dagger] = 1, \quad (1.16)$$

che commutano con b e b^\dagger . L'Hamiltoniana e la componente z del momento angolare possono essere riscritte come:

$$\mathcal{H} = \hbar\omega_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \quad (1.17)$$

$$L_z = xp_y - yp_x = \hbar (b^\dagger b - a^\dagger a), \quad (1.18)$$

dove è stata introdotta la *frequenza di ciclotrone* ω_c definita come $\omega_c = \frac{|e|B}{M}$. Lo spettro è dato da:

$$\epsilon_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.19)$$

I livelli energetici appena introdotti prendono il nome di *livelli di Landau*. Gli stati dello spazio di Hilbert sono dati da:

$$|n, m\rangle = \frac{a^{\dagger n} b^{\dagger m}}{\sqrt{n!m!}} |0, 0\rangle, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.20)$$

e sono infinitamente degeneri nei valori del momento angolare m . Introduciamo adesso le coordinate complesse $z = x - iy$ e $\bar{z} = x + iy$ e i corrispondenti operatori differenziali ∂ e $\bar{\partial}$ definiti come:

$$\partial = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \bar{\partial} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (1.21)$$

Per determinare le funzioni d'onda del primo livello di Landau è conveniente riscrivere le due coppie di operatori di creazione e distruzione in termini delle coordinate appena definite:

$$a = -i\sqrt{2} \left(l\bar{\partial} + \frac{z}{4l} \right), \quad a^\dagger = -i\sqrt{2} \left(l\partial - \frac{\bar{z}}{4l} \right), \quad (1.22)$$

$$b = -i\sqrt{2} \left(l\partial + \frac{\bar{z}}{4l} \right), \quad b^\dagger = -i\sqrt{2} \left(l\bar{\partial} - \frac{z}{4l} \right). \quad (1.23)$$

Le funzioni d'onda del primo livello di Landau si ottengono dall'equazione differenziale $a|0, m\rangle = 0$ e sono date da:

$$\psi_{0,m}(z, \bar{z}) = \frac{1}{l\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{m!}} \left(\frac{z}{l} \right)^m e^{-\frac{|z|^2}{4l^2}}. \quad (1.24)$$

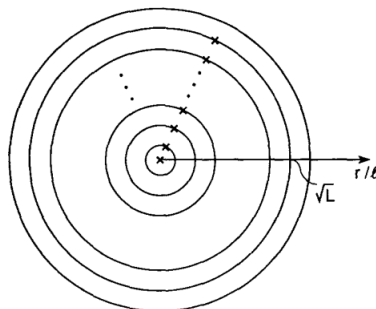


Figura 1.2: Struttura del primo livello di Landau in gauge simmetrica. Ciascuna circonferenza descrive l'orbita semiclassica dell'elettrone con raggio $\sqrt{2ml}$.

Osserviamo quindi che il modulo quadro della funzione d'onda del primo livello di Landau con momento angolare m è piccata in corrispondenza di una circonferenza di raggio $r = \sqrt{2ml}$. Di conseguenza, dato un sistema di area S finita, la degenerazione associata al primo livello di Landau è data da:

$$\mathcal{N} = \frac{S}{2\pi l^2} = \frac{eBS}{2\pi\hbar} = \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (1.25)$$

avendo definito il quanto di flusso $\Phi_0 = 2\pi\hbar/|e|$. La degenerazione corrisponde dunque al numero di quanti di flusso \mathcal{N} che attraversa S . La stessa degenerazione si osserva nei livelli di Landau superiori al primo.

Il riempimento dei livelli di Landau si realizza mettendo un elettrone per livello, poichè si dimostra che lo spin è completamente polarizzato nella direzione del campo magnetico nei materiali utilizzati per la misura del QHE. Il riempimento parziale di un livello determina uno stato fondamentale degenere, mentre il riempimento completo è unico ed è presente un gap di energia $\hbar\omega_c \propto B$ che è molto grande nelle condizioni sperimentali ($B \sim 10T$). Inoltre la bassa temperatura, $T \lesssim 1K$, implica che le fluttuazioni termiche sono soppresse. In conclusione, lo stato Hall con $n = 1, 2, \dots$ livelli pieni presenta un gap ed è molto stabile.

1.2.2 Quantizzazione della conduttività Hall

Adesso che abbiamo studiato i livelli di Landau, possiamo fornire una spiegazione qualitativa dell'andamento osservato in 1.1. Il plateau con $\nu = n$ che viene osservato corrisponde infatti al completo riempimento dei primi n livelli di Landau. Infatti i plateau osservati sperimentalmente corrispondono a:

$$\rho_{xy} = \frac{2\pi\hbar}{e^2} \frac{1}{\nu}. \quad (1.26)$$

Uguagliando questa espressione a quella ottenuta in (1.4) si ottiene che la densità numerica associata al ν -esimo plateau è data da:

$$n = \frac{B}{\Phi_0} \nu, \quad (1.27)$$

che corrisponde esattamente alla densità richiesta per riempire i primi n livelli di Landau. Inoltre la presenza di un gap di energia nei livelli di Landau ci permette di spiegare l'annullamento della resistività longitudinale in corrispondenza dei plateau osservati. Infatti

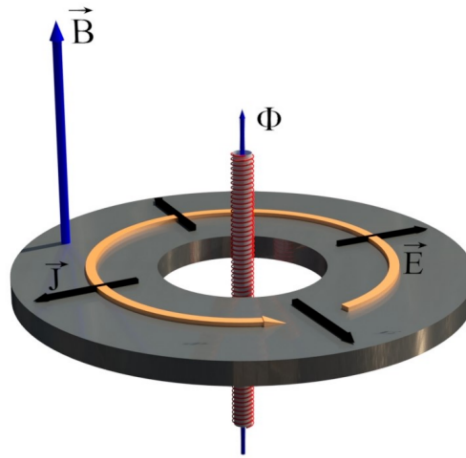


Figura 1.3: Rappresentazione schematica di un anello di Corbino, al cui centro viene inserito un flusso Φ variabile nel tempo.

a temperature T tali per cui $k_b T \ll \hbar \omega_c$, gli elettroni non riescono ad occupare stati nel livello di Landau successivo e, in particolare, il tempo medio di scattering tende a più infinito. Di conseguenza $\rho_{xx} = 0$.

1.2.3 Argomento di Laughlin

Nella sezione precedente abbiamo visto come sia possibile spiegare i valori della conduttività Hall attraverso i livelli di Landau. Ci rimane però ancora da discutere perchè tali valori siano così precisi. L'universalità di σ_{xy} ci fa intuire che ci possa essere un argomento di tipo topologico, responsabile per l'esatta quantizzazione della conduttività Hall. Non saremmo sulla cattiva strada. Nella presente sezione tuttavia ci limitiamo a discutere un argomento euristico elaborato nel 1981 da Robert B. Laughlin.

Consideriamo la geometria di un anello di Corbino, come mostrato in figura 1.3. L'idea alla base dell'argomento di Laughlin va sotto il nome di *flusso spettrale*. Il flusso spettrale è una riorganizzazione degli autovalori dell'hamiltoniana al variare di un certo parametro.

Immaginiamo di introdurre, in aggiunta al campo magnetico perpendicolare al campione, un solenoide in corrispondenza del centro dell'anello. Consideriamo un flusso variabile $\Phi(t)$ da $\Phi = 0$ a $\Phi(T) = \Phi_0$ e mettiamoci nelle condizioni per poter considerare un processo adiabatico. Se $\Phi(t)$ varia "lentamente" e se supponiamo che il livello fondamentale sia non degenere con un gap sufficientemente grande, il teorema adiabatico ci assicura che il sistema nella sua evoluzione rimanga in un autostato istantaneo dell' hamiltoniana.

Consideriamo il problema agli autovalori per l'hamiltoniana $H[\mathbf{A}]$ a $\Phi = 0$:

$$H[\mathbf{A}] \psi_m = E_m \psi_m. \quad (1.28)$$

A seguito dell'introduzione di un quanto di flusso $\Phi = \Phi_0$ il potenziale vettore in corrispondenza dell'anello viene modificato,

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \delta\mathbf{A}, \quad (1.29)$$

dove $\delta\mathbf{A}$ è una pura gauge, in quanto $\nabla \times \delta\mathbf{A} = 0$ (per $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$).

Di conseguenza l'inserzione di un quanto di flusso può essere eliminata dall'hamiltoniana effettuando una trasformazione di gauge, le autofunzioni acquistano un fattore di fase dato da,

$$\psi_m \rightarrow \exp\left(-\frac{i|e|\hbar}{\hbar} \int_{\gamma} \delta\mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}\right) \psi_m. \quad (1.30)$$

Scegliendo un potenziale vettore con componente solo tangenziale si ottiene,

$$\psi_m \rightarrow \exp\left(-\frac{i|e|\hbar}{\hbar} \Phi_0 \frac{\varphi}{2\pi}\right) \psi_m. \quad (1.31)$$

Dunque il problema agli autovalori (1.28) viene riscritto nel seguente modo:

$$e^{i\varphi} H[\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}] e^{-i\varphi} = H[\mathbf{A}], \quad H[\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}] e^{-i\varphi} \psi_m = E_m e^{-i\varphi} \psi_m. \quad (1.32)$$

D'altra parte,

$$e^{-i\varphi} \psi_m = e^{-i\varphi} e^{im\varphi} r^m e^{-\frac{r^2}{4l^2}} = \psi_{m-1}. \quad (1.33)$$

Si ottiene dunque:

$$H[\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}] \psi_{m-1} = E_m \psi_{m-1}. \quad (1.34)$$

Rinominando opportunamente gli indici:

$$H[\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}] \psi_m = E_{m+1} \psi_m. \quad (1.35)$$

Di conseguenza il problema (1.28) a flusso nullo viene mappato in (1.35) a $\Phi = \Phi_0$. Osserviamo che lo spettro rimane inalterato mentre le autofunzioni di singola particella sono cambiate da $m \rightarrow m + 1$ durante la variazione adiabatica del flusso, realizzando così il flusso spettrale. Ciascuno stato si è spostato da $r \approx \sqrt{2ml^2}$ a $r \approx \sqrt{2(m+1)l^2}$.

Se supponiamo di considerare un singolo livello di Landau completamente riempito, allora si è realizzato lo spostamento netto di un elettrone tra i due bordi del campione. Questa variazione di carica realizza la corrente Hall con ν esattamente uguale ad 1, spiegandone la precisione.

Il fatto che lo spettro rimanga immutato per l'inserzione di un numero intero di quanti di flusso è indicato come *teorema di Byers-Yang*:

$$H[\Phi = 0] = H[\Phi = n\Phi_0], \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.36)$$

dove l'uguaglianza va intesa a meno di una trasformazione di gauge. Lo stesso argomento vale per riempimenti completi di n livelli di Landau, con corrente $\nu = n$. È importante osservare che l'argomento qui presentato rimane corretto anche in presenza di interazioni elettrone-elettrone. Il potenziale Coulombiano è infatti un potenziale centrale e il momento angolare rimane dunque un buon numero quantico per descrivere gli stati del sistema.

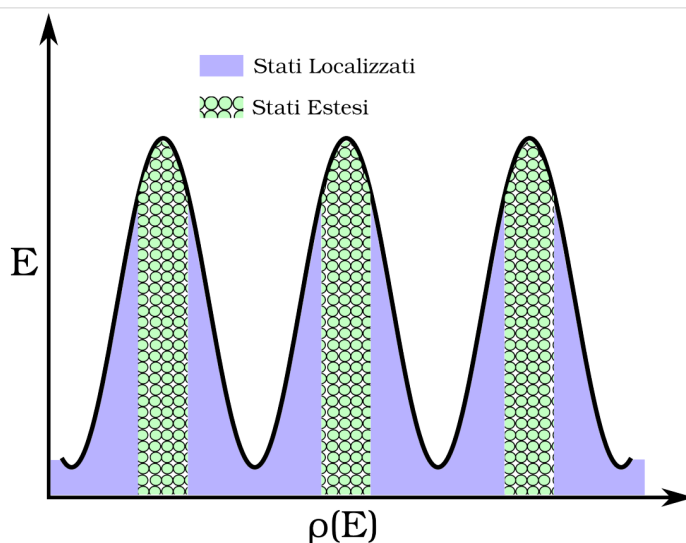


Figura 1.4: Andamento dell'energia E in funzione della densità degli stati in energia $\rho(E)$. Osserviamo come la presenza di impurità rimuove la degenerazione dei livelli di Landau e crea degli stati localizzati che non partecipano alla conduzione.

1.2.4 Disordine e stati di bordo

La descrizione sopra riportata non è ancora completa, in quanto non cattura due aspetti fondamentali di uno stato Hall quantistico: il ruolo del disordine e gli stati di bordo.

La schematizzazione delle impurezze per mezzo di un potenziale $V(\mathbf{x})$ rimuove la degenerazione dei livelli di Landau, portando alla formazione di stati localizzati, ovvero stati legati dell'elettrone con le impurezze, e stati delocalizzati, corrispondenti alla deformazione dei livelli di Landau, come mostrato in figura 1.4. Una volta riempito il ν -esimo livello di Landau per $B = n\Phi_0/\nu$, se continuiamo a diminuire B il numero di elettroni in eccesso andrà ad occupare stati localizzati, che non contribuiscono alla conduzione. La conduttività Hall rimarrà dunque inalterata fino alla successiva occupazione di stati delocalizzati. Il disordine ci permette dunque di spiegare come mai i plateau osservati sperimentalmente permangano su un range finito di valori del campo magnetico. La situazione è quasi ironica, la presenza di impurezze e di disordine nel sistema ci permette di osservare sperimentalmente i valori molto precisi della conducibilità Hall.

Passiamo adesso a descrivere la presenza di eccitazioni sul bordo del campione. In figura 1.5 è riportata per semplicità una geometria a disco, evidenziando cosa succede per un singolo bordo. La situazione è completamente analoga nel caso di due bordi, ovvero quella di una geometria ad anello. Se schematizziamo il bordo del campione come un potenziale confinante $V(r)$, che si accende in una regione radiale vicino al bordo, otteniamo la struttura dei livelli energetici mostrata in figura.

Osserviamo dunque che nel bulk del campione è presente un gap tra il primo livello di Landau e il successivo. Questo ci ricorda ciò che succede in un isolante "ordinario", in cui un gap in energia separa la banda di conduzione da quella di valenza.

La situazione per uno stato Hall quantistico è però differente; perchè la legge di dispersione

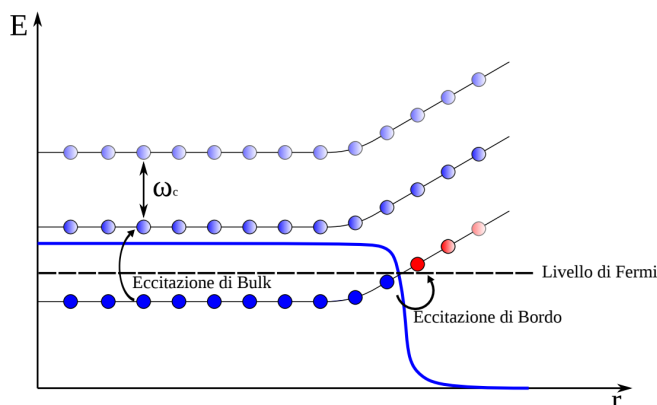


Figura 1.5: Rappresentazione schematica dei livelli di Landau nella geometria del disco con potenziale confinante.

interseca il livello di Fermi al bordo, dove sono possibili delle eccitazioni locali di bassa energia. Linearizzando l'energia, la legge di dispersione è relativistica a massa nulla,

$$\epsilon = vk = \frac{n}{R}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.37)$$

dove k è l'impulso delle onde sul bordo, di lunghezza $L = 2\pi R$, quantizzato in unità di $1/R$. Questo ci permette di concludere quindi che si sviluppano delle eccitazioni *chirali*, ovvero che si propagano in senso orario su un bordo, $\epsilon = vk$, e in senso antiorario sull'altro, $\epsilon = -vk$. L'insorgenza di queste correnti può essere intuita anche classicamente: l'orbita di ciclotrone viene interrotta, producendo così le cosiddette *skipping orbits*. La presenza degli stati di bordo non modifica l'argomento di Laughlin per l'esattezza della conducibilità Hall intera.

Un'obiezione che potrebbe essere posta alla presenza di stati di bordo a massa nulla potrebbe essere la seguente: come abbiamo già detto, i campioni sperimentali sono caratterizzati dalla presenza di impurezze, contro le quali l'elettrone al bordo potrebbe urtare e decadere. Da cosa deriva la stabilità osservata? Il motivo risiede nel fatto che non esiste al bordo il moto contropropagante che possa permettere lo scattering: l'elettrone dovrebbe eventualmente attraversare tutto il campione fino ad arrivare al bordo opposto. L'elemento di matrice associato a questo processo è ovviamente molto piccolo e, di conseguenza, le eccitazioni di bordo sono stabili anche in presenza di disordine.

Abbiamo quindi visto che l'effetto Hall differisce da un isolante banale poichè presenta delle eccitazioni di bordo a massa nulla stabili. Si può mostrare che questa è una caratteristica fondamentale di tutti gli "stati topologici della materia".

Possiamo quindi definire in termini semplici un tale stato con l'assenza di eccitazioni locali nel bulk (isolante) e la presenza di eccitazioni globali, che corrispondono alle eccitazioni di bordo a massa nulla.

Capitolo 2

Isolanti Topologici in due dimensioni

A partire dalla seconda metà degli anni '90, si cominciò a ipotizzare l'esistenza di stati analoghi allo stato Hall quantistico anche in assenza di un campo magnetico applicato. Pioneristici furono i lavori di Kane e Mele che intuirono per la prima volta che l'interazione spin-orbita, presente all'interno di tutti i solidi reali, potesse produrre altri stati topologici della materia, caratterizzati da un gap nel bulk e da eccitazioni stabili a massa nulla sul bordo. Nello stesso articolo Kane e Mele teorizzarono l'esistenza di questi stati nel grafene. Successivamente nel 2006 [7] i lavori di Bernevig e Zhang suggerirono la possibilità di osservare stati topologici in semiconduttori in due dimensioni, in presenza di gradienti di sforzo uniformi nel materiale. Iniziò così lo studio degli *isolanti topologici*.

Un isolante topologico bidimensionale presenta un gap nel bulk e una coppia di eccitazioni chirali contropropaganti al bordo, aventi proiezioni opposte dello spin lungo l'asse di quantizzazione. A differenza di uno stato Hall quantistico, il sistema è invariante sotto inversione temporale, ed è proprio questa simmetria a rendere gli stati di bordo stabili.

Nel presente capitolo ci proponiamo di studiare la trasformazione di inversione temporale \mathcal{T} in meccanica quantistica e, come applicazione, il *teorema di Kramers*. Successivamente introdurremo il modello di Bernevig e Zhang per l'effetto Hall quantistico di spin (QSHE), un modello semplificato dell'isolante topologico. Mediante l'argomento di Fu, Kane e Mele dimostreremo la stabilità delle eccitazioni di bordo. Concluderemo mostrando che gli isolanti topologici sono caratterizzati da un indice \mathbb{Z}_2 , che assume valore 0 per un isolante ordinario e 1 per un isolante topologico. Lo studio degli isolanti topologici trova anche applicazioni tecnologiche nella spintronica e nello sviluppo di computer quantistici.

2.1 Inversione temporale e teorema di Kramers

Un risultato generale sulla struttura degli operatori che realizzano trasformazioni di simmetria venne ottenuto nel 1931 da Eugene Wigner. Il teorema afferma che in meccanica quantistica gli operatori che realizzano le trasformazioni di simmetria sono operatori unitari o antiunitari. Trasformazioni come le rotazioni, le traslazioni e la parità sono realizzate da operatori unitari. Questo però non è più vero per l'operazione di inversione temporale, che ci proponiamo di studiare nella presente sezione.

Un operatore Θ si dice antiunitario se soddisfa:

$$\Theta(c_1|v_1\rangle + c_2|v_2\rangle) = c_1^*\Theta|v_1\rangle + c_2^*\Theta|v_2\rangle, \quad (2.1)$$

$$\langle\Theta\phi|\Theta\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^*. \quad (2.2)$$

Determiniamo adesso l'espressione dell'operatore Θ che realizza l'inversione temporale \mathcal{T} . Classicamente ci aspettiamo che:

$$\Theta\mathbf{x}\Theta^{-1} = \mathbf{x}, \quad \Theta\mathbf{p}\Theta^{-1} = -\mathbf{p}, \quad \Theta\mathbf{L}\Theta^{-1} = -\mathbf{L}, \quad (2.3)$$

dove \mathbf{L} rappresenta il momento angolare orbitale. Capiamo adesso che se vogliamo che la struttura dei commutatori canonici venga preservata, l'operatore Θ deve necessariamente essere antiunitario. Infatti, applicando Θ a $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$:

$$\Theta[x_i, p_j]\Theta^{-1}\Theta = \Theta i\hbar\delta_{ij}. \quad (2.4)$$

Da cui, supponendo Θ antiunitario, $\Theta i = -i\Theta$,

$$[x_i, -p_j]\Theta = -i\hbar\delta_{ij}\Theta, \quad (2.5)$$

la forma dei commutatori canonici viene preservata. Inoltre per preservare l'algebra del momento angolare, Θ deve anticommutare con un generico operatore di momento angolare \mathbf{J} ,

$$\Theta\mathbf{J}\Theta^{-1} = -\mathbf{J}. \quad (2.6)$$

Consideriamo l'equazione di Schrodinger dipendente dal tempo:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi. \quad (2.7)$$

Supponiamo che $\psi(\mathbf{x}, t)$ sia una soluzione. Se effettuiamo l'operazione di inversione temporale $t \rightarrow -t$ è facile rendersi conto che la funzione d'onda soluzione dell'equazione di Schrodinger è adesso $\psi^*(\mathbf{x}, -t)$. Saremmo dunque portati ad identificare l'operazione di inversione temporale con l'operazione di coniugazione complessa. Questo è vero in realtà solamente per una particolare rappresentazione dello spazio di Hilbert, ovvero la rappresentazione delle coordinate. In generale infatti potremo scrivere l'operatore Θ di inversione temporale come:

$$\Theta = UK, \quad (2.8)$$

dove K è l'operatore di coniugazione complessa ed U è un operatore unitario la cui forma dipenderà dalla particolare scelta di base nello spazio di Hilbert.

Un esempio di fondamentale importanza per la descrizione degli isolanti topologici è fornito dallo spin. Essendo lo spin un operatore di momento angolare, si deve avere:

$$\Theta \mathbf{S} \Theta^{-1} = -\mathbf{S}. \quad (2.9)$$

Fissata la base dello spazio di Hilbert a partire dagli autostati di S_z , capiamo subito che l'operatore di inversione temporale non può coincidere con l'operazione di coniugazione complessa, in quanto:

$$K S_x K = S_x, \quad K S_z K = S_z. \quad (2.10)$$

Per ottenere le corrette regole di commutazione possiamo quindi definire,

$$\Theta = e^{-i\pi S_y} K. \quad (2.11)$$

Calcolandone il quadrato

$$\Theta^2 = e^{-i\pi S_y} K e^{-i\pi S_y} K = e^{-i\pi S_y} e^{-i\pi S_y} = e^{-i2\pi S_y}. \quad (2.12)$$

Applicare due volte l'operatore di inversione temporale equivale quindi ad effettuare una rotazione di 2π attorno all'asse y . Per particelle con spin semi-intero abbiamo¹ $\Theta^2 = -\mathbf{1}$, per particelle con spin intero $\Theta^2 = \mathbf{1}$. Generalizzando ad un numero N_F di fermioni si ha

$$\Theta^2 = (-1)^{N_F} \mathbf{1}. \quad (2.13)$$

Deriviamo adesso una conseguenza fisica di questa equazione.

Consideriamo un sistema invariante sotto inversione temporale, ovvero tale per cui $[H, \Theta] = 0$. Sotto questa ipotesi l'applicazione di Θ ad un autostato dell'hamiltoniana deve fornire un altro autostato dell'hamiltoniana con la stessa energia,

$$|n'\rangle = \Theta|n\rangle, \quad H|n'\rangle = H\Theta|n\rangle = \Theta H|n\rangle = E_n \Theta|n\rangle = E_n|n'\rangle. \quad (2.14)$$

Se supponiamo allora che il livello energetico E_n sia non degenere, necessariamente lo stato $\Theta|n\rangle$ deve coincidere, a meno di un fattore di fase, con $|n\rangle$,

$$|n'\rangle = \Theta|n\rangle = e^{i\delta}|n\rangle. \quad (2.15)$$

Applicando Θ due volte:

$$\Theta^2|n\rangle = \Theta e^{i\delta}|n\rangle = e^{-i\delta}\Theta|n\rangle = e^{-i\delta}e^{i\delta}|n\rangle = |n\rangle. \quad (2.16)$$

Questa relazione non è però compatibile con quanto ci aspetteremmo dalla (2.13) per un sistema fermionico. Di conseguenza, per un sistema con un numero dispari di fermioni, $|n\rangle$ e $|n'\rangle$ corrispondono ad autostati diversi con la stessa energia. Il livello E_n è quindi due volte degenere. Si dimostra che i due stati sono ortogonali,

$$\langle n'|n\rangle = \langle n|\Theta|n\rangle = 0. \quad (2.17)$$

Inoltre, per operatori \mathcal{O} invarianti sotto inversione temporale, ovvero $\mathcal{O} = \Theta^{-1}\mathcal{O}\Theta$, vale:

$$\langle n'|\mathcal{O}|n\rangle = 0, \quad \langle n'|\mathcal{O}|n'\rangle = \langle n|\mathcal{O}|n\rangle. \quad (2.18)$$

Il risultato che abbiamo appena dimostrato prende il nome di *teorema di Kramers* e afferma che per un sistema fermionico invariante sotto inversione temporale tutti i livelli energetici sono per lo meno due volte degeneri. Questa degenerazione non può essere eliminata da interazioni \mathcal{O} invarianti sotto inversione temporale.

¹Ricordiamo infatti che le particelle di spin $\frac{1}{2}$ sono descritte da spinori a due componenti e quindi, a seguito di una rotazione di 2π , lo spinore acquisisce un fattore (-1)

2.2 Modello di Bernevig e Zhang del QSHE

Esaminiamo come, nel contesto del modello di Bernevig e Zhang [7], l'interazione di spin-orbita sia in grado di produrre gli stati di bordo accennati in precedenza. L'interazione di spin-orbita contribuisce all'hamiltoniana con un termine $(\mathbf{p} \times \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{\sigma}$. Immaginiamo di considerare il nostro sistema confinato nel piano (x, y) e con un campo elettrico della forma $\mathbf{E} \sim E(x, y, 0)$. Il termine di spin-orbita diventa quindi $E\sigma_z(xp_y - yp_x)$, chiaramente invariante sotto inversione temporale.

Questo termine ci ricorda il termine $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$ nell'hamiltoniana dei livelli di Landau, responsabile per il QHE e, in gauge simmetrica, ha la forma $B(xp_y - yp_x)$. Osserviamo quindi che l'interazione di spin-orbita mima un campo magnetico effettivo per ciascuna delle due orientazioni di spin e il sistema è quindi del tutto equivalente a due copie di un QHE². L'hamiltoniana del sistema è data da:

$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} \frac{C_3}{\hbar} g (yp_x - xp_y) \sigma_z + D(x^2 + y^2), \quad (2.19)$$

dove C_3, g e D sono dei parametri. Osserviamo subito che l'hamiltoniana commuta con σ_z , i cui autovalori sono ± 1 , e potremo quindi classificare gli stati sulla base della componente dello spin lungo l'asse di quantizzazione. Effettuiamo adesso una trasformazione delle variabili:

$$x \rightarrow (2mD)^{-1/4} x, \quad y \rightarrow (2mD)^{-1/4} y, \quad R = \frac{1}{2} \frac{C_3}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{D}} g. \quad (2.20)$$

Per identificare la struttura dei livelli di Landau, introduciamo le coordinate complesse $z = x + iy$ e definiamo due coppie di operatori di creazione e distruzione in completa analogia a quanto fatto nel paragrafo 1.2.1. Si ottiene:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} H_{\uparrow} & 0 \\ 0 & H_{\downarrow} \end{pmatrix}, \quad H_{\uparrow\downarrow} = 2\sqrt{\frac{D}{2m}} \left[\left(1 \mp \frac{R}{2}\right) a^{\dagger} a + \left(1 \pm \frac{R}{2}\right) b^{\dagger} b + 1 \right]. \quad (2.21)$$

Per $R = 2$ l'hamiltoniana può essere riscritta,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\sigma_z \mathbf{A})^2, \quad (2.22)$$

avendo definito $\mathbf{A} = \frac{mC_3g}{2\hbar e} (y, -x, 0)$. L'hamiltoniana ottenuta ha la stessa forma di quella di una particella carica in un campo magnetico, dove il segno del campo magnetico dipende dall'orientazione dello spin. Le hamiltoniane associate alle due orientazioni di spin della particella sono:

$$H_{\uparrow} = \frac{1}{2} \frac{C_3}{\hbar} g (2a^{\dagger} a + 1), \quad H_{\downarrow} = \frac{1}{2} \frac{C_3}{\hbar} g (2b^{\dagger} b + 1). \quad (2.23)$$

Osserviamo quindi che gli operatori a, a^{\dagger} e b, b^{\dagger} giocano ruoli opposti per gli elettroni con spin up e spin down. In particolare, per gli elettroni con spin up, gli operatori a, a^{\dagger} permettono di spostarsi tra i vari livelli di Landau, mentre b, b^{\dagger} sono associati alla degenerazione di momento angolare, come già visto in 1.2.1. La situazione è esattamente opposta per gli elettroni con spin down. Concludiamo quindi che al bordo del sistema si sviluppano degli

²Questa configurazione può essere ottenuta in semiconduttori a zincoblenda, in cui i gradienti di sforzo producono l'interazione spin-orbita.

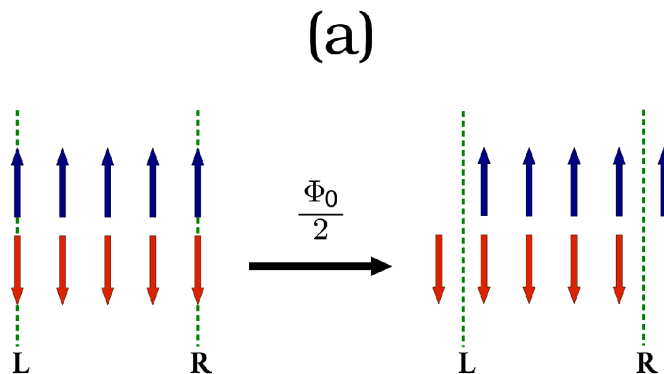


Figura 2.1: a): Traslazione degli stati con spin up e spin down a seguito dell'introduzione di mezzo quanto di flusso.

stati conduttivi che si propagano in un senso con spin up e in senso opposto con spin down. Essendo il sistema equivalente a due copie di uno stato Hall quantistico, le conducibilità Hall associate agli elettroni con spin up e spin down saranno uguali e di segno opposto. In particolare:

$$\sigma_H = \sigma_H^+ + \sigma_H^- = \nu \frac{e^2}{h} - \nu \frac{e^2}{h} = 0. \quad (2.24)$$

D'altra parte, poichè l'autovalore di S_z continua ad essere un buon numero quantico per caratterizzare gli stati del sistema, è possibile definire una conducibilità Hall di spin come,

$$\sigma_S \equiv \frac{\hbar}{2e} (\sigma_H^+ - \sigma_H^-) = \nu \frac{e}{2\pi}, \quad (2.25)$$

che risulta dunque quantizzata in unità di $e/2\pi$. La struttura degli stati di bordo descritta in questa sezione permane anche in situazioni più realistiche, per esempio in presenza di impurità amagnetiche e/o di interazioni elettrone-elettrone, che preservano la simmetria per inversione temporale. Ci proponiamo di capire come questo sia possibile nella successiva sezione.

2.3 Argomento di Fu, Kane e Mele e indice \mathbb{Z}_2

Nel contesto del modello di Bernevig e Zhang, l'ipotesi di conservazione di S_z è chiaramente non realistica. I campioni sperimentali presentano impurezze e non è difficile immaginarsi interazioni che possano produrre spin flip dell'elettrone. Quello che vogliamo mostrare è che, sebbene la quantizzazione della conducibilità di spin venga rotta, la stabilità degli stati di bordo viene assicurata dalla presenza della simmetria per inversione temporale. Osserviamo che gli spin flip modificano il valore di S_z , ma lasciano invariata la parità di spin \mathcal{I} , definita da $\mathcal{I} = (-1)^{2S_z} = (-1)^{N_F}$, che rappresenta proprio la quantità che entra in gioco nel teorema di Kramers descritto nel paragrafo precedente. Mentre il QSHE è caratterizzato dalla conservazione delle due correnti di spin up e down, e quindi dal gruppo di simmetria $U(1)_Q \times U(1)_{S_z}$, gli isolanti topologici ammettono spin flip che rompono questa simmetria a

$U(1)_Q \times \mathbb{Z}_2$, dove i valori \mathbb{Z}_2 sono associati all'indice $(-1)^{2S_z}$.

Esaminiamo l'argomento elaborato da Fu, Kane e Mele [8], del tutto analogo all'argomento di Laughlin per la quantizzazione della conduttività Hall.

Senza perdita di generalità, possiamo considerare il caso di elettroni non interagenti, in cui S_z viene conservato, corrispondente al QSHE del paragrafo precedente. Consideriamo una geometria di un anello di Corbino ed immaginiamo di applicare una variazione adiabatica di flusso $\Phi(t)$ in corrispondenza del centro dell'anello.

A seguito dell'introduzione di un campo magnetico la simmetria sotto inversione temporale viene rotta, in particolare:

$$\Theta H [\Phi] \Theta^{-1} = H [-\Phi]. \quad (2.26)$$

Ricordiamo che a meno di una trasformazione di gauge la forma dell'hamiltoniana rimane invariata per multipli interi del quanto di flusso Φ_0 ,

$$H [\Phi + \Phi_0] = H [\Phi]. \quad (2.27)$$

Poichè il sistema coincide con due copie esatte dell' IQHE possiamo concludere, seguendo i risultati ottenuti in 1.2.3, che a $\Phi = \Phi_0$ verrà realizzato lo spostamento di un elettrone con spin up (down) dal bordo più interno (esterno) a quello più esterno (interno). La carica pompata su ciascun bordo è dunque nulla ma se calcoliamo la conducibilità Hall di spin otteniamo:

$$\sigma_H^- - \sigma_H^+ = 2 \frac{e^2}{h}. \quad (2.28)$$

A $\Phi = \Phi_0$ abbiamo dunque la produzione al bordo esterno di uno stato eccitato neutro con $s_z = 1$. È bene osservare che i sistemi ai due bordi sono completamente disaccoppiati e quindi, nel seguito, ci limiteremo a studiare il bordo esterno. Analizziamo adesso quello che succede a $\Phi = \Phi_0/2$. La carica pompata su ciascun bordo continua a rimanere identicamente nulla e si viene a creare un'eccitazione fermionica con spin pari alla metà di quella precedente, ovvero $s_z = 1/2$ che indichiamo con $|1/2, +\rangle$. Dalla (2.26) e (2.27) abbiamo:

$$\Theta H [\Phi_0/2] \Theta^{-1} = H [-\Phi_0/2] = H [\Phi_0/2]. \quad (2.29)$$

Osserviamo dunque che le due hamiltoniane coincidono a meno di un quanto di flusso che, come già detto in precedenza, può essere eliminato. A $\Phi = \Phi_0/2$ quindi l'hamiltoniana è invariante sotto inversione temporale e possiamo applicare il teorema di Kramers allo stato fermionico $|1/2, +\rangle$. In particolare dovrà esistere uno stato $|1/2, -\rangle$, con spin opposto al precedente, che andrà a formare un doppietto di Kramers, come mostrato in figura 2.2.

Cosa succede se adesso torniamo a flusso nullo?

Lo stato $|1/2, +\rangle$ tornerà nello stato fondamentale $|\Omega\rangle$, mentre lo stato $|1/2, -\rangle$ verrà portato in uno stato eccitato $|ex\rangle$, ortogonale ad $|\Omega\rangle$. Infatti, introducendo l'operatore di inserzione di flusso Π tale per cui $\Pi [\Phi_0/2] |\Omega\rangle = |1/2, +\rangle$, si ha:

$$\langle \Omega | ex \rangle = \langle \Omega | \Pi [-\Phi_0/2] |1/2, -\rangle = \langle \Omega | \Pi [\Phi_0/2]^\dagger \Theta \Pi [\Phi_0/2] |\Omega\rangle = 0, \quad (2.30)$$

dove abbiamo sfruttato $\Theta |1/2, +\rangle = |1/2, -\rangle$ e la (2.17).

Dalla terza equazione di Maxwell,

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \oint \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.31)$$

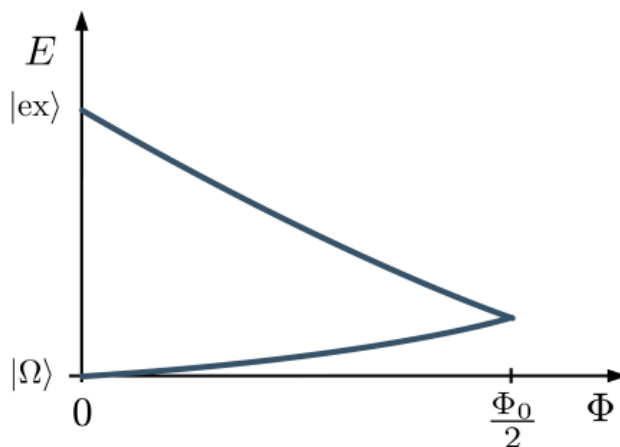


Figura 2.2: Evoluzione dello stato fondamentale durante l'inserimento di mezzo flusso. Al punto a $\Phi = \Phi_0/2$ è presente un doppietto di Kramers che si rompe in due stati ortogonali una volta tornati a flusso nullo.

Il flusso Φ viene inserito solo localmente al centro dell'anello e quindi non dipende da R . In conseguenza della (2.31) sia il campo elettrico \mathcal{E} , che l'energia delle deformazioni che esso produce sullo spettro del bordo, sono $\mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right)$. Poichè a $\Phi = \Phi_0/2$ gli stati sono degeneri, la differenza in energia ΔE a $\Phi = 0$ fra $|\Omega\rangle$ e $|ex\rangle$ è dello stesso ordine:

$$\Delta E = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right) \rightarrow 0, \quad (2.32)$$

ovvero l'eccitazione $|ex\rangle$ non ha un gap finito nel limite termodinamico $R \rightarrow \infty$. L'argomento di Fu, Kane e Mele permette quindi di affermare l'esistenza di un'eccitazione di bordo a massa nulla, che è la caratteristica degli stati topologici della materia, in questo caso con simmetria per inversione temporale.

L'argomento di stabilità fornito in precedenza è però valido solamente per un numero dispari di fermioni prodotti al bordo esterno per $\Phi = \Phi_0/2$. Infatti solamente in questo caso è possibile invocare il teorema di Kramers per dimostrare che il gap è nullo. Nel caso in cui si abbiano un numero pari di fermioni prodotti al bordo, il teorema di Kramers non può essere applicato, in quanto $\Theta^2 = (-1)^{N_F} \mathbb{1} = \mathbb{1}$, e il sistema può quindi avere un gap finito al bordo, corrispondente ad un isolante ordinario.

In generale possiamo considerare la quantità \mathcal{Z}_2 definita come:

$$\mathcal{I} = (-1)^{2J_z} = (-1)^{N_F}. \quad (2.33)$$

Siamo giunti dunque ad una classificazione degli isolanti topologici per mezzo di un'indice \mathcal{Z}_2 , definito dalla (2.33). In particolare un isolante topologico, come il QSHE, è caratterizzato dalla produzione al bordo di un numero dispari di fermioni, che ci permettono di assicurare, per mezzo del teorema di Kramers, la stabilità degli stati di bordo. In questo caso $\mathcal{I} = -1$. D'altra parte un isolante ordinario presenta un numero pari di fermioni prodotti al bordo. In

questo caso abbiamo $\mathcal{I} = +1$.

Concludiamo osservando che questa caratterizzazione \mathbb{Z}_2 è universale, ovvero indipendente dalla forma specifica dell'hamiltoniana, poichè si basa solamente sulla presenza della simmetria per inversione temporale.

Conclusioni

Nella tesi ci siamo focalizzati sulla descrizione dell'effetto Hall quantistico e degli isolanti topologici bidimensionali, identificabili come due possibili fasi topologiche della materia. Abbiamo analizzato le proprietà di simmetria di questi sistemi e abbiamo caratterizzato le eccitazioni di bordo a massa nulla, soffermandoci sulla loro stabilità. La fisica degli isolanti topologici ha completamente rivoluzionato il panorama della fisica dello stato condensato, mostrando come comportamenti topologici possano essere messi in evidenza anche in condizioni ordinarie, senza dover ricorrere all'applicazione di campi magnetici elevati e temperature molto basse.

Bibliografia

- [1] R. E. Prange e S. M. Girvin, “*The Quantum Hall Effect*”, Springer (1990)
- [2] Jacopo Sisti, *Tecniche di teoria di campi per gli isolanti topologici tridimensionali*, Tesi di Laurea Magistrale. (2015)
- [3] Daijiro Yoshioka, *The quantum Hall effect*, Springer (2002).
- [4] David Tong. *Lectures on the quantum hall effect*, 2016, *arXiv* 1606.06687.
- [5] Marcel Franz and Laurens Molenkamp, *Topological insulators*. (2013)
- [6] J.J. Sakurai, Jim Napolitano. *Modern quantum mechanics*. (1994)
- [7] A. B. Bernevig e S-C Zhang, “Quantum Spin Hall Effect”, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 106802 (2006).
- [8] L. Fu e C. L. Kane, “Time Reversal Polarization and a Z_2 Adiabatic Spin Pump”, *Phys. Rev. B* **74**, 195312 (2006)
- [9] Hasan, M. Z., & Kane, C. L. (2010). Colloquium: topological insulators. *Reviews of modern physics*, 82(4), 3045.