

Indice

Introduzione	1
1 Teorie di campo conformi	5
1.1 Trasformazioni conformi	5
1.1.1 Simmetria conforme in d dimensioni	5
1.1.2 Algebra conforme in due dimensioni	7
1.2 Invarianza conforme in due dimensioni	8
1.2.1 Campi primari e funzioni di correlazione	8
1.2.2 Tensore energia-impulso	10
1.2.3 Quantizzazione radiale	11
1.2.4 Sviluppo in modi normali	14
1.2.5 Spazio di Hilbert	15
1.2.6 Teorie fermioniche e bosoniche libere	17
2 Effetto Hall quantistico	21
2.1 Introduzione	21
2.2 Effetto Hall quantistico intero	24
2.2.1 Livelli di Landau	24
2.2.2 Invarianza di gauge e argomento del flusso di Laughlin	27
2.2.3 Stato fondamentale incompressibile	29
2.2.4 Stati di bordo	30
2.2.5 Teoria conforme degli stati di bordo	34
2.2.6 Anomalia chirale	35
2.3 Effetto Hall quantistico frazionario	37
2.3.1 Funzione d'onda di Laughlin	37
2.3.2 Carica e statistica frazionaria	39
2.3.3 Stati gerarchici di Jain	40

2.4	Misure della carica e della statistica frazionaria	41
2.4.1	Shot noise e carica frazionaria	41
2.4.2	Interferometro di Fabry-Perot e statistica frazionaria	42
3	Teorie di campo effettive	44
3.1	Teoria di Chern-Simons	44
3.1.1	Azione idrodinamica e FQHE	44
3.1.2	Corrispondenza bulk-boundary	48
3.1.3	Bosone chirale	50
3.2	Teoria effettiva di Wen-Zee	52
3.2.1	Elementi della teoria dell'elasticità	52
3.2.2	Coordinate locali e connessione di spin	53
3.2.3	Azione di Wen-Zee	54
3.2.4	Shift e momento angolare intrinseco	56
3.2.5	Viscosità Hall	58
3.2.6	Fluttuazioni al bordo della goccia	60
3.3	Azione di Wen-Zee e anomalia gravitazionale	61
4	Simmetria W_∞ nell'effetto Hall	64
4.1	Simmetria W_∞ dei fluidi incompressibili quantistici	65
4.1.1	Effetto Hall intero	65
4.1.2	L'origine classica della simmetria	66
4.1.3	Algebra W_∞ e incompressibilità dello stato fondamentale	67
4.1.4	Simmetria W_∞ degli stati di Laughlin	68
4.2	Simmetria W_∞ e teorie effettive di Chern-Simons generalizzate	71
4.2.1	Variazione della densità	71
4.2.2	Sviluppo multipolare	72
4.2.3	Teoria effettiva al second'ordine	73
4.2.4	Accoppiamento alla metrica spaziale	75
4.2.5	Derivazione dell'azione di Wen-Zee	76
4.2.6	Eccitazioni dipolari	77
5	Analisi microscopica delle eccitazioni di bordo	80
5.1	Teorie conformi al bordo per $\nu = n$	81
5.1.1	Limite al bordo delle funzioni d'onda	81
5.1.2	Cariche conformi e ortogonalità	84

5.1.3	Funzione di correlazione livelli di Landau superiori	86
5.2	Ruolo del momento angolare intrinseco nella teoria di bordo	87
5.2.1	Operatori di carica	87
5.2.2	Spettro d'energia	88
5.2.3	Shift del potenziale chimico nei livelli superiori	91
5.2.4	Universalità del momento angolare intrinseco	92
5.3	Fluttuazioni di bordo e simmetria W_∞ nel bulk	94
5.3.1	Derivazione delle fluttuazioni di bordo nell'IQHE	94
5.3.2	Termini di ordine superiore nelle parentesi di Moyal	97
5.3.3	Fluttuazioni al bordo negli stati frazionari	99
5.4	Conclusioni	99
A	Calcolo funzione di correlazione secondo livello di Landau	101

Introduzione

Uno degli obiettivi della fisica è quello di comprendere le differenti fasi della materia. Alcuni di queste possono essere descritte mediante la rottura spontanea della simmetria e la teoria di Ginzburg-Landau del parametro d'ordine locale. In tempi più recenti, sono state scoperte fasi della materia per le quali non si applica questo paradigma, ma esiste comunque un comportamento collettivo e coerente dei gradi di libertà del sistema, il cosiddetto *ordine topologico*. Gli *stati topologici della materia* presentano proprietà topologiche ed universali, ovvero globali e robuste rispetto a piccole deformazioni dell'hamiltoniana.

L'esempio più noto di questi sistemi è l'effetto Hall quantistico. Uno strato bidimensionale di semiconduttore, posto in campi magnetici molto intensi (~ 10 *Tesla*) e temperature estremamente basse (~ 10 *mK*), presenta una conduttività trasversa σ_H con andamento a *plateaux* al variare del campo magnetico. In corrispondenza dei *plateaux*, σ_H assume valori interi (*effetto Hall intero*) e frazionari (*effetto Hall frazionario*) in unità (e^2/h) che sono molto precisi ($\Delta\sigma_H/\sigma_H \sim 10^{-9}$) ed universali.

Ai *plateaux* il sistema è un isolante in quanto la conduttività longitudinale si annulla. Gli elettroni formano un fluido incompressibile, ovvero uno stato a densità uniforme con un gap per le eccitazioni nell'interno del sistema (*bulk*). Nell'effetto Hall frazionario, le eccitazioni di bulk possiedono carica frazionaria e statistica quantistica frazionaria e sono dette anioni (*anyons*). Il fluido incompressibile presenta inoltre delle eccitazioni chirali localizzate al bordo del sistema, che hanno massa nulla e possono essere descritte da teorie di campo relativistiche in $(1+1)$ dimensioni spazio-temporali. In particolare, queste teorie possiedono naturalmente l'invarianza di scala e conforme, che permettono di derivare esattamente delle proprietà fisiche universali. Lo studio dell'effetto Hall quantistico si basa quindi su una ricca modellistica delle teorie di campo conformi in $(1+1)$ dimensioni e delle associate teorie di gauge topologiche di Chern-Simons in $(2+1)$ dimensioni.

Un'altra simmetria che è stata associata agli stati Hall è dovuta alle proprietà

geometriche di un fluido incompressibile. A livello classico, una goccia di un fluido a densità costante può essere deformata mediante trasformazioni locali di coordinate che preservano l'area. Queste trasformazioni soddisfano la cosiddetta algebra W_∞ a livello quantistico.

In questa tesi, le proprietà dell'effetto Hall quantistico ad energie sotto il gap, ovvero gli effetti topologici e geometrici di bulk e la dinamica degli stati di bordo, sono descritte utilizzando le teorie di campo effettive. Un esempio di quantità universale esattamente determinata dalla teoria dei campi è dato dalla conduttività Hall σ_H . La corrente Hall si traduce in una corrente anomala nella teoria conforme al bordo del sistema, associata all'anomalia chirale. Come è noto in teoria dei campi, l'anomalia è un effetto globale ed esatto che non riceve correzioni dalla dinamica microscopica a corte distanze. Questa descrizione permette quindi di spiegare la grande precisione dei valori osservati sperimentalmente per questa quantità.

La corrente Hall non è il solo fenomeno di trasporto rilevante in questo sistema. La risposta ad una deformazione meccanica è parametrizzata dalla cosiddetta viscosità Hall η_H , che descrive una forza ortogonale al moto del fluido. La quantità η_H è proporzionale al momento angolare intrinseco s delle eccitazioni del fluido. La teoria di campo effettiva di Wen-Zee descrive la viscosità Hall mediante l'accoppiamento ad una metrica spaziale che realizza le deformazioni meccaniche del fluido. Questo effetto può anche essere spiegato assumendo la presenza di eccitazioni dipolari nel fluido incompressibile, che sono derivabili dalla simmetria W_∞ .

Nell'effetto Hall, la corrispondenza fra quantità di bulk e di bordo è molto importante. Nel caso della corrente Hall, questa corrispondenza è ben compresa e ne stabilisce la relazione con l'anomalia chirale, come già accennato. Nel caso della viscosità Hall, le proprietà di bulk sono chiare, ma i corrispondenti effetti e osservabili di bordo non erano compresi. In particolare, non era chiaro se il parametro s fosse una quantità universale ed esatta come la conduttività σ_H .

Lo studio di questa tesi cerca di comprendere più chiaramente la corrispondenza bulk-bordo nell'effetto Hall, ed in particolare spiegare l'universalità del parametro s . Come primo risultato, deriviamo esplicitamente le quantità osservabili della teoria conforme di bordo dalla teoria microscopica dei livelli di Landau completamente pieni, che descrive l'effetto Hall intero. Le fluttuazioni di carica della teoria conforme sono ottenute effettuando uno specifico limite per grande numero di elettroni, $N \rightarrow \infty$, ovvero per grandi dimensioni della goccia. Quindi mostriamo che le eccitazioni di bordo sono descritte da n teorie conformi indipendenti con carica centrale $c = 1$.

Successivamente analizziamo il significato del momento angolare intrinseco s al bordo e mostriamo che questo determina la carica dello stato fondamentale, $s = s_n$, della teoria conforme associata all' n -esimo livello di Landau. I valori di s_n sono universali, a meno di una costante globale, in modo analogo all'energia dello stato fondamentale nell'effetto Casimir.

Nell'ultima parte della tesi studiamo il legame tra la simmetria W_∞ di bulk e la simmetria conforme. Costruiamo così la corrispondenza tra le fluttuazioni indotte dai diffeomorfismi che preservano l'area della goccia e le cariche della teoria conforme di bordo.

La tesi è strutturata come segue. Nel capitolo 1 riassumiamo le principali proprietà di una teoria di campo conforme bidimensionale e in particolare la costruzione dell'algebra delle correnti che descrive le fluttuazioni di carica e di energia. Nel capitolo 2 introduciamo l'effetto Hall quantistico intero e frazionario e discutiamo la teoria conforme delle eccitazioni di bordo. Nel capitolo 3 esponiamo le teorie di campo effettive per l'effetto Hall, la teoria di Chern-Simons e di Wen-Zee, ed analizziamo le loro estensioni al bordo. Nel capitolo 4 introduciamo la simmetria quantistica W_∞ dei diffeomorfismi del piano che preservano l'area. Inoltre riassumiamo il corrispondente sviluppo multipolare delle fluttuazioni di densità e illustriamo il ruolo dei dipoli nella viscosità Hall. Infine nel capitolo 5 presentiamo i risultati originali. Costruiamo le cariche conformi di bordo per n livelli di Landau pieni e verifichiamo l'andamento conforme della funzione di correlazione dei campi. Mostriamo come il momento angolare intrinseco s sia legato ad una ridefinizione del potenziale chimico di ogni livello e come l'invarianza conforme determini l'universalità di questo parametro. Quindi deriviamo il legame tra le cariche conformi e le fluttuazioni indotte dalla simmetria W_∞ del bulk, estendendo l'analisi anche all'effetto Hall frazionario.

Capitolo 1

Teorie di campo conformi

Una teoria di campo è invariante di scala quando la sua azione non cambia per una dilatazione delle coordinate, $x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$. Quindi questa teoria non possiede alcuna scala caratteristica, che sia questa una massa o una lunghezza di correlazione finita. Ad esempio, un campo scalare libero a massa nulla in d dimensioni è invariante di scala, con azione:

$$S = \int d^d x \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi. \quad (1.1)$$

L'invarianza sotto dilatazione delle coordinate richiede che l'operatore di campo trasformi nel seguente modo:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \lambda^{-\frac{d-2}{2}} \phi(x), \quad (1.2)$$

dove l'esponente $\Delta = \frac{d-2}{2}$ è la dimensione di scala del campo.

L'invarianza conforme è la generalizzazione locale dell'invarianza di scala, dove le trasformazioni dipendono dal punto, $\lambda = \lambda(x)$. Si può dimostrare che in due dimensioni la simmetria conforme discende automaticamente dall'invarianza di scala ed è inoltre descritta da un'algebra infinito dimensionale [1]. Questa simmetria permette la soluzione esatta della dinamica in alcune teorie [2] [3] [4], come discuteremo in seguito.

1.1 Trasformazioni conformi

1.1.1 Simmetria conforme in d dimensioni

Consideriamo uno spazio-tempo d -dimensionale con metrica $g_{\mu\nu}$ di segnatura (p, q) . Il cambiamento di scala locale si può ottenere mediante la seguente trasformazione della

metrica $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x) = \Omega(x) g_{\mu\nu}(x) \quad \text{con} \quad \Omega(x) \geq 0. \quad (1.3)$$

La (1.3) è chiamata trasformazione di Weyl e preserva l'angolo tra due vettori u, v dello spazio-tempo, dato da:

$$\frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = \frac{g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu}{(g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} u^\alpha u^\beta v^\mu v^\nu)^{1/2}}. \quad (1.4)$$

Una trasformazione conforme è una trasformazione locale delle coordinate $x^\mu \rightarrow x'^\mu(x)$ che realizza un riscaldamento locale della metrica, ovvero tale che:

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x) = \Omega(x) g_{\mu\nu}(x). \quad (1.5)$$

Nel caso di trasformazioni di coordinate infinitesime $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$, abbiamo,

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x) - (D_\mu \epsilon_\nu + D_\nu \epsilon_\mu), \quad (1.6)$$

dove D_μ è la derivata covariante. L'equazione (1.5) diventa,

$$D_\mu \epsilon_\nu + D_\nu \epsilon_\mu = \alpha(x) g_{\mu\nu}(x). \quad (1.7)$$

ed è detta equazione di Killing conforme. Supponiamo adesso di avere una metrica piatta $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. La funzione $\alpha(x)$ si ottiene calcolando la traccia della (1.7):

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d} \eta_{\mu\nu} \partial \cdot \epsilon. \quad (1.8)$$

Prendendo la derivata $\partial^\mu \partial^\nu$ della (1.8) si ottiene:

$$(d-1) \partial^2 (\partial \cdot \epsilon) = 0. \quad (1.9)$$

In una dimensione le trasformazioni di coordinate non sono vincolate perchè sono tutte ovviamente conformi. In dimensione $d > 2$, notiamo dall'equazione (1.9) che $\epsilon^\mu(x)$ deve essere al più un polinomio di secondo grado nelle coordinate. Le trasformazioni conformi corrispondono pertanto a:

- $\epsilon^\mu = a^\mu$, ovvero le traslazioni;
- $\epsilon^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu$, con ω antisimmetrico, corrispondenti alle rotazioni;
- $\epsilon^\mu = \lambda x^\mu$, ovvero le trasformazioni di scala;
- $\epsilon^\mu = b^\mu x^2 - 2x^\mu b \cdot x$, dette *trasformazioni conformi speciali*.

Studiando l'algebra dei rispettivi generatori si dimostra che il gruppo conforme in $d = p + q$ dimensioni è isomorfo a $SO(p+1, q+1)$ [2]. Notiamo inoltre che il gruppo di Poincarè $ISO(p, q)$ è un sottogruppo del gruppo conforme.

1.1.2 Algebra conforme in due dimensioni

In due dimensioni l'analisi è differente. Nel caso di segnatura Euclidea $(2, 0)$, le equazioni (1.8) diventano le condizioni di Cauchy-Riemann per la funzione $\epsilon(z) = \epsilon_1 + i\epsilon_2$,

$$\partial_1\epsilon_1 = \partial_2\epsilon_2 \quad \text{e} \quad \partial_1\epsilon_2 = -\partial_2\epsilon_1. \quad (1.10)$$

Pertanto la trasformazione conforme è descritta da una funzione analitica $\epsilon(z)$ nella variabile $z = x^1 + ix^2$. Possiamo costruire una mappa conforme nel piano complesso z nel seguente modo:

$$z \rightarrow z' = z + \epsilon(z) \quad \text{e} \quad \bar{z} \rightarrow \bar{z}' = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z}). \quad (1.11)$$

Abbiamo ottenuto il risultato ben noto che le trasformazioni conformi bidimensionali coincidono con le trasformazioni analitiche nel piano complesso. Queste sono dunque descritte da un numero infinito di parametri.

È conveniente riscrivere la metrica nelle coordinate (z, \bar{z}) :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 = dzd\bar{z}. \quad (1.12)$$

Utilizziamo la notazione $\mu = (z, \bar{z})$ per descrivere la somma ripetuta degli indici nelle coordinate complesse; la metrica Euclidea assume quindi i valori,

$$g_{zz} = \frac{\partial x^\mu}{\partial z} \frac{\partial x^\nu}{\partial z} g_{\mu\nu} = 0, \quad g_{\bar{z}\bar{z}} = 0, \quad g_{z\bar{z}} = \frac{1}{2}, \quad g^{\bar{z}\bar{z}} = 2, \quad (1.13)$$

e le condizioni di Cauchy-Riemann diventano:

$$\partial_{\bar{z}}\epsilon^z = 0, \quad \epsilon^z = \epsilon(z); \quad \partial_z\epsilon^{\bar{z}} = 0, \quad \epsilon^{\bar{z}} = \bar{\epsilon}(\bar{z}). \quad (1.14)$$

L'effetto della trasformazione conforme su una funzione del piano $\phi(z, \bar{z})$ è il seguente:

$$\phi(z', \bar{z}') = \phi(z + \epsilon(z), \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z})) = \phi(z, \bar{z}) + \epsilon(z) \partial_z \phi + \bar{\epsilon}(\bar{z}) \partial_{\bar{z}} \phi. \quad (1.15)$$

Per trovare i generatori, sviluppiamo la funzione analitica $\epsilon(z)$ in serie di Laurent in $z = 0$:

$$\epsilon(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \epsilon_n z^{n+1}, \quad (1.16)$$

ed analogamente per $\bar{\epsilon}(\bar{z})$. La variazione della funzione scalare $\phi(z, \bar{z})$ risulta:

$$\delta\phi = \epsilon(z) \partial_z \phi + \bar{\epsilon}(\bar{z}) \partial_{\bar{z}} \phi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\epsilon_n z^{n+1} \partial_z \phi + \bar{\epsilon}_n \bar{z}^{n+1} \partial_{\bar{z}} \phi). \quad (1.17)$$

I generatori delle trasformazioni conformi sono quindi identificati da:

$$\delta\phi = - \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\epsilon_n \ell_n + \bar{\epsilon}_n \bar{\ell}_n), \quad \ell_n = -z^{n+1} \partial_z \quad \text{e} \quad \bar{\ell}_n = -\bar{z}^{n+1} \partial_{\bar{z}}. \quad (1.18)$$

Questi soddisfano la seguente algebra:

$$\begin{aligned} [\ell_n, \ell_m] &= (m - n) \ell_{m+n}, \\ [\bar{\ell}_n, \bar{\ell}_m] &= (m - n) \bar{\ell}_{m+n}, \\ [\ell_n, \bar{\ell}_m] &= 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Se consideriamo le variabili (z, \bar{z}) come indipendenti, è possibile interpretare l'algebra (1.19) come somma diretta di due algebre $\mathcal{A} \oplus \bar{\mathcal{A}}$, in quanto gli ℓ_n e gli $\bar{\ell}_m$ commutano fra loro. L'algebra \mathcal{A} è definita dai generatori ℓ_n agenti sul piano \mathbb{C} compattificato nella sfera di Riemann. Non tutti i generatori sono globalmente ben definiti, solamente per $|n| \leq 1$ è possibile definire dei campi vettoriali non singolari nell'origine e nel punto all'infinito. I generatori delle trasformazioni conformi globali sono dunque $\{\ell_{-1}, \ell_0, \ell_1\}$. Lo stesso argomento può essere applicato per i generatori $\bar{\ell}_n$. Ritroviamo quindi per le trasformazioni regolari l'algebra $SO(3, 1) \approx SU(2) \times SU(2)$ discussa nella sezione 1.1.1.

I generatori $\ell_{-1} = -\partial_z, \bar{\ell}_{-1} = -\partial_{\bar{z}}$ definiscono le traslazioni nel piano complesso, mentre $\ell_0 + \bar{\ell}_0$ e $i(\ell_0 - \bar{\ell}_0)$ rappresentano rispettivamente le dilatazioni e le rotazioni. I generatori ℓ_1 e $\bar{\ell}_1$, infine, definiscono le trasformazioni conformi speciali. Notiamo come la distinzione tra trasformazioni conformi globali e locali sia un risultato che si presenta solamente in due dimensioni.

1.2 Invarianza conforme in due dimensioni

1.2.1 Campi primari e funzioni di correlazione

Nelle teorie conformi bidimensionali si definiscono dei campi quantistici la cui legge di trasformazione conforme ricalca quella di un tensore covariante nella relatività generale. Si definisce quindi *primario* il campo che, sotto la mappa conforme $z \rightarrow f(z), \bar{z} \rightarrow \bar{f}(\bar{z})$, trasforma nel seguente modo:

$$\Phi(z, \bar{z}) \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^h \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \right)^{\bar{h}} \Phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})). \quad (1.20)$$

Le quantità (h, \bar{h}) sono chiamate dimensioni o pesi conformi del campo primario Φ . Considerando una dilatazione globale $f(z) = \lambda z$, si ha che la dimensione di scala

Δ è data dalla somma dei pesi conformi, $\Delta = h + \bar{h}$. Viceversa la differenza tra i due pesi definisce lo spin conforme, $s = h - \bar{h}$. Il campo Φ è altrimenti detto *quasi-primario* quando trasforma come in (1.20) solamente per trasformazioni conformi globali $\{\ell_{-1}, \ell_0, \ell_1\}$. Un campo non primario è detto *secondario*; ad esempio, le derivate di un campo primario non trasformano con la (1.20) e sono quindi campi secondari. Infine il campo $\Phi = \Phi(z)$, dipendente solamente dalla variabile olomorfa z , è detto campo chirale o olomorfo e il suo peso conforme \bar{h} è nullo.

L'invarianza sotto trasformazioni conformi impone vincoli stringenti sulla forma delle funzioni di correlazione. Nel caso delle trasformazioni conformi regolari, ovvero globalmente definite, la variazione dei correlatori a n punti di campi quasi primari,

$$\begin{aligned} & \langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \Phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle \\ & \rightarrow \prod_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{z=z_i}^{h_i} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \right)_{\bar{z}=\bar{z}_i}^{\bar{h}_i} \langle \Phi_1(f(z_1), \bar{f}(\bar{z}_1)) \dots \Phi_n(f(z_n), \bar{f}(\bar{z}_n)) \rangle, \end{aligned} \quad (1.21)$$

deve essere complessivamente nulla. Ad esempio la funzione a due punti deve soddisfare:

$$\langle \Phi_1(z_1) \Phi_2(z_2) \rangle = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{z=z_1}^{h_1} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{z=z_2}^{h_2} \langle \Phi_1(f(z_1)) \Phi_2(f(z_2)) \rangle. \quad (1.22)$$

L'invarianza sotto traslazioni, $f(z) = z + a$, implica che $\langle \Phi_1(z_1) \Phi_2(z_2) \rangle = g(z_1 - z_2)$. L'invarianza sotto rotazioni comporta la dipendenza solo dal modulo $|z_{12}| = |z_1 - z_2|$. Infine considerando le dilatazioni, $f(z) = \lambda z$, e le trasformazioni conformi speciali, l'equazione (1.22) determina la forma della funzione di correlazione a meno di una costante:

$$\langle \Phi_1(z_1) \Phi_2(z_2) \rangle = \frac{C_{12}}{|z_{12}|^{2h_1}} \delta_{h_1, h_2}, \quad (1.23)$$

convenzionalmente fissata ad uno, $C_{12} = 1$.

Analoghe condizioni determinano completamente la funzione a tre punti, a meno della costante C_{123} chiamata costante di struttura: insieme alle dimensioni (h_i, \bar{h}_i) , queste costanti determinano le proprietà dinamiche delle teorie conformi [3].

Si può dimostrare che con quattro coordinate la quantità,

$$\eta_{12,34} = (z_1 - z_2)(z_3 - z_4) / (z_1 - z_3)(z_2 - z_4), \quad (1.24)$$

detta *birapporto*, è invariante sotto trasformazioni conformi globali. Ne segue che le funzioni di correlazione a n punti, con $n \geq 4$, sono determinate parzialmente dalla simmetria conforme, come funzioni in generale arbitrarie dei birapporti [3].

Quando si considerano le trasformazioni conformi infinito dimensionali, le funzioni di correlazione non sono invarianti, ma soddisfano una relazione funzionale di covarianza analoga alle identità di Ward delle teorie di gauge, schematizzata dalla forma:

$$\sum_{i=1}^N \langle \Phi_1 \dots \delta \Phi_i \dots \Phi_N \rangle = \langle \delta S \Phi_1 \dots \Phi_N \rangle. \quad (1.25)$$

In questa identità, la variazione del correlatore (1.21) è compensata da un termine di variazione dell'azione. L'identità di Ward (1.25), derivata ad esempio nella rassegna [3], è una relazione fondamentale delle teorie conformi bidimensionali.

1.2.2 Tensore energia-impulso

Una quantità di importanza fondamentale nello studio delle teorie di campo conformi è il tensore energia-impulso. Questo è definito dalla variazione dell'azione rispetto a perturbazioni della metrica:

$$T^{\mu\nu} = 2 (2\pi)^{d-1} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (1.26)$$

Nel caso particolare delle trasformazioni conformi regolari, la variazione dell'azione deve essere nulla. Usando le equazioni (1.6), (1.8) otteniamo:

$$\delta S = \frac{1}{(2\pi)^{d-1} d} \int d^d x T^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} \partial \cdot \epsilon = 0. \quad (1.27)$$

Notiamo che questa espressione si annulla se il tensore energia-impulso ha traccia nulla:

$$T^\mu{}_\mu = 0. \quad (1.28)$$

Data la proprietà delle trasformazioni infinitesime ϵ_μ di essere al più quadratiche nelle coordinate, la condizione (1.28) non è in generale necessaria, ma basterebbe che $T^\mu{}_\mu = \partial^2 \Lambda$, con Λ un campo scalare. Tuttavia si può mostrare [2] che in due dimensioni tale campo con $(h, \bar{h}) = (0, 0)$ non può essere definito globalmente per via delle singolarità infrarosse e quindi la condizione di traccia nulla (1.28) è anche necessaria. Da questo risultato discende anche che l'invarianza di scala (globale) implica l'invarianza conforme.

Il tensore $T_{\mu\nu}$ simmetrico e a traccia nulla in due dimensioni ha solamente due componenti indipendenti. Nelle coordinate complesse prima introdotte abbiamo:

$$T_{zz} = \frac{1}{4}(T_{00} - 2iT_{01} - T_{11}), \quad (1.29)$$

$$T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{4}(T_{00} + 2iT_{01} - T_{11}), \quad (1.30)$$

$$T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = \frac{1}{4}T^\mu{}_\mu = 0. \quad (1.31)$$

La legge di conservazione $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ si esprime nelle coordinate complesse come $\partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} T_{zz} = 0$; ne segue che T_{zz} e $T_{\bar{z}\bar{z}}$ siano rispettivamente funzioni olomorfe e anti-olomorfe, $T(z) \equiv T_{zz}$ e $\bar{T}(\bar{z}) \equiv T_{\bar{z}\bar{z}}$.

1.2.3 Quantizzazione radiale

La descrizione operatoriale della teoria richiede l'identificazione di una direzione di tipo tempo, sulle cui ipersuperfici ortogonali definire delle regole di commutazione e uno spazio di Hilbert per gli stati. Consideriamo la teoria definita su un cilindro Euclideo $(1+1)$ -dimensionale, con la coordinata temporale τ che scorre lungo l'asse del cilindro, da $-\infty$ a $+\infty$, e la coordinata spaziale σ periodica di periodo $2\pi R$. Il cilindro con coordinata complessa $\xi = \tau + i\sigma$ può essere mappato nel piano complesso z dalla trasformazione conforme (Fig. 1.1):

$$z = e^{\xi/R} = e^{\frac{\tau+i\sigma}{R}}. \quad (1.32)$$

Di conseguenza una traslazione temporale $\tau \rightarrow \tau + a$, generata dall'hamiltoniana \mathcal{H} della teoria, corrisponde ad una dilatazione nel piano $z \rightarrow e^{a/R}z$, generata da $\ell_0 + \bar{\ell}_0$. Pertanto il tempo scorre radialmente nel piano z . D'altra parte una traslazione spaziale $\sigma \rightarrow \sigma + bR$ nel cilindro corrisponde ad una rotazione $z \rightarrow e^{ib}z$. Nel piano z , le ipersuperfici a tempo costante sono cerchi centrati nell'origine, mentre l'infinito futuro, $\tau = +\infty$, e l'infinito passato, $\tau = -\infty$, sono rappresentati rispettivamente dal punto all'infinito e dall'origine. Abbiamo quindi mostrato che la quantizzazione canonica sul cilindro corrisponde alla quantizzazione radiale della teoria nel piano.

La legge di trasformazione conforme di un campo nel formalismo operatoriale si ottiene a partire dal commutatore a tempi uguali con la carica conservata dalla simmetria. L'espressione della carica è la seguente:

$$\Theta = \int_{\tau=const.} d\sigma j^0 \xrightarrow{\text{nel piano}} \Theta = \frac{1}{2\pi i} \oint (dz T(z) \epsilon(z) + d\bar{z} \bar{T}(\bar{z})), \quad (1.33)$$

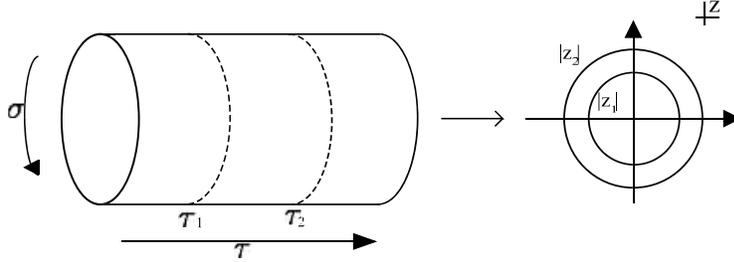


Figura 1.1: Mappa dal cilindro al piano complesso

dove l'integrale $\oint dz$ è svolto sulla circonferenza a raggio costante nel piano z e $T(z)$, $\bar{T}(\bar{z})$ sono adesso operatori che agiscono nello spazio di Hilbert. La variazione del campo è quindi data da:

$$\delta_{\epsilon\bar{\epsilon}}\Phi(w, \bar{w}) = \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{|z|=|w|} dz [T(z)\epsilon(z), \Phi(w, \bar{w})] + c.c. \right). \quad (1.34)$$

Questa espressione richiede l'introduzione dell'ordinamento temporale degli operatori. Nel caso della quantizzazione radiale si introduce il seguente ordinamento radiale:

$$R(A(z)B(w)) = \begin{cases} A(z)B(w) & \text{se } |z| < |w|, \\ B(w)A(z) & \text{se } |z| > |w|. \end{cases} \quad (1.35)$$

Il commutatore in (1.34) deve quindi essere valutato sui contorni di z indicati in Fig.1.2. La differenza dei cammini può essere deformata nel solo integrale lungo il cammino \mathcal{C}_w attorno al punto w , utilizzando l'analiticità del campo $T(z)$. Grazie alla decomposizione olomorfa e antiolomorfa della simmetria conforme, possiamo studiare la trasformazione della sola parte olomorfa del campo primario $\Phi(w)$; analoghe espressioni valgono per la parte antiolomorfa. Prendendo la forma infinitesima della trasformazione (1.20) per $\bar{h} = 0$ otteniamo:

$$\delta_{\epsilon}\Phi(w) = [h(\partial \cdot \epsilon) + \epsilon(w)\partial]\Phi(w). \quad (1.36)$$

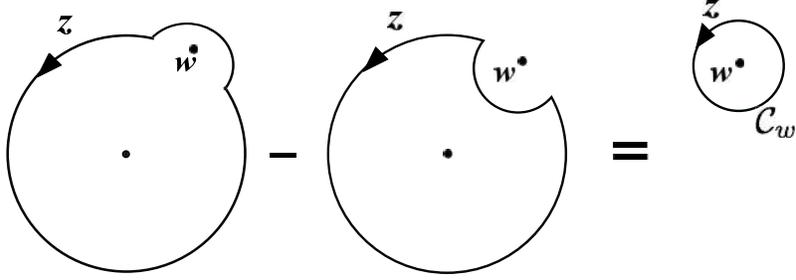


Figura 1.2: Differenza dei cammini d'integrazione intorno a w

Questa trasformazione deve essere uguagliata alla parte olomorfa della (1.34):

$$\begin{aligned} \delta_{\epsilon\epsilon}\Phi &= \frac{1}{2\pi i} \left[\oint_{|z|>|w|} - \oint_{|z|<|w|} \right] dz \epsilon(z) T(z) \Phi(w) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_w} dz \epsilon(z) T(z) \Phi(w) = (h\partial\epsilon(w) + \epsilon(w)\partial)\Phi(w). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Utilizzando l'olomorficit  dei campi $T(z)$, possiamo riscrivere la relazione (1.37) come una condizione sulle singolarit  polari del prodotto dei campi quantistici corrispondenti:

$$T(z)\Phi(w) = \frac{h}{(z-w)^2}\Phi(w) + \frac{1}{(z-w)}\Phi(w) + \text{termini regolari per } z \rightarrow w. \quad (1.38)$$

Si pu  dimostrare che questo risultato si ottiene anche dall'identit  di Ward per la simmetria conforme nel formalismo funzionale, (1.25), [2, pp. 118-120].

In ogni teoria di campo, le funzioni di correlazione sono singolari quando le posizioni di due o pi  campi coincidono. Tali singolarit  a corte distanze sono espresse in termini dell'OPE (*Operator Product Expansion*) degli operatori:

$$A(z)B(w) \sim \sum_i C_i(z-w)\mathcal{O}_i(w), \quad (1.39)$$

dove dove gli \mathcal{O}_i sono un set completo di operatori locali mentre le C_i sono le funzioni di struttura. La (1.39) esprime la relazione di completezza dell'algebra degli operatori

locali ed ha un significato molto preciso nelle teorie conformi, dove $\mathcal{C}(w-z)$ ha un andamento a potenza. Ad esempio l'equazione (1.38) descrive l'OPE tra il tensore energia-impulso e un campo olomorfo primario.

Notiamo adesso che il tensore energia-impulso non è un campo primario, infatti l'OPE con se stesso è data da:

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}\partial_w T(w) + \text{termini regolari.} \quad (1.40)$$

Il termine aggiuntivo con un polo di ordine 4 è necessario per ottenere il correlatore $\langle TT \rangle$ non nullo [2]. La costante c è chiamata *carica centrale* o *anomalia conforme* ed il suo valore dipende dalla teoria descritta, come vedremo nella prossima sezione. Osserviamo che il tensore energia-impulso $T(z)$ è comunque un campo quasi-primario con dimensioni conformi ($h = 2, \bar{h} = 0$).

1.2.4 Sviluppo in modi normali

Gli operatori utilizzati per costruire lo spazio di Hilbert degli stati conformi sono ottenuti dalla serie di Laurent del tensore energia-impulso nel seguente modo:

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-2} L_n, \quad L_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_0} dz z^{n+1} T(z), \quad (1.41)$$

$$\bar{T}(\bar{z}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{z}^{-n-2} \bar{L}_n, \quad \bar{L}_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_0} d\bar{z} \bar{z}^{n+1} \bar{T}(\bar{z}). \quad (1.42)$$

L'esponente $(-n-2)$ è scelto in modo tale che sotto dilatazioni L_n trasformi come un campo con dimensione di scala $-n$.

Partendo dalle relazioni (1.41), si può ottenere l'algebra degli operatori L_n utilizzando l'OPE dei tensori energia-impulso (1.40) e seguendo la Fig 1.2:

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_0} dz z^{n+1} T(z), \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_0} dw w^{m+1} T(w) \right] = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\mathcal{C}_0} dw \oint_{\mathcal{C}_w} dz z^{n+1} w^{m+1} T(z) T(w). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Integrando si ottiene l'espressione:

$$[L_n, L_m] = (n-m) L_{n+m} + \frac{c}{12} (n^3 - n) \delta_{n+m,0}. \quad (1.44)$$

Abbiamo quindi ottenuto la celebrata algebra di Virasoro delle trasformazioni conformi bidimensionali. Analoga espressione si ottiene per gli \bar{L}_n . Osserviamo che la (1.44) differisce dall'algebra conforme classica (1.19) per l'estensione centrale parametrizzata da

c. Ogni teoria di campo conforme contiene un insieme di rappresentazioni dell'algebra di Virasoro per un dato valore di c . Si nota infine come L_{-1}, L_0 e L_1 soddisfino un'algebra priva di termini anomali, riconducendosi così ai generatori delle trasformazioni conformi globali $SL(2, \mathbb{C})$.

1.2.5 Spazio di Hilbert

Lo spazio di Hilbert è costruito a partire dallo stato di vuoto $|0\rangle$ per la teoria sul piano z con hamiltoniana $H = L_0 + \bar{L}_0$. Richiediamo che l'azione del tensore energia-impulso $T(z)$ su $|0\rangle$ sia regolare per $z = 0$; la (1.41) implica le relazioni,

$$L_n |0\rangle = 0, \quad n \geq -1. \quad (1.45)$$

In particolare ritroviamo l'invarianza del vuoto sotto le trasformazioni conformi globalmente definite L_{-1}, L_0 e L_1 . Vedremo in seguito che le trasformazioni generate da L_n con $n \leq -2$ creano stati eccitati.

L'operazione di coniugazione hermitiana nel cilindro euclideo comporta un cambiamento di segno nella coordinata temporale $\tau = it$, che nel piano conforme corrisponde alla trasformazione d'inversione $z \rightarrow 1/z$. Utilizzando la legge di trasformazione (1.20) applicata al campo $T(z)$ otteniamo:

$$T\left(\frac{1}{z}\right) = T(z) z^4. \quad (1.46)$$

Richiedendo l'hermiticità del tensore $T(z)$ abbiamo:

$$L_n^\dagger = L_{-n}. \quad (1.47)$$

L'aggiunta dell'equazione (1.45) è quindi:

$$\langle 0| L_n = 0 \quad \text{per} \quad n \leq 1. \quad (1.48)$$

Osserviamo che i generatori di $SL(2, \mathbb{C})$ L_{-1}, L_0 e L_1 annichilano sia il vuoto "in" $|0\rangle$ che il vuoto "out" $\langle 0|$.

La teoria della rappresentazione dell'algebra di Virasoro può essere sviluppata analizzando gli stati generati dai campi conformi applicati al vuoto, come adesso discuteremo. Ad ogni campo primario Φ_h sono associati dei campi secondari o discendenti, che formano la famiglia conforme $[\Phi_h]$ a cui corrisponde una rappresentazione irriducibile

dell'algebra (1.44). In ogni teoria possiamo identificare un set completo di campi locali $\{\mathcal{O}_i\}$ che consiste di un numero, anche infinito, di famiglie conformi,

$$\{\mathcal{O}_i\} = \bigoplus_h [\Phi_h]. \quad (1.49)$$

Per determinare i discendenti si calcola l'OPE del campo primario con il tensore energia-impulso sviluppato in modi normali:

$$T(z) \Phi_h(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (z-w)^{-n-2} (L_n \Phi_h)(w). \quad (1.50)$$

In tal modo, dall'equazione (1.38), possiamo dedurre l'azione dei modi L_n sul campo; in particolare:

$$(L_0 \Phi_h)(w) = h \Phi_h(w), \quad (1.51)$$

$$(L_{-1} \Phi_h)(w) = \partial_w \Phi_h(w), \quad (1.52)$$

$$(L_n \Phi_h)(w) = 0 \quad \text{per } n > 0. \quad (1.53)$$

Ad ogni campo primario Φ_h possiamo associare il seguente stato ottenuto applicando il campo al vuoto:

$$|h\rangle = \Phi_h(0) |0\rangle. \quad (1.54)$$

Sfruttando la (1.54) e le (1.51 - 1.53) otteniamo:

$$L_n |h\rangle = 0 \quad \text{per } n > 0, \quad (1.55)$$

$$L_0 |h\rangle = h |h\rangle. \quad (1.56)$$

Quindi lo stato $|h\rangle$ è autostato di L_0 con autovalore h . Inoltre questo stato è annichilato da metà dei generatori di Virasoro, analogamente allo stato di vuoto (1.45). Gli stati eccitati corrispondenti ai discendenti del campo Φ_h sono quindi della forma:

$$L_{-n_1} L_{-n_2} \dots L_{-n_k} |h\rangle, \quad n_1 \geq n_2 \geq \dots n_k > 0. \quad (1.57)$$

Utilizzando l'algebra di Virasoro (1.44) otteniamo:

$$L_0 L_{-n} |h\rangle = (h+n) L_{-n} |h\rangle, \quad (1.58)$$

pertanto i discendenti hanno energia intera positiva rispetto allo stato $|h\rangle$. Questo stato di energia minima nel settore del campo Φ_h è detto "stato di peso massimo" nella teoria delle rappresentazioni dell'algebra di Virasoro [3]. In conclusione ogni stato $|h\rangle$ e la

sua torre di stati eccitati corrisponde ad una rappresentazione dell'algebra di Virasoro (si noti l'ortogonalità $\langle h|h' \rangle = \delta_{hh'}$ dovuta alla (1.23)).

Lo stato di peso massimo "out" è ottenuto mediante l'operazione di aggiunzione che consiste nella trasformazione conforme $z \rightarrow 1/z$. Abbiamo:

$$\langle h| = \lim_{z, \bar{z} \rightarrow \infty} \langle 0| \Phi_h(z, \bar{z}) z^{2h} \bar{z}^{2\bar{h}}. \quad (1.59)$$

Questo stato soddisfa le equazioni:

$$\langle h| L_n = 0 \quad \text{per } n < 0, \quad (1.60)$$

$$\langle h| L_0 = \langle h| h. \quad (1.61)$$

1.2.6 Teorie fermioniche e bosoniche libere

Teoria bosonica libera

Consideriamo adesso due esempi del formalismo precedentemente introdotto. Il caso più semplice è quello della teoria euclidea di un campo bosonico libero a massa nulla in due dimensioni¹:

$$S = \frac{1}{8\pi} \int d^2x \sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \partial \varphi \bar{\partial} \varphi. \quad (1.62)$$

La funzione di correlazione a due punti del campo bosonico è:

$$\langle \varphi(z, \bar{z}) \varphi(w, \bar{w}) \rangle = -\log(z-w) - \log(\bar{z}-\bar{w}). \quad (1.63)$$

Osserviamo che il campo bosonico φ si decompone anch'esso in parte olomorfa e anti-olomorfa, ma non è un campo conforme, in quanto il propagatore non ha l'andamento a legge di potenza. D'altra parte, la sua derivata $\partial\varphi$ è un campo conforme olomorfo con correlatore,

$$\langle \partial\varphi(z) \partial\varphi(w) \rangle = -\frac{1}{(z-w)^2}. \quad (1.64)$$

Dalla (1.26), applicata all'azione (1.62), si ottiene il tensore energia-impulso del sistema bosonico:

$$T(z) = \frac{1}{2} : \partial\varphi \partial\varphi : . \quad (1.65)$$

Nel caso quantistico, il prodotto di due campi è singolare per punti coincidenti e quindi l'espressione (1.65) è regolarizzata introducendo l'ordinamento normale ($: \cdot :$).

¹In questa tesi, a parte dove specificato, $\partial \equiv \partial_z$ e $\bar{\partial} \equiv \partial_{\bar{z}}$

Nella teoria libera, possiamo applicare il teorema di Wick per calcolare espressioni ordinate normalmente. Utilizzando la definizione (1.65) di $T(z)$ e la contrazione dei campi (1.63), otteniamo le seguenti espressioni per l'OPE del campo $\partial\varphi$ con T e di due tensori energia-impulso:

$$T(z)\partial\varphi(w) \sim \frac{1}{(z-w)^2}\partial\varphi(w) + \frac{1}{z-w}\partial^2\varphi(w), \quad (1.66)$$

$$T(z)T(w) \sim \frac{1/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}\partial T(w). \quad (1.67)$$

Dal confronto con le equazioni (1.38) e (1.40) segue che il campo $\partial\varphi$ è un campo primario olomorfo di dimensione conforme $h = 1$, mentre la carica centrale c della teoria bosonica è pari a 1.

Notiamo che la dimensione conforme del bosone φ è nulla, e quindi è possibile costruire dei campi locali detti operatori di vertice:

$$\mathcal{V}_\alpha(z, \bar{z}) =: e^{i\alpha\varphi(z, \bar{z})} :. \quad (1.68)$$

Calcolando l'OPE con T , si trova che i \mathcal{V}_α sono campi primari con dimensioni conformi $(h, \bar{h}) = \left(\frac{\alpha^2}{2}, \frac{\alpha^2}{2}\right)$.

Vedremo che in generale una teoria conforme interagente con $c = 1$ sarà descritta da una collezione di campi \mathcal{V}_α ed associate rappresentazioni [2]. Notiamo infine che la quantizzazione canonica della teoria (1.62) discussa nel capitolo 3 riprodurrà le relazioni ottenute in questo paragrafo.

Teoria fermionica libera

Consideriamo adesso un fermione di Majorana libero in due dimensioni. L'azione Euclidea si scrive:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^2x \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \Psi = \frac{1}{8\pi} \int d^2x (\bar{\chi} \partial \bar{\chi} + \chi \bar{\partial} \chi), \quad (1.69)$$

dove si è preso $\Psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \bar{\chi} \end{pmatrix}$. La funzione di correlazione ha la forma olomorfa,

$$\langle \chi(z) \chi(w) \rangle = \frac{1}{z-w}, \quad (1.70)$$

che indica che il campo χ ha dimensione $(h, \bar{h}) = (1/2, 0)$. Analoga espressione si trova per il campo antiolomorfo $\bar{\chi}(\bar{z})$.

Il tensore energia-impulso risulta essere:

$$T(z) = \frac{1}{2} : \chi(z) \partial \chi(z) : . \quad (1.71)$$

Calcolando le OPE col teorema di Wick come nel caso bosonico otteniamo:

$$T(z) \chi(w) \sim \frac{1/2}{(z-w)^2} \chi(w) + \frac{1}{z-w} \partial \chi(w), \quad (1.72)$$

$$T(z) T(w) \sim \frac{1/4}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2} T(w) + \frac{1}{z-w} \partial T(w). \quad (1.73)$$

Queste relazioni verificano che il campo primario χ ha dimensione $h = \frac{1}{2}$ ed inoltre determinano la carica centrale della teoria $c = \frac{1}{2}$.

Introduciamo adesso il campo fermionico chirale $\psi(z)$ complesso, detto fermione di Weyl, che descrive fermioni carichi. Questo può essere realizzato con due spinori di Majorana, $\psi = \chi_1 + i\chi_2$ e quindi ha carica centrale $c = 1$. Definiamo i modi ψ_n del campo nel seguente sviluppo:

$$\psi(z) = \sum_n \psi_n z^{-n-\frac{1}{2}}. \quad (1.74)$$

In analogia con la discussione nella sezione 1.2.4 per i modi L_n , eq.(1.43), utilizziamo la relazione (1.74) per calcolare l'algebra dei modi ψ_n . Si ottengono le relazioni di anti-commutazione canoniche,

$$\{\psi_n, \psi_m\} = \delta_{n+m,0}. \quad (1.75)$$

Oltre al campo ψ di dimensione conforme $h = \frac{1}{2}$, è possibile costruire un campo di dimensione conforme $h = 1$:

$$\rho(z) =: \psi^\dagger(z) \psi(z) : . \quad (1.76)$$

Questo campo corrisponde alla densità di carica della teoria del fermione di Weyl. La carica $\rho(z)$ e l'energia $T(z)$ locali possono essere sviluppate in modi normali, definendo gli L_n (1.41) e corrispondentemente $\rho(z) = \sum_n \rho_n z^{-n-1}$.

I generatori ρ_n e L_n soddisfano una generalizzazione dell'algebra di Virasoro della seguente forma:

$$\begin{aligned} [\rho_n, \rho_m] &= n \delta_{n+m,0}, \\ [L_n, \rho_m] &= -m \rho_{n+m}, \\ [L_n, L_m] &= (n-m) L_{n+m} + \frac{1}{12} (n^3 - n) \delta_{n+m,0}, \end{aligned} \quad (1.77)$$

detta *algebra delle correnti*. Queste espressioni possono essere ottenute dalle definizioni (1.71) e (1.76) utilizzando la quantizzazione canonica (1.75) o equivalentemente dalle OPE dei campi conformi (1.72), (1.73).

Il fatto che la carica centrale $c = 1$ della teoria di Weyl sia la stessa della teoria bosonica suggerisce un legame fra le due teorie. In effetti esiste una relazione esatta detta bosonizzazione in due dimensioni, che sarà descritta nel capitolo 3.

Capitolo 2

Effetto Hall quantistico

2.1 Introduzione

Il sistema fisico che introduciamo in questo capitolo fu ideato nel 1879 dal fisico Edwin Hall per determinare il segno della carica q dei portatori di corrente. Un nastro conduttore è posto nel piano (x, y) e su di esso scorre una corrente $\mathbf{j} = q\rho\mathbf{v}$ lungo y , (Fig.2.1). Il sistema bidimensionale è immerso in un campo magnetico \mathbf{B} omogeneo e statico perpendicolare al nastro nella direzione z . Sui portatori della corrente \mathbf{j} agisce una forza di Lorentz \mathbf{F}_L che provoca una differenza di carica ed un campo elettrico \mathbf{E} in direzione x . All'equilibrio abbiamo:

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) = 0. \quad (2.1)$$

Introduciamo il tensore conduttività $j^i = \sigma^{ij} E^j$, per descrivere campo elettrico e corrente non collineari, e otteniamo dalla (2.1):

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & q\rho c/B \\ -q\rho c/B & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Quindi nell'effetto Hall classico la corrente è puramente trasversa e il suo segno determina la carica dei portatori.

Negli anni ottanta, l'effetto Hall in strati bidimensionali di elettroni realizzati in giunzioni di semiconduttori di silicio e GaAs-AlGaAs mostrò una conduttività anomala nel regime quantistico [5] [6]. Per campi magnetici dell'ordine di 10 *Tesla* e a temperature di 10 – 100 *mK*, si osservano dei *plateaux* nella conduttività in funzione del campo magnetico. Inoltre i valori della conduttività ai *plateaux* sono multipli interi di

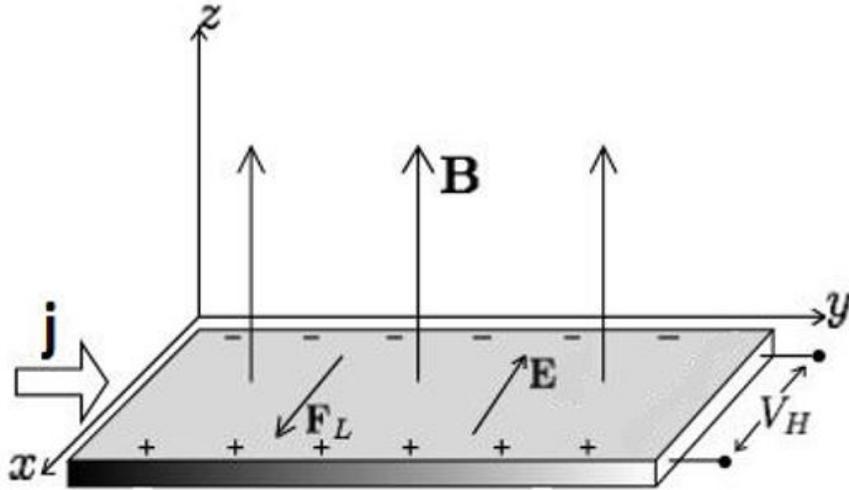


Figura 2.1: Effetto Hall

e^2/h :

$$\sigma_{ik} \Big|_{\text{plateau}} = \nu \frac{e^2}{h} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.3)$$

dove l'intero ν è detta *frazione di riempimento* o *filling fraction*. In Fig. 2.2 è riportato l'andamento delle componenti del tensore resistività R_{ij} , ovvero il tensore inverso di σ_{ij} , che quindi ai *plateaux* assume la forma:

$$R_{ij} \Big|_{\text{plateau}} = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2} \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Come si nota nel grafico (2.2), l'andamento lineare classico della resistività trasversa R_{xy} (2.4), è violato. Il fatto che la conduttività Ohmica σ_{xx} (2.3) si annulli in corrispondenza dei *plateaux* suggerisce l'esistenza di un gap di energia tra lo stato fondamentale del sistema e gli stati eccitati. Klitzing, Dorda e Pepper [5] furono i primi ad osservare i *plateaux*, scoprendo così l'effetto Hall quantistico intero (IQHE). Negli anni successivi, grazie all'utilizzo di campioni più puri, furono osservati anche *plateaux* a valori frazionari di ν [7]. In particolare esistono due serie: la serie di Laughlin $\nu = 1/(q+1)$ con q pari, e la serie di Jain $\nu = m/(q \pm 1)$, con $m = 2, 3, \dots$. Queste descrivono il cosiddetto effetto Hall quantistico frazionario (FQHE) [8].

In questo capitolo discutiamo le principali proprietà che fanno dell'effetto Hall quantistico un sistema particolarmente interessante. In primo luogo i valori sperimentali

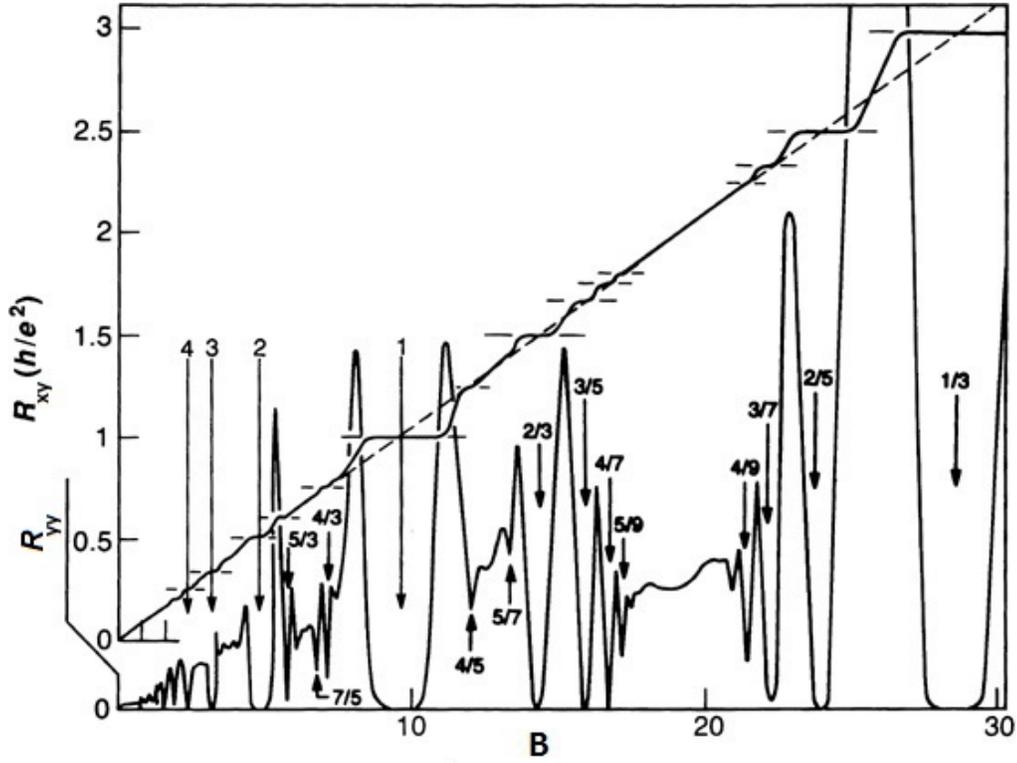


Figura 2.2: I valori della resistività R_{xy} e R_{yy} in funzione del campo magnetico per un sistema alla temperatura di $85mK$. I numeri indicati mostrano il valore della *filling fraction* ν .

assunti dalla conduttività nei *plateaux* sono universali, ovvero insensibili ai dettagli microscopici del campione utilizzato [6]. Inoltre i valori sono estremamente precisi, ($\Delta\sigma_{xy}/\sigma_{xy} \sim \mathcal{O}(10^{-9})$), rendendo l'effetto Hall quantistico uno dei fenomeni più precisi conosciuti in fisica, che permette la determinazione della costante di struttura fine α con un'accuratezza comparabile con quella degli esperimenti in fisica delle particelle [5]. Questi fenomeni lasciano supporre la presenza di proprietà di simmetria e geometriche che determinano i valori della conduttività indipendentemente dai dettagli microscopici dell'hamiltoniana del sistema.

Un approccio teorico che permette di descrivere fenomeni universali è quello della teoria dei campi effettiva. Vedremo infatti che le proprietà descritte precedentemente, come la quantizzazione esatta della conduttività, possono essere formalizzate dalla teoria di gauge topologica detta di Chern-Simons. D'altra parte l'insensibilità ai dettagli microscopici è caratteristica di grandi lunghezze di correlazione e di invarianza di scala e conforme. Mostriamo che le eccitazioni di bassa energia del sistema Hall si trovano al bordo del campione bidimensionale e sono descritte da una teoria di campo conforme

in $(1 + 1)$ dimensioni, una spaziale e una temporale.

2.2 Effetto Hall quantistico intero

2.2.1 Livelli di Landau

Iniziamo con il ricordare il comportamento quantistico di elettroni liberi sottoposti ad un campo magnetico costante. L'hamiltoniana di singola particella è:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2, \quad (2.5)$$

dove si è trascurata l'interazione di Pauli con lo spin dell'elettrone, perché si suppone completamente polarizzato dal campo. Consideriamo per comodità un sistema bidimensionale nel piano infinito con invarianza per rotazioni, nel quale risulta conveniente scegliere la gauge simmetrica per il campo elettromagnetico: $A^i = -\frac{1}{2}B\epsilon^{ij}x^j$, con $i, j = 1, 2$. Il campo B definisce una scala di lunghezza caratteristica, la lunghezza magnetica, $\ell_B = \sqrt{2\hbar c/eB}$, corrispondente alla dimensione delle orbite di ciclotrone percorse dagli elettroni. D'ora in avanti scegliamo le unità di misura naturali $\hbar = c = k_B = 1^2$. Passando alle coordinate complesse $z = x^1 + ix^2$ e $\bar{z} = x^1 - ix^2$, è possibile definire due coppie di operatori di creazione e distruzione [9],

$$a = \frac{z}{2\ell_B} + \ell_B \bar{\partial}, \quad a^\dagger = \frac{\bar{z}}{2\ell_B} - \ell_B \partial, \quad [a, a^\dagger] = 1, \quad (2.6)$$

$$b = \frac{\bar{z}}{2\ell_B} + \ell_B \partial, \quad b^\dagger = \frac{z}{2\ell_B} - \ell_B \bar{\partial}, \quad [b, b^\dagger] = 1, \quad (2.7)$$

mentre tutti gli altri commutatori di a e b sono nulli. In termini di questi operatori la (2.5) assume la forma dell'hamiltoniana di oscillatore armonico:

$$H = w_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \quad (2.8)$$

dove $w_c = eB/m$ è la frequenza di ciclotrone. L'operatore di momento angolare lungo l'asse z , $J = -ix^i \epsilon^{ij} \partial_j$, può essere riscritto come:

$$J = b^\dagger b - a^\dagger a. \quad (2.9)$$

Pertanto, questo sistema è caratterizzato da stati, detti livelli di Landau, con energia $\varepsilon_n = w_c(n + 1/2)$, $n \in \mathbb{N}$, che sono degeneri nel momento angolare m , $m = -n, -n + 1, \dots$ (la degenerazione è finita per un sistema finito, come vedremo in seguito).

¹ ϵ^{ij} è il tensore antisimmetrico definito da $\epsilon^{12} = 1$.

²Faremo comparire eventualmente le costanti \hbar , c in formule più significative.

A bassa temperatura e grandi campi magnetici, $T < w_c$, gli elettroni si trovano principalmente nel primo livello di Landau. Questo è descritto da stati che soddisfano $a\psi = 0$. Sostituendo l'operatore (2.6), si trova $\psi = \varphi(z) e^{-|z|^2/2\ell_B^2}$, dove φ è una funzione analitica di z che può essere scelta autostato del momento angolare. Si ottengono quindi gli autostati di singolo elettrone del primo livello di Landau,

$$\psi_{0,m}(z, \bar{z}) = \frac{1}{\ell_B \sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{m!}} \left(\frac{z}{\ell_B} \right)^m e^{-|z|^2/2\ell_B^2}. \quad (2.10)$$

La funzione d'onda a molti corpi di N elettroni che riempiono il primo livello (corrispondente a $\nu = 1$) si ottiene prendendo il determinante di Slater delle funzioni d'onda di singola particella. Questa quantità assume la forma del cosiddetto determinante di Vandermonde:

$$\Psi(\{z_i, \bar{z}_i\}) = \prod_{i < j}^N (z_i - z_j) \exp\left(-\sum_{i=1}^N \frac{|z_i|^2}{2\ell_B^2}\right). \quad (2.11)$$

La base di autostati del livello n di Landau può essere ricavata applicando gli operatori a^\dagger e b^\dagger sullo stato fondamentale $\psi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\ell_B} e^{-|z|^2/2\ell_B^2}$, ottenendo l'espressione:

$$\begin{aligned} \psi_{n,m} &= \frac{(b^\dagger)^{n+m}}{\sqrt{(n+m)!}} \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \psi_{0,0}(z, \bar{z}) \\ &= \frac{1}{\ell_B \sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{n!}{(n+m)!}} \left(\frac{z}{\ell_B} \right)^m L_n^m(|z|^2/\ell_B^2) e^{-|z|^2/2\ell_B^2}, \quad \text{con } m+n \geq 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

dove $n = 0, 1, 2, \dots$ indica il livello di Landau e gli L_n^m sono i polinomi di Laguerre generalizzati.

Le funzioni d'onda del primo livello di Landau $|\psi_{0,m}|$ sono piccate radialmente ad una distanza dall'origine pari a $r_m = \ell_B \sqrt{m}$, formando così una struttura a orbitali concentrici, (Fig. 2.3). L'area racchiusa nell'orbita di raggio r_m risulta pari a $A_m = \pi r_m^2 = \frac{2\pi/e}{B} m$ e perciò contiene m quanti di flusso $\Phi_0 = 2\pi/e$ del campo magnetico B . Di conseguenza la corona circolare tra due successivi orbitali racchiude un quanto di flusso Φ_0 . Considerando il sistema di un disco di area A vediamo che questo può contenere approssimativamente un numero di stati degeneri N_ϕ corrispondente al numero di quanti di flusso creati dal campo B nel campione:

$$N_\phi = \frac{BA}{\Phi_0}. \quad (2.13)$$

Si può dimostrare che questo risultato è esatto e indipendente dalla forma della superficie.

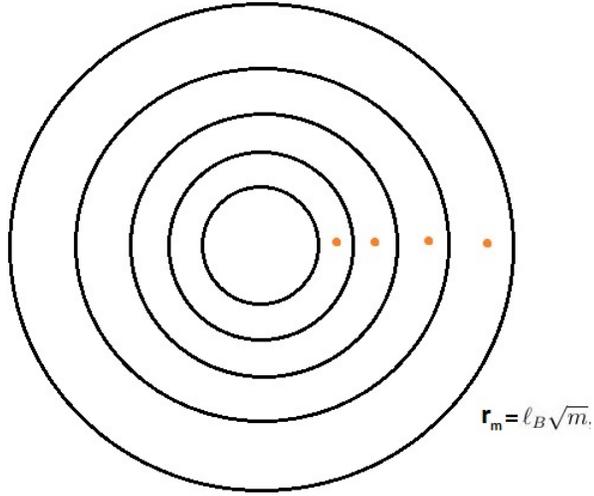


Figura 2.3: Gli stati degeneri sono rappresentati da orbitali di raggio r_m . Ciascuna circonferenza racchiude un'area contenente m quanti di flusso del campo magnetico B . Per $\nu = 1$ ogni orbitale è occupato da un elettrone.

Supponiamo che il sistema di N elettroni riempia n livelli di Landau, ovvero che il campo magnetico B sia tale da fissare la degenerazione dei livelli di Landau N_ϕ in modo che:

$$n = \frac{N}{N_\phi} = \frac{\rho A}{BA/\Phi_0} = \frac{2\pi\rho}{eB}. \quad (2.14)$$

Dall'equazione (2.2) si ottiene³

$$\sigma_{xy} = -\frac{e\rho}{B} = -\frac{e^2}{2\pi}n. \quad (2.15)$$

Abbiamo quindi mostrato che una semplice analisi degli elettroni liberi in n livelli di Landau completamente pieni riproduce l'effetto Hall quantistico intero (2.3). L'esistenza del gap, necessaria per avere $\sigma_{xx} = 0$, è assicurata da $\Delta = w_c$.

All'aumentare del campo magnetico B la filling fraction ν diminuisce come in Fig. 2.2, in quanto la degenerazione dei livelli N_ϕ aumenta, quindi fissato il numero di elettroni diminuisce il numero dei livelli di Landau pieni. In base all'analisi precedente, solamente certi valori precisi di B sono tali da permettere un riempimento completo

³Nonostante le geometrie siano diverse dal piano infinito, indichiamo sempre con σ_{xy} e σ_{xx} rispettivamente la conduttività trasversa e longitudinale al campo elettrico applicato.

dei livelli e quindi un gap finito. Resta quindi da capire l'esistenza di *plateaux*, $\Delta B > 0$ dove la conducibilità Hall rimane costante al valore intero e $\sigma_{xx} = 0$.

Questo fenomeno può essere spiegato dalla presenza di impurezze nel sistema [6]. A tale scopo, introduciamo un potenziale $V(x)$ con minimi locali in corrispondenza delle impurezze. Il potenziale rompe la degenerazione dei livelli di Landau che diventano delle bande; supponiamo che la presenza delle impurezze non mescoli i livelli di Landau, ovvero che $|V| \ll w_c$. Un altro effetto delle impurezze è quello di trasformare alcuni stati quantistici estesi, nei quali gli elettroni sono liberi di muoversi in tutto il sistema, in stati localizzati in quanto intrappolati nei minimi locali del potenziale V [10]. Come si vede in Fig. 2.4, gli stati estesi si posizionano ancora al centro di ogni livello di Landau, quelli localizzati nelle code fra diversi livelli. Quando l'energia di Fermi si trova nella regione degli stati localizzati, variando il campo B e quindi la degenerazione, cambia il numero di elettroni che occupano gli stati localizzati, mentre l'occupazione degli stati estesi che trasportano corrente rimane costante. Si osserva quindi il *plateau* della conduttività in un intervallo di valori ΔB , che è proporzionale alla densità di impurezze. Continuando a variare B , il numero di elettroni in eccesso o in difetto rispetto alla degenerazione supera il numero di stati localizzati disponibili, quindi la conduttività varia sensibilmente a seguito dell'occupazione di un'altra banda e la resistenza Hall si comporta secondo la teoria classica fino al riempimento di tutti gli stati estesi e alla formazione di un nuovo *plateau*.

2.2.2 Invarianza di gauge e argomento del flusso di Laughlin

Il disordine introdotto dalle impurezze permette di capire qualitativamente l'andamento di σ_{xy} a *plateaux*, ma non spiega da solo l'eccezionale precisione della sua quantizzazione Hall, insensibile ai dettagli microscopici della teoria. Esistono vari approcci che permettono di spiegare la robustezza della conduttività e che verranno discussi a più riprese nella tesi.

Il primo di questi è l'argomento del flusso dovuto a Laughlin [11]. Supponiamo di avere un sistema di elettroni su un anello come in Fig.2.5. Aggiungiamo al campo magnetico B un flusso $\Phi(t)$ dipendente dal tempo lungo l'asse centrale, ad esempio inserendo un solenoide all'interno dell'anello. Variamo il flusso Φ nel tempo da 0 a Φ_0 in modo adiabatico cioè in un intervallo di tempo $T \gg 1/\Delta$, dove $\Delta \sim w_c$ è il gap. Tale flusso induce una forza elettromotrice $\mathcal{E} = -\partial\Phi/\partial t$ longitudinale ed una corrente Hall radiale. Lo spettro del sistema dipende da $\Phi(t)$, ma è lo stesso all'inizio e alla fine del ciclo, in quanto l'hamiltoniana $H(\Phi = 0)$ è legata all'hamiltoniana $H(\Phi = \Phi_0)$ da

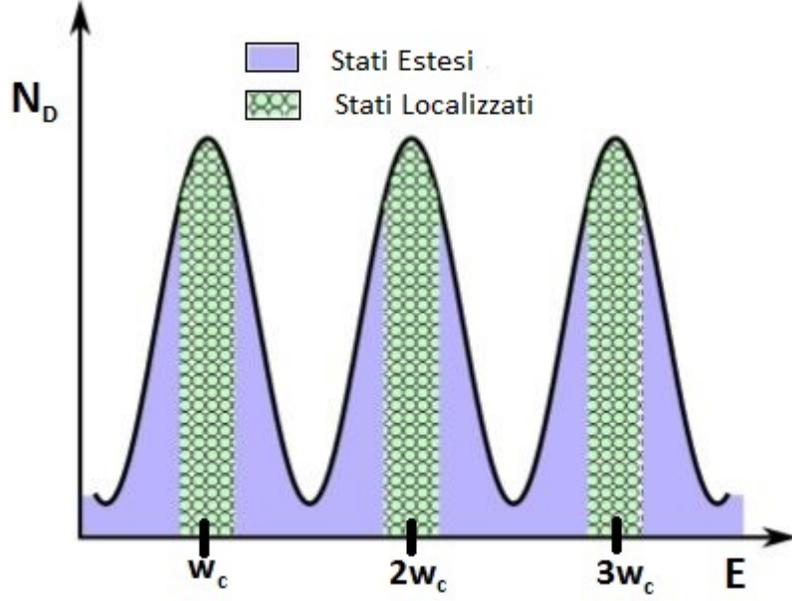


Figura 2.4: La densità degli stati nei livelli di Landau in presenza di impurezze.

una trasformazione di gauge del campo A . Più precisamente l'effetto del flusso $\Phi(t)$ può essere cancellato da una trasformazione di gauge degli stati:

$$\psi(r, \theta) \rightarrow e^{-ie\frac{\Phi}{2\pi}\theta} \psi(r, \theta). \quad (2.16)$$

Per $\Phi = \Phi_0$, la trasformazione di gauge è periodica e mappa un autostato in un altro, quindi lo spettro di $H(0)$ e $H(\Phi_0)$ coincidono. Nel processo, ogni stato localizzato è mappato in se stesso, mentre ogni stato esteso va nel corrispondente stato al successivo raggio disponibile, causando la corrente Hall. Questo fenomeno prende il nome di flusso spettrale, *spectral flow*, e avviene anche nel sistema privo di impurezze. Infatti in questo caso la trasformazione di fase indotta dal flusso aumenta di un'unità il momento angolare dello stato facendo saltare l'elettrone nell'orbitale successivo.

In conclusione, la conseguenza dell'inserimento adiabatico di Φ_0 è il trasferimento di una carica elettronica dal bordo interno dell'anello a quello esterno, per ogni livello di Landau pieno. Se i livelli di Landau pieni sono n , si crea una corrente radiale $I = ne/T$ che comporta una conduttività Hall pari a:

$$\sigma_{xy} = \frac{I}{\mathcal{E}} = -\frac{e^2}{2\pi}n. \quad (2.17)$$

Abbiamo riottenuto il risultato (2.15) in modo esatto, in quanto l'argomento non richiede ipotesi sulla forma dell'hamiltoniana microscopica, che può contenere interazione fra

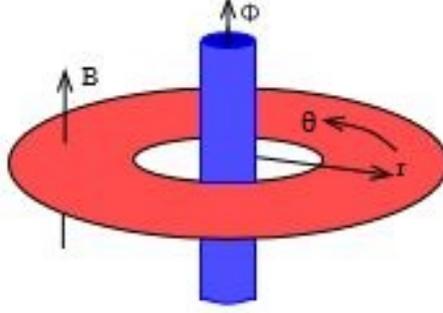


Figura 2.5: Rappresentazione schematica dell'argomento di Laughlin per l'effetto Hall nella geometria dell'anello. L'inserzione del flusso Φ genera una forza elettromotrice e una corrente radiale dovuta allo *spectral flow* degli stati quantistici estesi.

gli elettroni, disomogeneità del campo B etc, a patto che non chiudano il gap Δ .

2.2.3 Stato fondamentale incompressibile

Consideriamo il sistema (2.5) a molti corpi, descritto in seconda quantizzazione dall'hamiltoniana:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \int d^2x \left(D_i \hat{\Psi} \right)^\dagger \left(D_i \hat{\Psi} \right), \quad (2.18)$$

con $D_i = \partial_i + ieA_i$, la derivata covariante, e con l'operatore di campo $\hat{\Psi}$ che ammette uno sviluppo sulla base delle autofunzioni dell'energia e del momento angolare di singola particella (2.12):

$$\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{\infty} \hat{c}_m^{(n)} \psi_{n,m}(\mathbf{x}) e^{-i(n+1/2)w_c t}. \quad (2.19)$$

I coefficienti dello sviluppo $\hat{c}_m^{(n)}$ sono gli operatori di creazione fermionici dello spazio di Fock e soddisfano

$$\left\{ \hat{c}_m^{(n)}, \hat{c}_l^{(j)\dagger} \right\} = \delta_{n,j} \delta_{m,l}, \quad (2.20)$$

mentre tutti gli altri anti-commutatori sono nulli.

Consideriamo lo stato fondamentale $|\Omega\rangle$ a molti corpi corrispondente al primo livello di Landau pieno su un disco di raggio R e contenente tutti gli stati di singola particella di momento angolare $0 \leq m \leq L$. Ricordando la struttura degli orbitali in Fig. 2.3, il raggio del disco è legato approssimativamente a L da $R \simeq \ell_B \sqrt{L}$. Dunque possiamo scrivere:

$$|\Omega\rangle = \hat{c}_0^\dagger \hat{c}_1^\dagger \dots \hat{c}_L^\dagger |0\rangle, \quad (2.21)$$

dove per semplicità $\hat{c}_m^\dagger = \hat{c}_m^{(0)\dagger}$ e $|0\rangle$ è il vuoto dello spazio di Fock. Questa configurazione è chiaramente incompressibile. Infatti un'onda di densità provocherebbe una diminuzione del momento angolare totale e quindi un salto obbligato di elettroni verso stati liberi a livelli superiori. Questo richiederebbe energie necessarie a superare il gap w_c che non sono accessibili per alti campi magnetici e basse temperature.

Discutiamo adesso la forma della densità nello stato fondamentale con $\nu = 1$ espressa dal valore d'aspettazione dell'operatore $\hat{\rho} = \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}$. Si ottiene facilmente l'espressione:

$$\langle \Omega | \hat{\rho} | \Omega \rangle = \frac{1}{\ell_B^2 \pi} e^{-r^2/\ell_B^2} \sum_{m=0}^L \frac{1}{m!} \left(\frac{r}{\ell_B} \right)^{2m}. \quad (2.22)$$

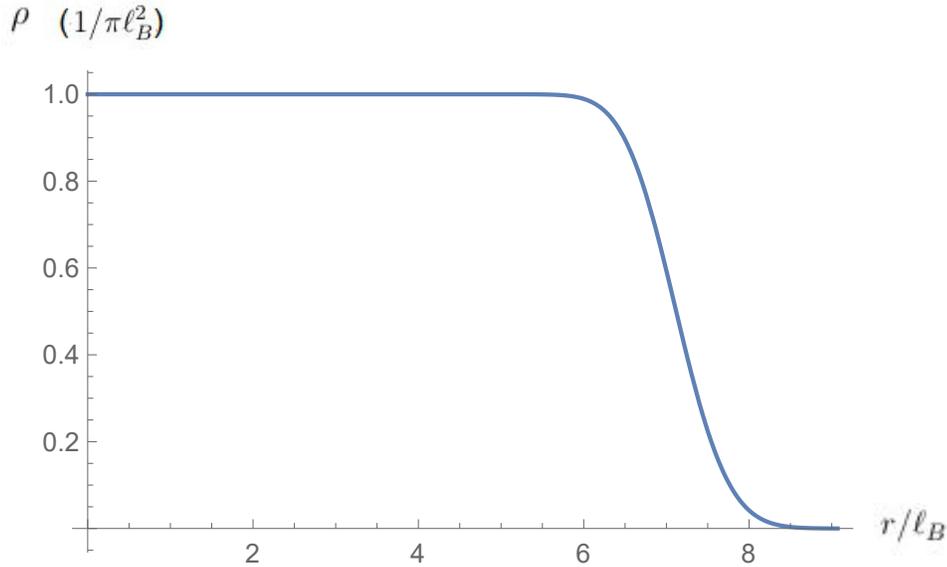


Figura 2.6: Valore d'aspettazione della densità di carica (2.22) in unità di $1/\pi\ell_B^2$ nel primo livello di Landau con $L = 50$ in funzione di r/ℓ_B .

Questa forma, riportata in figura 2.6, è caratteristica di una goccia di fluido bidimensionale. Per $r \ll \ell_B \sqrt{L}$ abbiamo la densità uniforme tipica di un fluido, mentre per $r \simeq \ell_B \sqrt{L}$ il profilo va rapidamente a zero. In conclusione abbiamo mostrato che il primo livello di Landau pieno ($\nu = 1$) corrisponde ad un fluido quantistico di elettroni che è incompressibile per il gap $w_c \gg T$.

2.2.4 Stati di bordo

Possiamo analizzare il sistema Hall nella geometria del disco utilizzando lo spazio di Hilbert del piano infinito, discusso precedentemente, al quale aggiungiamo un poten-

ziale confinante gli elettroni. Questo modificherà la struttura al bordo dei livelli di Landau rompendo la degenerazione [10]. Nella geometria del disco, il potenziale confinante è una funzione radiale $V = V(r)$, mantenendo così il momento angolare un buon numero quantico. Nei pressi del bordo gli autostati del momento angolare acquistano uno spettro che cresce approssimativamente in modo lineare, come in figura 2.7. L'incompressibilità definisce inoltre una superficie di Fermi dove il mare di Fermi corrisponde all'interno del sistema. Le eccitazioni di minore energia sullo stato $|\Omega\rangle$ sono quelle di tipo buca-particella localizzate al bordo.

Possiamo rappresentare l'effetto del potenziale confinante tramite, ad esempio, un potenziale quadratico, per poi effettuare il limite al bordo degli stati elettronici [9]. Il potenziale confinante armonico,

$$V_C(|z|) = \alpha|z|^2 + \beta, \quad (2.23)$$

dà luogo ad uno spettro lineare per gli stati di momento angolare $m \sim L$ nel primo livello di Landau:

$$\varepsilon_m = \alpha(m - L) + \beta. \quad (2.24)$$

I coefficienti α e β dipendono in generale dal numero di particelle $N = L + 1$, in quanto lo spettro lineare è generato dinamicamente, e possono essere sviluppati in potenze di $\sqrt{L} \simeq R$. Le eccitazioni al bordo sono descritte da una teoria di campo conforme se α , nel limite $L \rightarrow \infty$, ammette la seguente espansione:

$$\alpha = \frac{v}{m\sqrt{L}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right). \quad (2.25)$$

Espandendo anche β ,

$$\beta = \beta_0 - \frac{v\mu}{m\sqrt{L}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right), \quad (2.26)$$

a meno di termini di $\mathcal{O}(1/L)$ si trova lo spettro lineare caratteristico delle teorie conformi nella geometria spazio-temporale del cilindro:

$$\varepsilon_m = \beta_0 + \frac{v}{R}(m - L - \mu). \quad (2.27)$$

Notiamo come le eccitazioni neutre buca-particella al bordo abbiano energie dell'ordine $\mathcal{O}(1/\sqrt{L})$, mentre eccitazioni cariche (positive) costano un'energia $\beta_0 + \mathcal{O}(1/\sqrt{L})$. Nel limite $L \rightarrow \infty$, la legge di dispersione assume una forma relativistica con spettro $\varepsilon \propto vp$, dove $p = m/\ell_B\sqrt{L}$ è il momento unidimensionale; inoltre il parametro adimensionale μ gioca il ruolo di potenziale chimico [9]. Questo risultato mette in luce

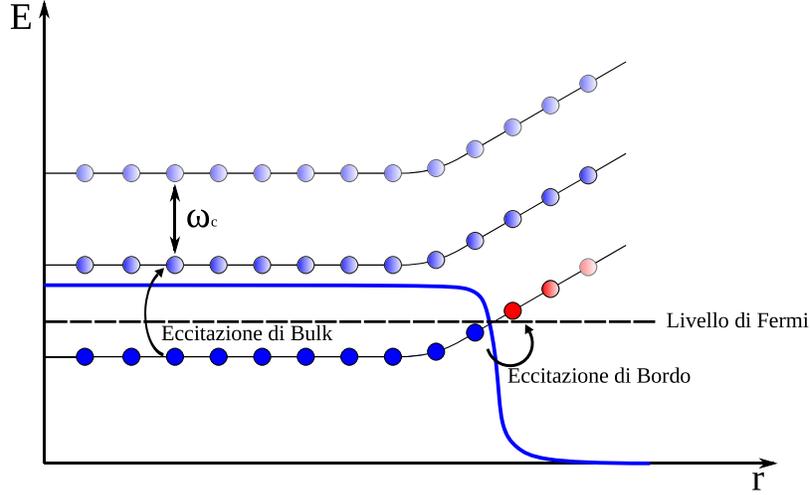


Figura 2.7: Spettro generato dinamicamente in presenza di un potenziale confinante. I livelli perdono la degenerazione al bordo.

la possibilità di rappresentare la teoria al bordo come una teoria conforme di fermioni carichi che descrivono le eccitazioni buca-particella di bassa energia. È dovuta a Stone [12] [13] [14] la dimostrazione che gli elettroni (2 + 1)-dimensionali corrispondono al bordo a fermioni relativistici di Weyl (1 + 1)-dimensionali, carichi e relativistici il cui mare di Dirac coincide col livello di Landau pieno per $L \rightarrow \infty$.

Studiamo adesso il comportamento della teoria nel limite termodinamico $L \simeq (R/\ell_B)^2 \rightarrow \infty$, costruendo la dinamica dei gradi di libertà al bordo del campione. In questo limite la teoria diventa manifestamente relativistica ed è possibile ricavare l'algebra di Virasoro (1.44) e pertanto l'invarianza conforme al bordo. Per prima cosa osserviamo come l'operatore di campo valutato al bordo diventi:

$$\hat{\Psi}(Re^{i\theta}, t) = \left(\frac{2}{\pi\ell_B}\right)^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{c}_m \frac{C_m}{\sqrt{2\pi R}} e^{im\theta} e^{-i\varepsilon_m t}, \quad (2.28)$$

$$\text{con } C_m^2(R^2) = \frac{\sqrt{2\pi}}{(m)!} \left(\frac{R^2}{\ell_B^2}\right)^{m+1/2} e^{-R^2/\ell_B^2}. \quad (2.29)$$

Prendendo il limite termodinamico $L \rightarrow \infty$, i coefficienti C_m descrivono delle gaussiane centrate in $R^2 = m + 1/2$:

$$C_m(R^2) \simeq \exp\left(-\frac{(R^2 - (m + 1/2))^2}{4(m + 1/2)}\right). \quad (2.30)$$

All'interno della regione di spettro lineare (2.27), $L - \sqrt{L} \leq m \leq L + \sqrt{L}$, i picchi delle gaussiane appartengono all'intervallo $(L - \mathcal{O}(1)) \ell_B^2 \leq R^2 \leq (L + \mathcal{O}(1)) \ell_B^2$. Pertanto in tale regione i coefficienti C_m fissano il valore del raggio, $R^2 = (L \pm \mathcal{O}(1)) \ell_B^2$, motivando così la relazione:

$$N_\phi = \frac{R^2}{\ell_B^2} = L + \mu, \quad (2.31)$$

con $\mu \sim \mathcal{O}(1)$. Sostituendo dunque $R^2 = (L + \mu) \ell_B^2$ nelle gaussiane (2.30), e traslando $m \rightarrow m + L$, in modo da considerare l'indice m come il momento angolare al bordo rispetto al massimo valore L , si ottiene:

$$C_{L+m} \sim \exp\left(-\frac{(m - \mu + 1/2)^2}{4L}\right), \quad (2.32)$$

che nel limite termodinamico al bordo tende ad 1,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} C_{L+m} = 1, \quad |m| < \sqrt{L}. \quad (2.33)$$

Pertanto possiamo riscrivere l'operatore di campo:

$$\hat{\Psi}(R e^{i\theta}, t) \simeq \left(\frac{2}{\pi \ell_B^2}\right)^{1/4} e^{i(L+\mu)\theta} \hat{F}_R(\theta, t), \quad (2.34)$$

$$\text{dove } \hat{F}_R(\theta, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{d}_m e^{i(m-\mu)(\theta-vt/R)}, \quad \hat{d}_m = \hat{c}_{m+L}, \quad (2.35)$$

dove gli operatori \hat{d}_m \hat{d}_m^\dagger rispettivamente distruggono e creano le eccitazioni buca-particella al bordo.

L'hamiltoniana di bulk col potenziale confinante ha la forma:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \int d^2x \left(D_i \hat{\Psi}\right)^\dagger \left(D_i \hat{\Psi}\right) + \int d^2x \hat{\Psi}^\dagger V_C \hat{\Psi}. \quad (2.36)$$

Nel primo livello di Landau $D_i \hat{\Psi} = 0$, mentre il termine di potenziale è localizzato sul bordo per la forma ridotta delle funzioni d'onda degli stati vicini alla superficie di Fermi. Dalla forma dell'energia (2.27) otteniamo quindi la seguente forma dell'hamiltoniana di bordo:

$$\hat{H}_R = \frac{v}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \hat{F}_R^\dagger (-i\partial_\theta) \hat{F}_R + c.c., \quad (2.37)$$

in termini del campo \hat{F}_R (2.35). Questa è l'hamiltoniana di un fermione carico, chirale e relativistico che si muove con velocità v su un cerchio di circonferenza $2\pi R$.

2.2.5 Teoria conforme degli stati di bordo

La teoria conforme così costruita è naturalmente definita sul cilindro minkowskiano $(Re^{i\theta}, t)$. È possibile passare al piano conforme, con ordinamento radiale descritto al capitolo 1, introducendo la variabile,

$$\eta = e^{\frac{1}{R}(v\tau + iR\theta)}, \quad (2.38)$$

dove $\tau = it$ è il tempo euclideo. Nella variabile η il campo \hat{F}_R e il suo hermitiano coniugato \hat{F}_R^\dagger sono anti-olomorfi, come richiesto per i fermioni di Weyl introdotti nel paragrafo 1.2.6:

$$\hat{F}_R(\bar{\eta}) = \frac{\eta^{1/2}}{\sqrt{2\pi R}} \hat{F}(\bar{\eta}), \quad \hat{F}(\bar{\eta}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{\eta}^{-m+\mu-1/2} \hat{d}_m, \quad (2.39)$$

$$\hat{F}_R^\dagger(\bar{\eta}) = \frac{\eta^{1/2}}{\sqrt{2\pi R}} \hat{F}^\dagger(\bar{\eta}), \quad \hat{F}^\dagger(\bar{\eta}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{\eta}^{m-\mu-1/2} \hat{d}_m^\dagger. \quad (2.40)$$

L'hamiltoniana \hat{H}_R e la densità di corrente $\hat{\rho}_R$ sono anch'esse chirali:

$$\hat{\rho}_R(\bar{\eta}) = \hat{F}_R^\dagger \hat{F}_R, \quad (2.41)$$

$$\hat{H}_R = \frac{1}{i} \oint d\bar{\eta} \hat{\mathcal{H}}_R, \quad \hat{\mathcal{H}}_R(\bar{\eta}) = \frac{1}{2} v \left(\left(\partial_{\bar{\eta}} \hat{F}_R^\dagger \right) \hat{F}_R - \hat{F}_R^\dagger \partial_{\bar{\eta}} \hat{F}_R \right). \quad (2.42)$$

Per ricostruire l'algebra delle correnti (1.77) definiamo le seguenti cariche:

$$\hat{\rho}_n = \frac{R}{i} \oint d\bar{\eta} \hat{\rho}_R(\bar{\eta}) \bar{\eta}^{n-1} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{d}_{m-n}^\dagger \hat{d}_m, \quad (2.43)$$

$$\hat{L}_n = \frac{R}{iv} \oint d\bar{\eta} \hat{\mathcal{H}}_R(\bar{\eta}) \bar{\eta}^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(m - \frac{n}{2} - \mu \right) \hat{d}_{m-n}^\dagger \hat{d}_m. \quad (2.44)$$

Tali cariche generano le trasformazioni locali di gauge e conformi. Le trasformazioni globali sono generate da $\hat{\rho}_0$, operatore totale di carica, e da $\hat{L}_{-1}, \hat{L}_0, \hat{L}_1$, dove \hat{L}_0 è l'hamiltoniana adimensionale nel piano legata a quella della teoria sul bordo da:

$$\hat{H}_R = v/R \left(\hat{L}_0 - 1/24 \right), \quad (2.45)$$

dove la correzione $-\frac{v}{R} \frac{c}{24}$, $c = 1$, è l'energia di Casimir della teoria conforme sul cilindro spazio-temporale.

La prescrizione per l'ordinamento normale è fissata posizionando gli operatori di distruzione \hat{d}_m con $m > 0$ e \hat{d}_m^\dagger con $m < 0$ alla destra degli operatori di creazione \hat{d}_m^\dagger

con $m > 0$ e \hat{d}_m con $m < 0$. Una volta fissata la regola di ordinamento, si possono calcolare le regole di commutazione degli operatori (2.43), (2.44) ottenendo [9]

$$\begin{aligned} [\hat{\rho}_n, \hat{\rho}_m] &= n\delta_{n+m,0}, \\ [\hat{L}_n, \hat{\rho}_m] &= -m\hat{\rho}_{n+m}, \\ [\hat{L}_n, \hat{L}_m] &= (n-m)\hat{L}_{n+m} - \frac{1}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Riconosciamo la parte chirale dell'algebra delle correnti (1.77) con $c = 1$.

Lo stato fondamentale $|\Omega\rangle$ rappresenta il mare di Dirac per la teoria relativistica, in quanto per definizione $\hat{d}_m |\Omega\rangle = \hat{d}_{-m}^\dagger |\Omega\rangle = 0$ per $m > 0$. Dalle (2.46), le proprietà dello stato $|\Omega\rangle$ sono [9]

$$\hat{L}_n |\Omega, \mu\rangle = \hat{\rho}_n |\Omega, \mu\rangle = 0 \quad \text{per } n > 0, \quad (2.47)$$

$$\hat{L}_0 |\Omega, \mu\rangle = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}(\mu^2 - \mu) \right) |\Omega, \mu\rangle, \quad (2.48)$$

$$\hat{\rho}_0 |\Omega, \mu\rangle = \left(\frac{1}{2} - \mu \right) |\Omega, \mu\rangle. \quad (2.49)$$

Notiamo che lo stato fondamentale $|\Omega, \mu\rangle$ deve essere neutro rispetto all'operatore $\hat{\rho}_0$ che rappresenta la carica fisica che si accoppia correttamente col campo elettromagnetico. Pertanto il potenziale chimico μ è fissato dinamicamente dalle (2.49):

$$\mu = \frac{1}{2}. \quad (2.50)$$

Notiamo che lo stato fondamentale $|\Omega, \mu = 1/2\rangle$ è invariante per $SL(2, \mathbb{C})$, perché è annihilato dai tre generatori delle trasformazioni conformi globali nel piano, $\hat{L}_{-1}, \hat{L}_0, \hat{L}_1$.

2.2.6 Anomalia chirale

Mostriamo come si ottenga la corrente Hall dal punto di vista della teoria conforme al bordo. Riprendiamo l'argomento di Laughlin discusso nella sezione 2.2.2, considerando una geometria ad anello in cui aggiungiamo un flusso $\Phi(t)$ al centro. Il potenziale elettromagnetico subisce una variazione δA_i che può essere scritta come:

$$\delta A_i = \Phi(t) \epsilon^{ij} \frac{x^j}{|x|^2}. \quad (2.51)$$

La variazione del flusso nel tempo genera un campo elettrico tangenziale al bordo esterno $|z| = R$ che vale:

$$E = -\frac{\partial \delta A_\theta}{\partial t} = \frac{\dot{\Phi}}{R}. \quad (2.52)$$

La teoria al bordo (1 + 1)-dimensionale è allora descritta da fermioni di Weyl accoppiati ad un campo elettrico esterno. Come è noto tale teoria è affetta da un'anomalia chirale che viola la conservazione della carica per effetti quanto-relativistici. Per descrivere l'anomalia è utile effettuare una trasformazione di gauge che annulli il termine di potenziale vettore $\delta A_i = 0$, in favore del potenziale scalare $\delta A_0 = -\dot{\Phi}\theta$ [9]. L'hamiltoniana (2.42) in campo esterno ha la forma:

$$\hat{H}_R = \frac{v}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \hat{F}_R^\dagger (-i\partial_\theta) \hat{F}_R + c.c. + R \int_0^{2\pi} d\theta e\delta A_0 \hat{\rho}_R. \quad (2.53)$$

Dall'equazione di Heisenberg

$$i \frac{d\hat{\rho}_R}{dt} = [\hat{\rho}_R, \hat{H}_R], \quad (2.54)$$

si ottiene la variazione della densità di carica:

$$\left(\partial_t + \frac{v}{R} \partial_\theta \right) \hat{\rho}_R = -\frac{e}{2\pi R} \partial_\theta \delta A_0 = \frac{e}{2\pi} E. \quad (2.55)$$

Questa equazione descrive il tasso di produzione di particelle cariche al bordo estratte dal mare di Dirac (livello di Landau pieno). Sul bordo interno è presente la stessa anomalia ma di segno opposto, di modo che il sistema nel suo complesso non presenti anomalie. Perciò l'anomalia della teoria relativistica al bordo non è altro che il flusso radiale di cariche dal bordo interno a quello esterno, ovvero la corrente Hall:

$$j^i = -\frac{e^2}{2\pi} \epsilon^{ij} E^j. \quad (2.56)$$

Il fenomeno ora descritto in cui un'anomalia in (1 + 1) dimensioni è compensata da una corrente classica in (2 + 1) dimensioni è detto *anomaly inflow*. Come noto dalla teoria dei campi, l'anomalia (2.55) è un risultato esatto che quindi non riceve ulteriori correzioni dinamiche. Inoltre la carica trasportata dal processo adiabatico di Laughlin è dato dall'integrale spazio-temporale dell'anomalia,

$$\Delta Q = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{2\pi} d\theta R \left(\partial_t + \frac{v}{R} \partial_\theta \right) \hat{\rho}_R = \frac{e}{2\pi} \int dt d\theta E = e. \quad (2.57)$$

Nella teoria dei campi (1 + 1)-dimensionale, la quantità integrale si può riscrivere nella forma:

$$\frac{e}{2\pi} \int_{\mathcal{M}} d^2x \mathcal{F} = en, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.58)$$

che risulta definire una grandezza invariante topologica, detta prima classe di Chern [15], con \mathcal{F} campo magnetico in (1 + 1) dimensioni (ovvero campo elettrico in (2 + 1)

dimensioni). La quantità integrale (2.58) assume solamente valori interi quando la superficie d'integrazione \mathcal{M} è compatta. Nel nostro caso possiamo assumere che il tempo sia compattificato ottenendo la superficie di un toro bidimensionale.

Il fatto che la conducibilità Hall sia associata ad un invariante topologico ne assicura l'indipendenza dalle variazioni locali del campo elettromagnetico, nonché dalla presenza di una metrica bidimensionale non banale. Quest'ultima può modellare sia l'effetto delle impurezze discusso precedentemente, sia le deformazioni meccaniche e termiche al sistema, come discuteremo nei prossimi capitoli. Abbiamo quindi formulato un altro argomento per la robustezza della conducibilità Hall nell'ambito della teoria dei campi effettiva del bordo, che la rende indipendente dalle proprietà a grande energia, o piccole distanze, del sistema.

Osserviamo che esiste un'altra scrittura della conducibilità dovuta a Thouless e collaboratori [16] [17] come l'invariante topologico della fase di Berry del sistema quantistico originale, che non necessita il limite della teoria al bordo. La formulazione in teoria dei campi qui presentata è quella adatta per la discussione delle teorie effettive nei prossimi capitoli.

Notiamo infine che la relazione fra anomalia ed invarianti topologici è ben studiata in teoria dei campi e in fisica matematica, dove l'espressione integrale (2.58) è detta teorema dell'indice dell'operatore di Dirac bidimensionale [18] [15].

2.3 Effetto Hall quantistico frazionario

Nella discussione precedente abbiamo utilizzato il modello di fermioni liberi e il riempimento completo dei livelli per spiegare l'effetto Hall quantistico intero. Per frazioni di riempimento frazionarie la teoria non interagente prevede un'alta degenerazione dei livelli. Pertanto, per spiegare il gap osservato sperimentalmente, ovvero $\sigma_{xx} = 0$, è necessario tener conto anche dell'interazione coulombiana tra gli elettroni. Tale fenomeno non può essere descritto come perturbazione degli stati degeneri e quindi è un effetto non perturbativo. Al momento non esiste una teoria microscopica del fenomeno e quindi si utilizzano dei modelli effettivi che sono formulati a vari livelli.

2.3.1 Funzione d'onda di Laughlin

Cominciamo col descrivere la teoria della funzione d'onda effettiva di Laughlin [19] che storicamente ha determinato il quadro concettuale per tutti gli approcci teorici successivi dell'effetto Hall quantistico frazionario e di fatto ha introdotto un nuovo

stato della materia. Questa funzione d'onda descrive il *plateau* con $\nu = 1/p$, con p dispari. In analogia col caso $\nu = 1$, assumiamo che gli elettroni formino un fluido quantistico incompressibile: supponiamo l'esistenza di un gap tra lo stato fondamentale e gli stati eccitati (incompressibilità) ed una densità uniforme nel *bulk* (fluidità).

La funzione d'onda proposta da Laughlin ha la forma:

$$\Psi_{1/p}(\{z_i\}, \{\bar{z}_i\}) = \prod_{i < j}^N (z_i - z_j)^p \exp\left(-\sum_{i=1}^N \frac{|z_i|^2}{2\ell_B^2}\right). \quad (2.59)$$

Notiamo l'antisimmetria per scambio di due elettroni $z_i \rightarrow z_j$, grazie alla parità di p . Inoltre la funzione presenta nel pre-fattore uno zero di ordine p quando due elettroni tendono a coincidere nella stessa posizione, che riproduce l'effetto dell'interazione coulombiana a corte distanze. Infatti l'analisi numerica dello spettro mostra che l'ansatz (2.59) è molto accurato in presenza del potenziale coulombiano ed anche altre interazioni repulsive.

Per comprendere le proprietà fisiche dello stato di Laughlin, lo si associa al problema di un plasma di cariche classiche bidimensionale. Infatti si può interpretare la densità di probabilità $|\Psi_{1/p}|^2$ come peso di Boltzmann,

$$|\Psi_{1/p}|^2(\{z_i\}, \{\bar{z}_i\}) = e^{-\beta V(\{z_i\}, \{\bar{z}_i\})}, \quad (2.60)$$

del seguente potenziale:

$$V(\{z_i\}, \{\bar{z}_i\}) = -2p^2 \sum_{i < k}^N \ln |z_i - z_k| + \frac{p}{\ell_B^2} \sum_{i=1}^N |z_i|^2, \quad (2.61)$$

dove abbiamo definito la temperatura fittizia $\beta = 1/p$.

Tale potenziale descrive un plasma di N particelle con carica p . L'interazione coulombiana in due dimensioni ha l'atteso andamento logaritmico, soluzione dell'equazione di Poisson bidimensionale. Inoltre le particelle sono attratte verso l'origine da un background uniforme di carica con densità:

$$\bar{\rho} = -\nabla^2 \pi |z|^2 / (4\pi \ell_B^2) = -1/\pi \ell_B^2. \quad (2.62)$$

Per minimizzare l'energia, il plasma tende a neutralizzare la carica di background costante. Ci aspettiamo quindi il seguente risultato per la densità elettronica:

$$\rho(z_1) = \frac{\int dz_2 \dots dz_N |\Psi_{1/p}(\{z_i\}, \{\bar{z}_i\})|^2}{\int dz_1 \dots dz_N |\Psi_{1/p}(\{z_i\}, \{\bar{z}_i\})|^2} = \frac{1}{p\pi \ell_B^2}, \quad (2.63)$$

ovvero che il plasma si trovi nella fase liquida. Chiamando A l'area del campione, si trova,

$$\frac{1}{p} = \rho\pi\ell_B^2 = \rho\frac{2\pi}{eB} = N\frac{\Phi_0}{AB} = \frac{N}{N_\phi}, \quad (2.64)$$

ovvero la filling fraction vale, come volevamo, $1/p$. Inoltre, per via della neutralità, la densità è uniforme al valore di $\rho = 1/p\pi\ell_B^2$.

Tuttavia la (2.63) è valida solamente se l'interazione coulombiana è schermata dinamicamente (*Debye Screening*) su scale $\mathcal{O}(\ell_B)$. Analisi numeriche ed argomenti analitici mostrano che il plasma è un liquido su scale $\mathcal{O}(\ell_B)$ per tutti i valori $p \lesssim 70$, ben oltre il regime d'interesse per l'effetto Hall, $p \lesssim 9$ [6]. Nel regime di bassa densità, $p > 70$, il plasma invece forma il più noto reticolo esagonale di Wigner dove l'interazione coulombiana non è schermata e il gap si annulla. In conclusione, lo stato di Laughlin realizza un fluido quantistico analogamente al caso $\nu = 1$; il fluido è anche incompressibile, perché le eccitazioni hanno un gap finito come discuteremo nel prossimo paragrafo.

2.3.2 Carica e statistica frazionaria

Un'eccitazione del liquido incompressibile di Laughlin corrisponde a un vortice che modifica localmente il profilo di densità. Il vortice più piccolo, detto quasi-buca, situato nel punto ξ , è descritto secondo la teoria di Laughlin dalla funzione d'onda:

$$\Psi_{hole}(\xi, \{z_i\}, \{\bar{z}_i\}) = \prod_{k=0}^N (z_k - \xi) \Psi_{1/p}(\{z_i\}, \{\bar{z}_i\}). \quad (2.65)$$

Notiamo che sovrapponendo p quasi-buche si ottiene la funzione d'onda di $N + 1$ elettroni, che descrive una buca rispetto al sistema degli N elettroni originali. La quasi-buca ha un'importante proprietà: porta una carica frazionaria $e^* = e/p$. Infatti, applicando l'analogia del plasma bidimensionale, la densità elettronica (2.60) diventa:

$$|\Psi_{hole}|^2(\xi, \{z_i\}, \{\bar{z}_i\}) = \exp\left(-\beta\left(V(\{z_i\}, \{\bar{z}_i\}) - 2p\sum_{k=1}^N \ln|z_k - \xi|\right)\right). \quad (2.66)$$

Osserviamo che, oltre al potenziale $V(\{z_i\}, \{\bar{z}_i\})$, le particelle del plasma risentono della repulsione $-2p\ln|z - \xi|$ dovuta alla presenza di una carica unitaria nel plasma in posizione ξ . Come un elettrone corrisponde, nel plasma, a una particella di carica $-p$, così una carica unitaria corrisponde a un'eccitazione elettronica di carica e/p del fluido incompressibile. La fisica del plasma determina inoltre che l'eccitazione di quasi-buca ha un gap finito, corrispondente alla self-energia coulombiana della carica non schermata di una buca di dimensione ℓ_B , ovvero $\Delta \sim e^2/(p^2\ell_B)$.

La funzione d'onda dello stato con due vortici nelle posizioni ξ_1 e ξ_2 è data da:

$$\Psi_{2;holes}(\xi_1, \xi_2, \{z_i\}, \{\bar{z}_i\}) = (\xi_1 - \xi_2)^{1/p} \prod_{i=1}^N (z_i - \xi_1)(z_i - \xi_2) \Psi_{1/p}(\{z_i\}, \{\bar{z}_i\}). \quad (2.67)$$

In questa espressione compare anche il prefattore $(\xi_1 - \xi_2)^{1/p}$ che è necessario per mantenere la neutralità del plasma equivalente, come si può intuire generalizzando la (2.66). Questo prefattore complesso implica un'altra interessante proprietà delle eccitazioni del fluido di Laughlin. Infatti, scambiando la posizione dei due vortici, ovvero effettuando la rotazione nel piano complesso $(\xi_1 - \xi_2) \rightarrow (\xi_1 - \xi_2) e^{i\pi}$, la funzione d'onda acquista la fase:

$$\Psi_{2holes}(\xi_2, \xi_1, \{z_i\}, \{\bar{z}_i\}) = e^{i\pi/p} \Psi_{2holes}(\xi_1, \xi_2, \{z_i\}, \{\bar{z}_i\}). \quad (2.68)$$

Questa trasformazione definisce la statistica quantistica dei vortici, che è frazionaria, ovvero diversa dal segno ± 1 bosonico e fermionico. La possibilità di avere statistiche diverse da quelle bosoniche e fermioniche in due dimensioni è stata proposta per la prima volta nel 1977 da Leinaas e Myrheim [20]. Per tali particelle Wilczek propose il termine di anioni (*anyons*) [21].

2.3.3 Stati gerarchici di Jain

La serie di valori $\nu = n/(qn + 1)$, con q pari e $n = 1, 2, \dots$, descrive un'ulteriore insieme di plateaux stabili dell'effetto Hall quantistico osservati sperimentalmente. Una teoria fenomenologica di questi sistemi è data dalla teoria dei fermioni composti di Jain [22]. Ricordiamo che $1/\nu = N_\phi/N$ determina il numero di flussi per elettroni. Nello stato di Laughlin $1/p = q + 1$, ogni elettrone ha associato $(q + 1)$ flussi. Se immaginiamo di "legare" q flussi all'elettrone, lo stato risultante, detto fermione composto, sarà immerso nel campo magnetico rimanente $B^* = B - q\Phi_0\rho$ pari ad un flusso per particella, ovvero si troverà in uno stato Hall intero, $\nu^* = 1$.

Analogamente i fermioni composti che riempiono n livelli di Landau effettivi, $\nu^* = n$, corrispondono a elettroni nello stato

$$\frac{1}{\nu} = q + \frac{1}{n}, \quad (2.69)$$

ovvero negli stati frazionari osservati sperimentalmente. Si stabilisce quindi una corrispondenza fra l'effetto Hall intero e frazionario

$$\frac{1}{\nu^*} = \frac{1}{n} \leftrightarrow \frac{1}{\nu} = \frac{1}{n} + q \quad (2.70)$$

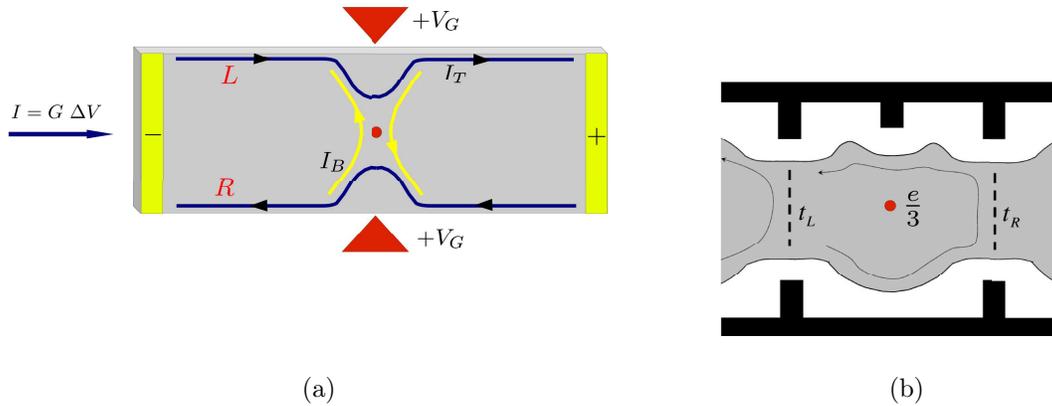


Figura 2.8: (a): set up dell'apparato sperimentale per la misura della carica frazionaria. Il fluido è compresso in un punto da un potenziale V_G permettendo così l'effetto tunnel tra i due bordi chirali. (b): l'interferometro di Fabry-Perot adattato per la misura della statistica frazionaria. Attraverso l'introduzione di due costrizioni R e L gli stati di bordo, mediante tunnelling, possono avvolgersi intorno alle eccitazioni di vortici presenti nel fluido Hall.

che si può formulare a livello delle funzioni d'onda sia per lo stato fondamentale che per le eccitazioni. Si ottengono così degli ansatz in notevole accordo con le simulazioni numeriche. Un'ipotesi implicita di questo approccio è che l'elettrone composto sia debolmente interagente perché analogo all'elettrone libero nell'effetto Hall intero. L'esistenza di eccitazioni debolmente interagenti accoppiate al campo ridotto B^* è confermata da molti esperimenti.

2.4 Misure della carica e della statistica frazionaria

Concludiamo questo capitolo con un breve cenno agli esperimenti effettuati per verificare l'esistenza di quasi-particelle di carica [23] [24] e statistica frazionaria [25], nel FQHE.

2.4.1 Shot noise e carica frazionaria

Per determinare la carica frazionaria sono stati fatti esperimenti di tunnelling in cui si fanno interagire gli stati di bordo. Poiché gli stati sono chirali su un bordo e anti-chirali sull'altro, e pertanto non interagenti, un modo per farli interagire è quello di introdurre

un'interazione puntuale realizzando una costrizione in un punto del fluido Hall, come si vede in Fig.2.8(a). Si crea così la possibilità di osservare un effetto tunnel tra i due bordi che può essere rappresentato da un termine reale nell'halmiltoniana al punto di contatto.

Le basse temperature rendono il rumore termico delle correnti trascurabile rispetto al rumore quantistico dovuto alla discretizzazione dei portatori di carica. Questo processo, detto *Shot Noise*, è descritto da una statistica poissoniana per eventi indipendenti nel limite di debole interazione e quindi di piccola corrente di backscattering I_B . In questa statistica, la varianza del numero di particelle è proporzionale al valore medio. Di conseguenza la fluttuazione quadratica S_I della corrente I_B è legata alla corrente I dalla seguente relazione:

$$S_I = \langle |\delta I_B|^2 \rangle = e^* I, \quad (2.71)$$

dove e^* è la carica delle particelle coinvolte nelle correnti I_B . Inoltre, in caso di costrizione debole, il contributo maggiore al tunneling è dovuto alle eccitazioni con la carica minore. Pertanto in tal modo si è potuto verificare sperimentalmente che la carica minima per un'eccitazione al bordo, uguale a quella nel bulk, è frazionaria e pari a $e^* = e/p$ [26].

2.4.2 Interferometro di Fabry-Perot e statistica frazionaria

Come abbiamo visto nella sezione precedente, la pittura di Laughlin per il FQHE rivela la presenza di eccitazioni con statistica frazionaria. Per poter misurare tale proprietà è necessario valutare la fase acquistata dalla funzione d'onda scambiando la posizione di due eccitazioni, ovvero ruotando una di queste intorno all'altra. L'apparato sperimentale, detto interferometro di Fabry-Perot, è mostrato in Fig. 2.8(b).

Si introducono due restrizioni R e L in corrispondenza delle quali le eccitazioni hanno coefficiente di trasmissione, dovuta all'effetto tunnel, rispettivamente t_L e t_R . L'indicazione necessaria alla verifica della statistica frazionaria viene dalla misura della conduttività σ_{yy} , tra il bordo inferiore e quello superiore nel lato sinistro. Esistono infatti due percorsi possibili per i portatori di carica: il passaggio diretto lungo la costrizione L, oppure il circuito intorno alla regione centrale avvolgendo N_{qp} eccitazioni. I due percorsi creano un termine d'interferenza in σ_{yy} :

$$\sigma_{yy} \propto |t_R|^2 + |t_L|^2 + 2|t_L * t_R|^2 \cos \left[(2\pi\nu) \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} - N_{qp} \right) \right]. \quad (2.72)$$

Il primo termine nel coseno rappresenta la fase di Aharonov-Bohm dovuta alla presenza del campo magnetico esterno B , mentre il secondo termine rappresenta il contributo della fase statistica per l'avvolgimento intorno a N_{qp} anioni. Perciò la carica frazionaria può essere misurata modulando σ_{yy} in funzione di Φ , mentre la statistica frazionaria, può essere misurata aggiungendo un'eccitazione nel bulk e ripetendo la misura. Le prime verifiche sperimentali di questo importantissimo fenomeno sono state presentate in [27], ma non esiste una conferma definitiva della loro validità.

Capitolo 3

Teorie di campo effettive

Nello studio dell'effetto Hall quantistico, l'azione effettiva a bassa energia è molto utile per descrivere e parametrizzare gli effetti fisici, associati alle proprietà universali. Nel capitolo precedente abbiamo visto come il fluido incompressibile Hall possiede eccitazioni di bassa energia $\mathcal{O}(1/R)$ che vivono al bordo del sistema, ovvero in $(1 + 1)$ dimensioni spazio-temporali. Queste eccitazioni sono chirali a massa nulla e possiedono naturalmente la simmetria conforme che assicura l'universalità delle quantità osservabili.

In questo capitolo mostreremo che la teoria di campo conforme in $(1 + 1)$ dimensioni è strettamente legata alla teoria di gauge di Chern-Simons per l'intero sistema in $(2 + 1)$ dimensioni [28]. Vedremo come questa teoria descrive sia le eccitazioni chirali sul bordo, sia le proprietà statiche delle eccitazioni nel bulk.

3.1 Teoria di Chern-Simons

3.1.1 Azione idrodinamica e FQHE

L'azione effettiva a basse energie in teoria dei campi si ottiene dallo sviluppo in polinomi dei campi con un numero crescente di derivate. Nel caso dell'effetto Hall, l'usuale teoria scalare del parametro d'ordine di Ginzburg-Landau non si applica ed è necessario introdurre un'azione con simmetria di gauge.

Consideriamo lo sviluppo in derivate del campo di background A_μ : notiamo che in $(2 + 1)$ dimensioni, esiste un'azione lineare nelle derivate, detta di Chern-Simons, che è più rilevante dell'usuale termine di Yang Mills con due derivate. La sua espressione

è:

$$S_{CS} [A] = \frac{k}{4\pi} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho \quad , \quad \epsilon^{012} = 1. \quad (3.1)$$

Questa azione è Lorentz invariante ed inoltre gauge invariante a meno di termini di superficie discussi in seguito; non è invariante per trasformazioni di parità P e d'inversione temporale T , in accordo con la presenza del campo magnetico esterno.

Mostriamo adesso che la teoria di Chern-Simons descrive effetti globali e topologici, ovvero invarianti per deformazioni continue dei parametri. Introducendo la 1-forma $A = A_\mu dx^\mu$, l'azione (3.1) può essere scritta su una qualsiasi varietà \mathcal{M} senza specificare la metrica:

$$S_{CS} [A] = \frac{k}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} AdA, \quad (3.2)$$

con dA la derivata esterna di A . L'invarianza per riparametrizzazioni delle coordinate implica che l'hamiltoniana corrispondente è nulla, e quindi la teoria non descrive gradi di libertà propaganti in $(2 + 1)$ dimensioni.

Innanzitutto mostriamo come si ottiene la corrente Hall dalla (3.1). Definiamo la corrente indotta dalla variazione del campo elettromagnetico A_μ , che comprende il campo B costante ed una fluttuazione come nell'argomento di Laughlin al paragrafo 2.2.2. È immediato trovare i risultati:

$$J^i = \frac{\delta S_{CS} [A]}{\delta A^i} = \frac{k}{2\pi} \epsilon^{ij} E^j = \nu \frac{e^2}{2\pi} \epsilon^{ij} E^j, \quad (3.3)$$

$$J_0 = e\rho_0 = \frac{\delta S_{CS} [A]}{\delta A_0} = \nu \frac{e^2}{2\pi} B. \quad (3.4)$$

che corrispondono per $k = \nu e^2$ alla corrente Hall e alla densità costante del fluido incompressibile, (nel seguito sceglieremo $e = 1$).

L'azione effettiva (3.1) non è una descrizione completa degli stati Hall ed è necessario considerare un nuovo campo di gauge che descrive le fluttuazioni del fluido Hall. Introduciamo la corrente di materia j_μ che è conservata e quindi può essere espressa in termini di un campo di gauge abeliano a_μ , detto idrodinamico [29], nel seguente modo:

$$j^\mu = \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu a_\rho. \quad (3.5)$$

In questa espressione la conservazione della corrente e l'invarianza di gauge di a_μ sono manifeste. Ad energie inferiori al gap del bulk, il fluido incompressibile di Laughlin non presenta eccitazioni dinamiche, ma solo le fasi statistiche fra vortici statici. Introduciamo quindi per il campo idrodinamico a_μ ancora una dinamica di Chern-Simons, ottenendo l'azione effettiva:

$$S_{eff} [a, A] = \int d^3x \left(-\frac{p}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu a_\rho + j^\mu A_\mu + \rho_0 A_0 \right). \quad (3.6)$$

In questa espressione abbiamo accoppiato la corrente di materia (3.5) al campo esterno A_μ , distinguendo la fluttuazione dal background costante B . Per semplicità di scrittura utilizziamo il formalismo delle forme differenziali nella (3.6):

$$S_{eff}[a, A] = \int \left(-\frac{p}{4\pi} ada + \frac{1}{2\pi} Ada \right) + \int d^3x \rho_0 A_0. \quad (3.7)$$

Poiché l'azione è quadratica, l'integrale funzionale sul campo idrodinamico a_μ si calcola sostituendo le equazioni del moto nella (3.7), ottenendo l'azione indotta del campo esterno A_μ precedentemente discussa:

$$S_{ind}[A] = \frac{1}{4\pi p} \int AdA + \frac{1}{2\pi p} \int d^3x A_0 \rho_0, \quad (3.8)$$

da cui discendono la densità di carica e di corrente Hall (3.3-3.4).

La formulazione (3.7) è quindi propriamente l'azione effettiva degli stati di Laughlin con $\nu = 1/p$, con p intero dispari. L'integralità del parametro p , detto *livello*, può essere dimostrata dalla richiesta che l'azione (3.7) sia ben definita su varietà \mathcal{M} compatte [30] [31].

Vediamo adesso come la teoria di Chern-Simons riproduca eccitazioni con carica e statistica frazionaria, in accordo alla teoria di Laughlin. Introduciamo una sorgente statica nel punto \mathbf{x}_0 di carica q rispetto al campo idrodinamico a_μ [32],

$$S_{eff}[a, A] = \int d^3x \left(-\frac{p}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu a_\rho + j^\mu A_\mu + \rho_0 A_0 + qa_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right). \quad (3.9)$$

L'equazione del moto, derivata dalla variazione rispetto ad a_0 , determina la densità:

$$j^0 = \frac{B}{2\pi p} + \frac{q}{p} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (3.10)$$

Il primo termine coincide con la densità dello stato fondamentale, mentre il secondo corrisponde all'effetto dell'eccitazione introdotta nel fluido incompressibile. La (3.10) mostra come questa abbia carica frazionaria $-q/p$. Inoltre, studiando le rimanenti equazioni del moto, si vede come l'eccitazione porti q/p unità di flusso del campo a_μ . Di conseguenza la fase di Aharanov-Bohm di un'altra carica q_1 trasportata lungo un contorno che avvolge q risulta essere:

$$e^{i\Delta\theta}, \quad \Delta\theta = 2\pi \times \frac{q}{p} \times q_1. \quad (3.11)$$

Questa fase è topologica nel senso che non dipende dalla forma del contorno, ma solo dal fatto che sia concatenato al punto \mathbf{x}_0 . Nel caso di eccitazioni identiche $q_1 = q$, il

loro scambio determina la fase statistica:

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{p}q^2. \quad (3.12)$$

Per analizzare questi risultati consideriamo prima il caso di elettroni corrispondenti ad eccitazioni di carica p rispetto al campo idrodinamico a_μ ; la loro fase statistica (3.12) $\Delta\theta = \pi p$ risulta effettivamente fermionica per p dispari. Inoltre, se avvolgiamo un elettrone intorno ad un'eccitazione del fluido di carica q , questo acquista una fase (3.11) $\Delta\theta = 2\pi q$. Pertanto la regolarità della funzione d'onda fermionica impone che $q \in \mathbb{Z}$. Ne segue che le eccitazioni di carica minima $q = \pm 1$ corrispondono alla carica frazionaria $\pm e/p$ del fluido elettronico ed alla statistica frazionaria $\Delta\theta = \pi/p$. Abbiamo mostrato che la teoria di Chern-Simons descrive eccitazioni di carica e statistica frazionarie in accordo con il risultato della teoria di Laughlin.

Come abbiamo accennato nel capitolo 2, l'effetto Hall frazionario si osserva anche ai valori $\nu = m/(qm \pm 1)$, con q pari, corrispondenti agli stati gerarchici di Jain. Per descrivere questi stati, si generalizza l'azione di Chern-Simons (3.7) a campi con m componenti [33] [32]. Si introduce il vettore di campi idrodinamici $a_{I\mu}$, con $I = 1, \dots, m$, accoppiati tra loro con una matrice simmetrica K_{IJ} a valori interi tramite l'azione di Chern-Simons. Tali campi idrodinamici sono carichi, con carica t_I , rispetto al campo elettromagnetico esterno e interagenti fra loro. Le eccitazioni nel bulk con carica l_I sono descritte inserendo nell'azione una sorgente esterna $j_{I\mu}$. Generalizzando la (3.9), l'azione effettiva si scrive:

$$S_{eff} = \int \left(-\frac{1}{4\pi} K_{IJ} a_I da_J + t_I A da_I \right) + \int d^3x l_I a_{I\mu} j_{I\mu}. \quad (3.13)$$

Si può mostrare [32] che in questa teoria, la filling fraction, la carica frazionaria e la fase statistica delle eccitazioni sono date rispettivamente dalle formule:

$$\nu = \sum_{I,J}^m t_I K_{IJ}^{-1} t_J, \quad q = \sum_{I,J}^m t_I K_{IJ}^{-1} l_J, \quad \Delta\theta = \pi \sum_{IJ}^m l_I K_{IJ}^{-1} l_J. \quad (3.14)$$

Lo stato di Laughlin è ovviamente riprodotto considerando un solo campo e prendendo $t = 1$ e $K = 1 + q = p$; le serie di Jain si ottengono con m campi identici assumendo la forma $K_{IJ} = \pm \delta_{IJ} + q C_{IJ}$, con $C_{IJ} = 1$, $t_I = 1 \forall I, J = 1, \dots, m$. Questa formulazione con m campi indipendenti è in accordo con la teoria di Jain per la funzione d'onda che è basata sulla corrispondenza fra gli stati con $\nu = m/(mq \pm 1)$ e l'effetto Hall intero $\nu^* = m$ (vedi paragrafo 2.3.3).

3.1.2 Corrispondenza bulk-boundary

Nel capitolo precedente abbiamo discusso come la corrente Hall compensi la non conservazione della carica al bordo (*anomaly inflow*), e corrisponda dunque ad un trasferimento di carica da un bordo all'altro. Complessivamente, considerando l'intero sistema $(2 + 1)$ -dimensionale, la carica è conservata. Ci aspettiamo dunque che nella teoria effettiva la simmetria di gauge valga per l'intera geometria di bulk e bordo.

In effetti, la teoria di Chern-Simons non è invariante di gauge in presenza di un bordo. La variazione dell'azione (3.6) (per $A_\mu = 0$) per $a_\mu \rightarrow a_\mu + \partial_\mu \alpha$ produce una derivata totale. Nella geometria spazio-temporale formata da un disco spaziale \mathcal{D} di raggio R e dalla coordinata temporale t , integrando la quadridivergenza con il teorema di Stokes, otteniamo:

$$S_{eff} \rightarrow S_{eff} - \frac{p}{4\pi} \int_{S^1 \times \mathbb{R}} dt dx \alpha (\partial_t a_x - \partial_x a_t), \quad (3.15)$$

dove $x = R\theta$ è la coordinata che definisce i punti della circonferenza S^1 , bordo del disco \mathcal{D} , mentre a_x è la componente del campo di gauge lungo questa coordinata. Un modo per annullare il termine di bordo potrebbe essere quello di prendere $\alpha|_{S^1 \times \mathbb{R}} = 0$. Tuttavia in tal caso ignoreremmo completamente la fisica delle eccitazioni al bordo. Dobbiamo quindi introdurre dei gradi di libertà di bordo e una corrispondente azione, la cui variazione di gauge compensi la (3.15) [34].

Questa azione di bordo può essere derivata col seguente argomento [30] [32]. Notiamo innanzitutto che una scelta di gauge al bordo è necessaria per rompere l'invarianza per diffeomorfismi delle coordinate e ottenere una hamiltoniana non nulla. La seguente condizione di gauge, su $S^1 \times \mathbb{R}$,

$$a_t - v a_x = 0, \quad (3.16)$$

è in accordo con la chiralità delle eccitazioni, con la velocità v parametro aggiuntivo. Passiamo dalle coordinate (t, x, r) , con r coordinata radiale del disco \mathcal{D} , alle coordinate (t', x', r') ,

$$t' = t, \quad x' = x + vt, \quad r' = r, \quad (3.17)$$

il campo di gauge si trasforma nel seguente modo:

$$a'_{t'} = a_t - v a_x, \quad a'_{x'} = a_x, \quad a'_{r'} = a_r. \quad (3.18)$$

Perciò la scelta di gauge (3.16) diventa, nella nuova base,

$$a'_{t'} = 0. \quad (3.19)$$

Poiché l'azione di Chern-Simons è topologica, le equazioni di moto del sistema non cambiano in forma nelle nuove coordinate. Valutando la variazione dell'azione rispetto al moltiplicatore di Lagrange $a'_{r'}$, si ricava il vincolo:

$$\partial_{x'} a_{r'} - \partial_{r'} a_{x'} = 0. \quad (3.20)$$

Soluzioni di questa equazione sono

$$a'_{x'} = \partial_{x'} \varphi, \quad a'_{r'} = \partial_{r'} \varphi. \quad (3.21)$$

Notiamo come queste soluzioni siano gradi di libertà di puro gauge nel bulk. D'altra parte vedremo che questi diventano dinamici al bordo. Inserendo le soluzioni (3.21) nell'azione di Chern-Simons, posto $a'_{r'} = 0$, si ottiene l'azione:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{p}{4\pi} \int_{\mathcal{D} \times \mathbb{R}} d^3 x' \epsilon^{i'j'} a'_{i'} \partial_{t'} a'_{j'} \\ &= -\frac{p}{4\pi} \int d^3 x' (\partial_{x'} \varphi \partial_{t'} \partial_{r'} \varphi - \partial_{r'} \varphi \partial_{t'} \partial_{x'} \varphi) \\ &= -\frac{p}{4\pi} \int_{S^1 \times \mathbb{R}} dx' dt' \partial_{t'} \varphi \partial_{x'} \varphi. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Tornando alle vecchie coordinate (t, x, r) otteniamo la seguente azione di bordo,

$$S_b = -\frac{p}{4\pi} \int_{S^1 \times \mathbb{R}} dx dt (\partial_t \varphi \partial_x \varphi - v (\partial_x \varphi)^2), \quad (3.23)$$

che descrive la propagazione di un campo chirale scalare in $(1+1)$ dimensioni. Infatti le equazioni di moto per il campo $\rho = \partial_x \varphi$ diventano:

$$\partial_t \rho - v \partial_x \rho = 0. \quad (3.24)$$

L'azione (3.23) può essere anche derivata direttamente da argomenti fenomenologici [35].

In conclusione l'intero sistema di bulk e bordo è descritto dall'azione:

$$S_{eff} + S_b = -\frac{p}{4\pi} \int_{\mathcal{D} \times \mathbb{R}} ada - \frac{p}{4\pi} \int_{S^1 \times \mathbb{R}} dx dt \partial_x \varphi (\partial_t - v \partial_x) \varphi. \quad (3.25)$$

Si verifica infine che il termine (3.15) prodotto dalla trasformazione di gauge di bulk $a_\mu \rightarrow a_\mu + \partial_\mu \alpha$ si cancella con la variazione di S_b per $\varphi \rightarrow \varphi + \alpha$, utilizzando il legame (3.16) tra i campi a e φ al bordo, ovvero $\partial_x \varphi = a_x = a_t/v$.

3.1.3 Bosone chirale

Come abbiamo visto nel capitolo precedente, la teoria conforme che descrive gli stati di bordo dell'effetto Hall quantistico per $\nu = 1$ è quella di un fermione di Weyl libero in $(1 + 1)$ dimensioni. Nel caso frazionario $\nu < 1$ ci aspettiamo che il fermione di Weyl acquisti un'interazione. D'altra parte la relazione *bulk-boundary* del paragrafo precedente ci ha fornito il bosone chirale come teoria effettiva degli stati di Laughlin. La relazione fra le teorie fermionica e bosonica è la ben nota bosonizzazione in $(1 + 1)$ dimensioni, una mappa esatta fra le teorie conformi corrispondenti [36].

Descriviamo adesso la quantizzazione canonica del bosone chirale [9]. Introduciamo le condizioni al contorno,

$$\varphi(2\pi, t) - \varphi(0, t) = -2\pi\alpha_0. \quad (3.26)$$

La soluzione dell'equazione del moto dell'azione (3.23),

$$\left(\partial_t - \frac{v}{R}\partial_\theta\right)\partial_\theta\varphi = 0, \quad (3.27)$$

ha in generale la seguente forma:

$$\varphi(\theta, t) = f(\theta - vt) + g(t), \quad (3.28)$$

dove abbiamo riscritto $t \rightarrow Rt$. La funzione $g(t)$ rappresenta il grado di libertà di gauge dovuto all'invarianza dell'azione (3.23) sotto la trasformazione $\varphi \rightarrow \varphi + \alpha(t)$. Scegliendo la condizione $(\partial_t - v\partial_x)\varphi = 0$ si ottiene $g(t) = 0$. In questa gauge la soluzione più generale che soddisfa le condizioni (3.26) è:

$$\varphi(\theta - vt) = \varphi_0 - \alpha_0(\theta - vt) + i \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n} e^{in(\theta - vt)}, \quad \alpha_n^* = \alpha_{-n}. \quad (3.29)$$

Quantizziamo la teoria imponendo le regole di commutazione [35],

$$[\varphi(\theta, t), \varphi(\theta', t)] = i \frac{\pi}{2p} \varepsilon(\theta - \theta'), \quad (3.30)$$

dove $\varepsilon(x) = \pm 1$ per $x \gtrless 0$. Queste relazioni sono scelte in modo che l'equazione di Heisenberg riproduca correttamente le equazioni del moto (3.24). Sostituendo lo sviluppo (3.29) si ottengono le relazioni di commutazione per le componenti del campo,

$$[\alpha_0, \varphi_0] = \frac{1}{ip}, \quad (3.31)$$

$$[\alpha_n, \alpha_m] = \frac{n}{p} \delta_{n+m, 0}, \quad (3.32)$$

mentre lo spazio di Fock è definito da:

$$\alpha_n |\Omega\rangle = 0, \quad n > 0. \quad (3.33)$$

Completiamo l'analogia con il fermione di Weyl costruendo l'intera algebra delle correnti (2.46). Il primo passo è ricavare l'hamiltoniana dell'azione (3.23) e quindi l'operatore L_0 ; si ottiene (poniamo $v = 1$ nel seguito):

$$H = \frac{p}{4\pi R} \int_0^{2\pi} d\theta (\partial_\theta \varphi)^2 = \frac{1}{R} \left(\frac{p}{2} \alpha_0^2 + p \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \alpha_n \right) = \frac{1}{R} L_0, \quad (3.34)$$

mentre gli altri generatori di Virasoro sono definiti dai momenti dell'hamiltoniana,

$$L_n = \frac{p}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta (\partial_\theta \varphi)^2 e^{-in(\theta-vt)} = \frac{p}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_{n-l} \alpha_l. \quad (3.35)$$

Utilizzando le regole di commutazione (3.31) e (3.32) si ottiene l'algebra delle correnti con $c = 1$,

$$[\alpha_n, \alpha_m] = \frac{n}{p} \delta_{n+m,0}, \quad (3.36)$$

$$[L_n, \alpha_m] = -m \alpha_{n+m}, \quad (3.37)$$

$$[L_n, L_m] = (n-m) L_{n+m} + \frac{1}{12} (n^3 - n) \delta_{n+m,0}, \quad (3.38)$$

che è la stessa del caso fermionico con l'identificazione $\alpha_n = \rho_n$. In particolare la carica totale ρ_0 è rappresentata nella teoria bosonica da α_0 .

Supponiamo adesso che il campo bosonico sia compattificato:

$$\varphi(\theta, t) \equiv \varphi(\theta, t) + \frac{2\pi}{p}, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (3.39)$$

Le condizioni (3.26) implicano che $\varphi(\theta)$ è una mappa non banale del cerchio in sé stesso. È necessaria la quantizzazione di α_0 ,

$$\alpha_0 = \frac{n}{p}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.40)$$

Per la (3.31) il momento coniugato a α_0 è $p\varphi_0$, quindi φ_0 è una variabile angolare che vive nell'intervallo $[0, 2\pi]$ in accordo ancora con la (3.39) per p intero. Lo spettro dell'operatore L_0 risulta quindi dato dai valori,

$$h_n = \frac{p\alpha_0^2}{2} = \frac{n^2}{2p}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.41)$$

mentre le cariche e la filling fraction sono:

$$q_n = \alpha_0 = \frac{n}{p}, \quad \nu = \frac{1}{p}. \quad (3.42)$$

Riassumendo la teoria bosonica chirale realizza tutte le possibili rappresentazioni dell'algebra delle correnti con $c = 1$ corrispondenti alle teorie fermioniche interagenti del FQHE [37]. Il valore di $\nu = 1/p$ riproduce lo spettro anionico dello stato di Laughlin in accordo con la teoria di Chern-Simons e lo studio dell'anomalia chirale del paragrafo 2.2.6. La teoria del bosone chirale risulta quindi uno strumento molto utile per descrivere le proprietà universali dello stato di Laughlin e calcolare gli osservabili degli esperimenti di conduzione e *tunneling* descritti nella sezione 2.4. Notiamo infine che la teoria bosonica ammette compattificazioni più generali, ma queste non soddisfano le condizioni sullo spettro fermionico dell'effetto Hall [3].

3.2 Teoria effettiva di Wen-Zee

Le proprietà degli stati Hall sono descritte da altri osservabili universali oltre alla conduttività come, ad esempio, il trasporto di calore o la risposta del fluido incompressibile ad uno sforzo meccanico [38] [39] [40]. Tali risposte possono essere descritte attraverso l'accoppiamento ad una metrica spaziale di background. Si ottiene un'estensione della teoria effettiva (3.7) detta teoria di Wen-Zee-Frohlich [41] [42], dalla quale si ricava in particolare la quantità chiamata viscosità Hall [43] [44] che tratteremo nei prossimi paragrafi. Occupiamoci dunque della risposta ad uno sforzo meccanico, introducendo alcune nozioni di base della teoria dell'elasticità [45].

3.2.1 Elementi della teoria dell'elasticità

Nella teoria dell'elasticità si considera la meccanica dei mezzi continui, che si deformano infinitesimalmente sotto l'effetto di forze esterne. Consideriamo un sistema planare ed indichiamo un punto P con $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$; definiamo il vettore spostamento \mathbf{u} di P come:

$$u_i = x'_i - x_i, \quad (3.43)$$

dove \mathbf{x}' indica il nuovo vettore posizione del punto P dopo la deformazione. La conoscenza del campo $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ determina la deformazione del corpo.

Durante una deformazione cambiano le mutue distanze tra i punti del corpo. Consideriamo due punti infinitamente vicini: i dx_i , che indicano la differenza tra le coordinate

dei rispettivi vettori posizione prima che la deformazione avvenga, si trasformano nei $dx'_i = dx_i + du_i$. La distanza tra due punti prima della deformazione,

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2, \quad (3.44)$$

diventa dopo la deformazione,

$$dl'^2 = dx_1'^2 + dx_2'^2 = dl^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_j dx_l, \quad (3.45)$$

dove si è sostituito $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$. L'equazione (3.45) può essere riscritta nella forma

$$dl'^2 = dx_i dx_j (\delta_{ij} + \partial_{(i} u_{j)} + \partial_i u_k \partial_j u_k). \quad (3.46)$$

Trascurando il termine quadratico, notiamo che la deformazione ha la stessa forma dei diffeomorfismi della metrica piatta $g_{ij} = \delta_{ij}$. Di conseguenza la risposta ad uno sforzo meccanico è descrivibile introducendo una metrica spaziale esterna, alla quale si accoppiano i gradi di libertà fisici; nel caso del fluido Hall il campo idrodinamico a_μ . La reazione del fluido sarà descritta dal comportamento della teoria sotto variazioni del tensore metrico. Naturalmente, osserveremo degli effetti fisici che non sono invarianti per diffeomorfismi diversamente dal caso della relatività generale.

3.2.2 Coordinate locali e connessione di spin

Nel formalismo di Cartan della relatività generale, possiamo scegliere una base locale dello spazio tangente \mathcal{T}_P in ogni punto P , definendo un set di vettori ortonormali detti *vielbein* (in due dimensioni *zweibein*) [46] [47].

Consideriamo il caso generico di una metrica spazio-temporale $g_{\mu\nu}$, con $\mu, \nu = 0, 1, 2$, con segnatura $(2, 1)$ e scriviamo la relazione di ortonormalità che definisce i *vielbein*. Abbiamo,

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^A e_\nu^B \eta_{AB}, \quad (3.47)$$

dove $A, B = 0, 1, 2$ sono gli indici del riferimento locale, nel quale rimane la possibilità di effettuare una trasformazione di Lorentz che preserva la metrica η_{AB} . I *vielbein* e_μ^A e i loro inversi E_B^μ soddisfano le relazioni:

$$e_\mu^A E_B^\mu = \delta_B^A, \quad E_A^\mu e_\nu^A = \delta_\nu^\mu. \quad (3.48)$$

In generale è possibile riscrivere le componenti di un tensore nella base locale; ad esempio per un vettore V^μ abbiamo,

$$V^A = e_\mu^A V^\mu. \quad (3.49)$$

La derivata covariante del vettore nella base locale,

$$D_\mu V^A = \partial_\mu V^A + \omega_\mu^A{}_B V^B, \quad (3.50)$$

introduce la *connessione di spin* $\omega_\mu^A{}_B$. Questa può essere espressa in termini dei *vielbein* e delle loro derivate richiedendo le condizioni di torsione nulla e di connessione metrico-compatibile, $D_\nu e_\mu^A = 0$. Il risultato è la seguente espressione:

$$\omega_\mu^{AB}(e) = \frac{1}{2} \left(E^{\nu[A} \partial_{[\mu} e_{\nu]}^{B]} - E^{\nu[A} E^{B]\sigma} e_{C\mu} \partial_\nu e_\sigma^C \right), \quad w_{\mu AB} = -w_{\mu BA}. \quad (3.51)$$

Consideriamo adesso un sistema fisico con dinamica non relativistica ed una metrica solamente spaziale, $g_{ij} = g_{ij}(x^k, t)$, con $i, j, k = 1, 2$, mentre $g_{00} = g_{0j} = 0$ [41]. Le componenti dei *vielbein* e_μ^A di tipo spazio-tempo e tempo-tempo sono nulle e la relazione di ortonormalità (3.47) diventa:

$$g_{ij} = e_i^a e_j^b \delta_{ab}, \quad a, b, i, j = 1, 2. \quad (3.52)$$

Definendo,

$$\omega_\mu^C = \frac{1}{2} \epsilon^{ABC} \omega_{\mu AB}, \quad (3.53)$$

le espressioni (3.51) si specializzano nelle seguenti formule:

$$\omega_\mu^a = 0, \quad a = 1, 2, \quad (3.54)$$

$$\omega_0 \equiv \omega_0^0 = \frac{1}{2} \epsilon^{ab} E^{aj} \partial_0 e_j^b, \quad (3.55)$$

$$\omega_i \equiv \omega_i^0 = \frac{1}{2} \epsilon^{ab} E^{aj} \partial_i e_j^b - \frac{1}{2\sqrt{g}} \epsilon^{jk} \partial_j g_{ki}, \quad g = \det(g_{ij}), \quad (3.56)$$

che ci saranno utili nei prossimi paragrafi. Notiamo che la simmetria di Lorentz locale si riduce alle rotazioni $U(1)$ del piano con connessione abeliana ω_μ .

3.2.3 Azione di Wen-Zee

Consideriamo lo stato di Laughlin $\nu = 1/p$ descritto nell'azione effettiva (3.7) ed accoppiamo il campo idrodinamico ad una metrica spaziale $g_{ij}(\mathbf{x}, t)$. Per costruire l'interazione utilizziamo la forma canonica dell'accoppiamento di un fermione alla gravità. Nel caso di uno spinore relativistico in $(2+1)$ dimensioni abbiamo l'interazione:

$$\omega_\mu^{AB} \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{1}{4} [\gamma_A, \gamma_B] \psi, \quad A, B = 0, 1, 2. \quad (3.57)$$

Osserviamo che nel limite non relativistico (3.54-3.56) la (3.57) si riduce ad un'interazione di corrente abeliana $\sim \omega_\mu^{12} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$. Ciò suggerisce di introdurre nell'azione effettiva idrodinamica (3.7) l'accoppiamento alla metrica come un'ulteriore campo abeliano [48],

$$j^\mu A_\mu \rightarrow j^\mu (A_\mu + \bar{s} \omega_\mu), \quad (3.58)$$

dove \bar{s} è un parametro libero della teoria che misura, come vedremo, il momento angolare intrinseco delle eccitazioni a bassa energia (diverso dallo spin). Otteniamo dunque l'azione:

$$S_{eff}[a, A, g] = \int \left(-\frac{1}{4\pi\nu} a da + \frac{1}{2\pi} (A + \bar{s}\omega) da \right) + \int d^3x \rho_0 A_0, \quad (3.59)$$

dove abbiamo definito la uno-forma $\omega = \omega_\mu dx^\mu$.

Integrando il campo a_μ , ovvero utilizzando le sue equazioni del moto, otteniamo l'azione indotta:

$$S_{ind}[A, g] = \frac{\nu}{4\pi} \int (AdA + 2\bar{s}Ad\omega + \bar{s}^2\omega d\omega) + \frac{\nu}{2\pi} \int d^3x A_0 \rho_0. \quad (3.60)$$

Al primo e all'ultimo termine già visti in (3.8), si aggiungono il secondo termine, detto azione di Wen-Zee S_{WZ} [41], e il terzo termine puramente gravitazionale S_{GRWZ} :

$$S_{WZ} = \frac{\nu\bar{s}}{2\pi} \int Ad\omega, \quad (3.61)$$

$$S_{GRWZ} = \frac{\nu\bar{s}^2}{2\pi} \int \omega d\omega. \quad (3.62)$$

L'azione (3.60) sarà d'interesse centrale per le analisi condotte in questa tesi. La sua correttezza per ν intero è stata verificata integrando i gradi di libertà ad alta energia nella teoria microscopica degli elettroni nei livelli di Landau [49]. L'espressione (3.60) è invariante di gauge e per i diffeomorfismi del piano che sono indipendenti dal tempo (queste simmetrie sono valide a meno di termini di bordo che saranno discussi in seguito). Nel resto di questo capitolo analizzeremo le conseguenze fisiche delle azioni (3.61-3.62), in particolare le quantità osservabili relative alle proprietà di trasporto e discuteremo la loro universalità.

Notiamo che nel caso di una teoria effettiva con più componenti, descritta alla fine del paragrafo 3.1.1, (3.13), occorre introdurre un accoppiamento (3.58) con parametri indipendenti $s_I j_I^\mu \omega_\mu$, $I = 1, \dots, m$. Il risultato per l'azione di (3.61-3.62) resta valido con $\bar{s} = \frac{1}{m} \sum_I s_I$ e $\bar{s}^2 = \frac{1}{m} \sum_I s_I^2$.

3.2.4 Shift e momento angolare intrinseco

Il termine di Wen-Zee contiene tre contributi:

$$S_{WZ} = \frac{\nu \bar{s}}{2\pi} \int Ad\omega = \frac{\nu \bar{s}}{2\pi} \int d^3x \left(\frac{\sqrt{g}}{2} A_0 \mathcal{R} + \epsilon^{ij} \dot{A}_i \omega_j + \sqrt{g} \mathcal{B} \omega_0 \right), \quad (3.63)$$

dove abbiamo introdotto la curvatura scalare della metrica spaziale,

$$\mathcal{R} = \frac{2}{\sqrt{g}} \epsilon^{ij} \partial_i \omega_j, \quad (3.64)$$

e il campo magnetico,

$$\mathcal{B} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ij} \partial_i A_j. \quad (3.65)$$

Dalla variazione dell'azione indotta rispetto ad A_0 ricaviamo la densità:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_{WZ}}{\delta A_0} = \frac{\nu}{2\pi} \left(\mathcal{B} + \frac{\bar{s}}{2} \mathcal{R} \right). \quad (3.66)$$

Integrando questa espressione su una superficie \mathcal{D} ,

$$N = \int_{\mathcal{D}} d^2x \sqrt{g} \rho = \frac{\nu}{2\pi} \int_{\mathcal{D}} d^2x \sqrt{g} \left(\mathcal{B} + \frac{\bar{s}}{2} \mathcal{R} \right) = \nu N_\phi + \nu \bar{s} \chi, \quad (3.67)$$

otteniamo una modifica della relazione (2.13) fra il numero di elettroni N ed il numero di flussi N_ϕ attraverso la superficie. La correzione sub-leading $O(1)$ rispetto a $N_\phi \sim \mathcal{O}(N)$ definisce la quantità chiamata *shift*, $\mathcal{S} = \bar{s} \chi$, dove χ è la caratteristica di Eulero. La prima osservazione sullo *shift* fu fatta da Wen e Zee [41] nel calcolo esplicito della funzione d'onda di Laughlin nella superficie della sfera ($\chi = 2$), ottenendo il valore $\bar{s} = p/2$ per $\nu = 1/p$.

Esistono numerosi studi sullo shift in letteratura. Se in principio il numero quantico \bar{s} era considerato universale, ovvero indipendente dai dettagli del sistema, attualmente il problema è aperto. Un modo per dimostrare l'universalità di una quantità di bulk è quello di collegarla con un osservabile della teoria conforme al bordo che è necessariamente universale (per energie inferiori al gap del bulk). Nel caso della conducibilità Hall abbiamo studiato la corrispondenza bulk-boundary nella sezione 3.1.2 ed abbiamo visto come la corrente Hall sia legata all'anomalia chirale della CFT al bordo, mediante il meccanismo dell'*anomaly inflow*. Questo risultato ci assicura che σ_{xy} è universale perchè l'anomalia è esatta, ovvero non riceve correzioni dovute a dinamiche di corte distanze, ed inoltre non può essere modificata aggiungendo termini locali nell'azione effettiva al bordo.

Nel caso dello shift, dobbiamo quindi analizzare la corrispondenza bulk-boundary per l'azione di Wen-Zee (3.61) e trovare i corrispondenti termini di bordo che assicurano l'invarianza di gauge e per diffeomorfismi in tutto il sistema. Questa analisi è stata condotta da Gromov, Jensen e Abanov in [50] in cui hanno ottenuto la seguente modifica:

$$S_{WZ} = \frac{\nu\bar{s}}{2\pi} \int_{\mathcal{M}} Ad\omega \quad \rightarrow \quad \tilde{S}_{WZ} = \frac{\nu\bar{s}}{2\pi} \int_{\mathcal{M}} Ad\omega + \frac{\nu\bar{s}}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} AK, \quad (3.68)$$

dove K è la uno-forma della curvatura estrinseca del bordo¹, ovvero del cilindro spazio-temporale. Variando rispetto ad A_0 ed integrando la densità sullo spazio si ottiene la generalizzazione della (3.67):

$$N = \frac{\nu}{2\pi} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{B} + \frac{\nu\bar{s}}{2\pi} \left(\int_{\mathcal{D}} d\omega + \int_{\partial\mathcal{D}=S^1} K \right) = \nu N_\phi + \nu\bar{s}\chi, \quad (3.69)$$

in cui l'espressione della caratteristica di Eulero è estesa alle superfici spaziali con bordo, ovvero $\chi = 2 - 2g - b$, dove g è il *genus* della superficie e b il numero di bordi. Pertanto anche superfici piatte, come il disco e l'anello, possono dar luogo ad uno shift non nullo.

L'estensione dell'azione di Wen-Zee S_{WZ} per un termine di bordo locale suggerisce che il momento angolare intrinseco \bar{s} non corrisponda ad una quantità universale nella teoria conforme. Infatti termini locali possono essere modificati in una teoria di campo e corrispondono a differenti scelte dello schema di rinormalizzazione. Vogliamo comunque precisare che questa analisi non è una prova conclusiva della non universalità dello shift. Resta possibile l'eventualità che \bar{s} parametrizzi anche altre quantità della teoria conforme di bordo che sono universali. Questa è una delle domande principali che ci siamo posti in questa tesi ed alla quale daremo una risposta nella parte originale al capitolo 5.

La relazione fra N e N_ϕ nella geometria del disco (3.69) ci dà un semplice modo per valutare lo shift dal calcolo del momento angolare della funzione d'onda per N elettroni. Utilizziamo la relazione [48]:

$$J = \frac{N}{2} N_\phi = \frac{N^2}{2\nu} - N\bar{s}. \quad (3.70)$$

In questa formula possiamo notare un contributo di momento angolare $\mathcal{O}(N^2)$ dato dalla distribuzione classica della goccia di fluido ed un termine $\mathcal{O}(N)$ parametrizzato

¹ $K_\alpha = n_i D_\alpha t^i$, dove n^i e t^i sono rispettivamente il versore normale e il versore tangente al cerchio S^1 bordo del disco spaziale.

da \bar{s} . Abbiamo quindi l'importante identificazione di \bar{s} come il momento angolare intrinseco degli elettroni.

Calcoliamo alcuni valori di \bar{s} . Nel caso dell' n -esimo livello di Landau pieno sommando il momento angolare di ciascun elettrone otteniamo:

$$J_n = \sum_{m=-n}^{N-1-n} m = \frac{N^2}{2} - \frac{2(n-1)}{2}N. \quad (3.71)$$

Pertanto il momento angolare intrinseco degli elettroni nel livello n è dato da:

$$s_n = \frac{2(n-1)}{2}. \quad (3.72)$$

Questo risultato è interpretabile come l'effetto della maggiore energia cinetica associata alle orbite di ciclotrone nei livelli di Landau più alti. Infine nel caso della funzione d'onda di Laughlin, il valore del momento angolare totale $J = \frac{pN(N-1)}{2}$ determina $s = \frac{p}{2}$ come già detto.

3.2.5 Viscosità Hall

Il più importante risultato dell'azione di Wen-Zee è dato dalla risposta puramente gravitazionale della (3.63). Consideriamo lo sforzo meccanico come una piccola fluttuazione della metrica piatta δ_{ij} della geometria del disco \mathcal{D} , in accordo con quanto visto nella sezione 3.2.1. La risposta dello stato Hall allo sforzo è descritta dal tensore energia-impulso indotto:

$$T_{ij} = -\frac{2}{\sqrt{g}} \left. \frac{\delta S_{WZ}}{\delta g^{ij}} \right|_{g_{ij}=\delta_{ij}}. \quad (3.73)$$

Per calcolare questa quantità sviluppiamo l'azione di Wen-Zee (3.63) per deboli variazioni della metrica piatta esplicitando la dipendenza da δg_{ij} fino all'ordine quadratico. Per far ciò è necessario riscrivere gli *zweibein* e_i^a in termini della variazione della metrica, $\delta g_{ij} \simeq e_j^i + e_i^j = 2e_j^i$, e sostituire tale relazione nelle equazioni (3.55) e (3.56). In tal modo si ricava:

$$\omega_0 \simeq -\frac{1}{8}\epsilon^{ik}\delta g_{ij}\delta g_{kj}, \quad \omega_j \simeq \frac{1}{2}\epsilon^{ki}\partial_i\delta g_{kj}. \quad (3.74)$$

Inoltre, all'ordine lineare, la componente della spin-connection ω_i è proporzionale alla connessione affine: $\omega_i = \frac{1}{2}\epsilon^{jk}\Gamma_{j,ik} = \frac{1}{2}\Gamma_i$. La curvatura scalare ha pertanto il seguente sviluppo:

$$\mathcal{R} = \frac{2\partial_i\omega_j\epsilon^{ij}}{\sqrt{g}} \simeq (\partial_i\partial_j - \delta_{ij}\partial^2)\delta g_{ij}. \quad (3.75)$$

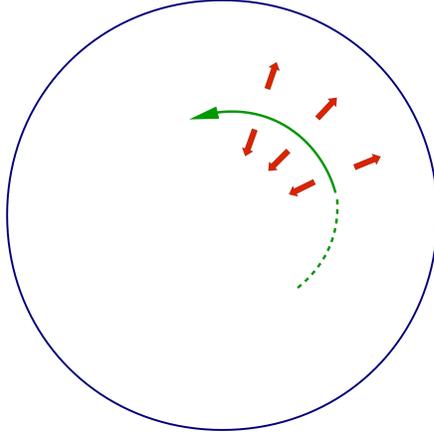


Figura 3.1: Illustrazione della viscosità Hall: il trascinamento del fluido induce una forza ortogonale (frece rosse).

Possiamo quindi riscrivere l'azione di Wen-Zee (3.63) al second'ordine nelle fluttuazioni di gravità ed elettromagnetiche nella forma,

$$S_{WZ} \simeq \frac{\nu \bar{s}}{4\pi} \int d^3x \left(A_0 \mathcal{R} + \epsilon^{ij} \dot{A}_i \Gamma_j - \frac{B}{4} \epsilon^{ij} \delta g_{ik} \delta \dot{g}_{jk} \right). \quad (3.76)$$

Nel caso di campo elettromagnetico costante, il terzo termine è quello rilevante per il calcolo del tensore energia-impulso; si ottiene:

$$T_{ij} \simeq 2 \frac{\delta}{\delta g^{ij}} \left(\frac{\nu \bar{s}}{4\pi} \int d^3x \frac{B}{8} (\epsilon^{ij} \delta \dot{g}_{kj} + \epsilon^{kj} \delta \dot{g}_{ij}) \delta g_{ik} \right), \quad (3.77)$$

ovvero,

$$T_{ij} \simeq -\frac{\nu \bar{s} B}{4\pi} \frac{1}{2} (\epsilon_{im} \delta \dot{g}_{jm} + \epsilon_{jm} \delta \dot{g}_{mi}) = -\frac{\eta_H}{2} (\epsilon_{im} \dot{g}_{jm} + \epsilon_{jm} \dot{g}_{mi}). \quad (3.78)$$

Il parametro

$$\eta_H = \frac{\nu \bar{s} B}{4\pi} = \frac{\bar{s} \rho_0}{2} \quad (3.79)$$

è detto viscosità Hall e parametrizza la risposta del fluido sotto deformazioni, ad esempio a velocità costante. Questa corrisponde ad una forza ortogonale e quindi non dissipativa, molto diversa dall'usuale viscosità longitudinale (vedi la figura 3.1) [51]. Avron, Seiler e Zograf [52] sono stati i primi a discutere la viscosità Hall in processi adiabatici.

Notiamo che la risposta (3.78) allo sforzo meccanico descrive un effetto non covariante, in quanto compaiono le derivate prime rispetto al tempo della metrica. Tale ri-

sultato è in accordo con le simmetrie dell'azione di Wen-Zee che ricordiamo è invariante solamente sotto riparametrazioni indipendenti dal tempo e rotazioni locali.

Al tempo $t = 0$, in due dimensioni possiamo scegliere la gauge conforme per il tensore metrico: $g_{ij}(t = 0, \mathbf{x}) = \sqrt{g}\delta_{ij}$. Le deformazioni dipendenti dal tempo $\delta x^i = u^i(t, \mathbf{x})$ possono essere suddivise nelle trasformazioni conformi e nelle isometrie. Le prime mantengono la metrica diagonale, le seconde mantengono il determinante della metrica costante. Dato che le deformazioni conformi soddisfano l'equazione $\delta g_{ij} \propto \delta_{ij}$ queste non danno contributo al tensore degli sforzi indotto (3.78). Rimangono dunque le isometrie, chiamate anche diffeomorfismi che preservano l'area (*area-preserving diffeomorphisms*). Tali fluttuazioni sono espresse da una funzione generatrice scalare w nel seguente modo:

$$u^i = \epsilon^{ij} \partial_j w(t, \mathbf{x}). \quad (3.80)$$

Sostituendo nella (3.78), si ottiene il tensore:

$$T_{ij} = -\eta_H (2\partial_i \partial_j - \delta_{ij} \partial^2) \dot{w}. \quad (3.81)$$

In conclusione, la viscosità Hall determina la risposta del fluido a deformazioni corrispondenti a isometrie dipendenti dal tempo.

Notiamo infine l'effetto associato al secondo termine dell'azione di Wen-Zee (3.63). La variazione dell'azione (3.60) rispetto al campo A_i determina la corrente Hall indotta

$$J^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_{ind}}{\delta A_i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\nu}{2\pi} \epsilon^{ij} \left(E^j + \bar{s} \mathcal{E}_{(g)}^j \right), \quad (3.82)$$

che presenta una correzione data dal campo $\mathcal{E}_{(g)}^j = \partial_i \omega_0 - \partial_0 \omega^i$ chiamato campo "gravielettrico".

3.2.6 Fluttuazioni al bordo della goccia

Un ulteriore effetto parametrizzato da \bar{s} è la risposta della densità Hall in presenza di un campo magnetico non uniforme. Questo è dato da:

$$\rho = \frac{\nu}{2\pi} \left(1 - \frac{\bar{s} + \bar{s}_0}{2} \frac{\partial^2}{B} + O\left(\frac{\partial^4}{B^2}\right) \right) \mathcal{B}(\mathbf{x}). \quad (3.83)$$

Il coefficiente \bar{s} appare assieme ad una correzione non universale \bar{s}_0 che dipende dal valore del fattore giromagnetico nell'hamiltoniana microscopica. La correzione (3.83) descrive un importante effetto osservato nelle analisi numeriche e analitiche del profilo di densità per lo stato di Laughlin. Si osserva un picco al bordo della goccia di fluido

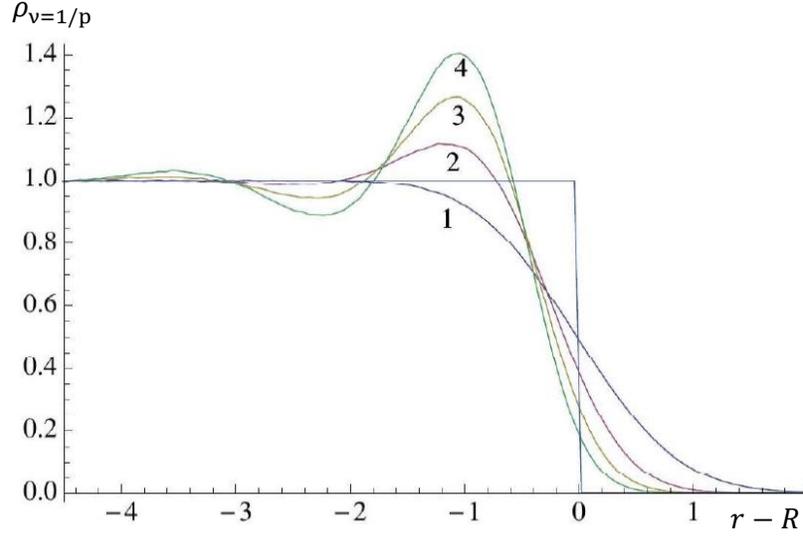


Figura 3.2: Simulazione numerica del profilo di densità della goccia per lo stato di Laughlin $\nu = 1/p$ di $N = 200$ elettroni per $p = 1, 2, 3, 4$ in funzione della coordinata al bordo $r - R$. La densità è normalizzata a uno nel bulk.

incompressibile di Laughlin, vedi Figura 3.2, che è assente per $\nu = 1$. Il risultato (3.83) non discende dall'azione di Wen-Zee, in quanto presenta termini di ordine più alto nelle derivate che contengono il parametro dimensionato B . È stato ottenuto indipendentemente in [53] e in seguito dedotto dall'azione di Wen-Zee assumendo l'invarianza locale galileiana che non sarà discussa in questa tesi.

3.3 Azione di Wen-Zee e anomalia gravitazionale

La teoria conforme chirale al bordo è caratterizzata anche da un'anomalia gravitazionale [54] che corrisponde ad una violazione a livello quantistico dell'invarianza per diffeomorfismi dello spazio-tempo $(1+1)$ -dimensionale, identificato col cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$. Questa anomalia implica la non conservazione del tensore energia-impulso in presenza di un background metrico non banale, secondo la formula:

$$D^\mu T_{\mu\nu} = -\frac{(c - \bar{c})}{24} \partial_\nu \tilde{\mathcal{R}}, \quad \mu, \nu = \tau, x, \quad (3.84)$$

dove (τ, x) sono le coordinate del cilindro e $\tilde{\mathcal{R}}$ è la curvatura dello spazio-tempo al bordo, da non confondere con la curvatura dello spazio \mathcal{R} già introdotta precedentemente. In

questa espressione abbiamo incluso la possibilità che la teoria di bordo possieda anche eccitazioni antichirali con carica centrale \bar{c} , che danno contributo opposto.

L'equazione (3.84) determina la non conservazione dell'energia, ovvero la presenza di una corrente di materia nello stato fondamentale,

$$J_{th}(\mathbf{x}) = \langle \Omega | \mathcal{P}(\mathbf{x}) | \Omega \rangle \propto T^2, \quad (3.85)$$

dove $\mathcal{P}(x)$ è l'impulso locale e T è la temperatura introdotta considerando il tempo euclideo compatto. La quantità (3.85) corrisponde ad una corrente termica come adesso spiegheremo. Consideriamo ancora la geometria dell'anello come nella discussione della corrente Hall: avremo due correnti di segno opposto, in accordo con le corrispondenti chiralità dei due bordi. Ponendoli a temperature differenti, si produce una corrente totale non nulla, $J_{th} = \langle \Omega | \mathcal{P}_R(x) - \mathcal{P}_L(x) | \Omega \rangle \neq 0$, corrispondente ad una corrente termica longitudinale, ortogonale al gradiente di temperatura. Abbiamo quindi il risultato generale per la conducibilità termica trasversa k_{xy} [39]:

$$k_{xy} = \frac{\partial J_{th}}{\partial T} = \frac{\pi k_B^2 T}{6} (c - \bar{c}), \quad (3.86)$$

che è parametrizzata dalla carica centrale $(c - \bar{c})$. Come nel caso dell'anomalia chirale, il risultato (3.86) per la conducibilità termica è esatto e universale, ed in particolare non può essere modificato aggiungendo termini locali nell'azione della teoria di bordo.

L'anomalia gravitazionale può essere comunque compensata da termini nell'azione effettiva $(2 + 1)$ -dimensionale mediante il meccanismo di *anomaly inflow* già visto. Introduciamo la seguente azione di Chern-Simons gravitazionale,

$$S_{GRCS} = \frac{(c - \bar{c})}{48\pi} \int \text{Tr} \left(\Gamma d\Gamma + \frac{2}{3} \Gamma^3 \right), \quad (3.87)$$

dove $\Gamma^{\mu\nu} = \Gamma_{\lambda}^{\mu\nu} dx^{\lambda}$ è la 1-forma ottenuta dalla connessione di Levi Civita per la metrica $(2 + 1)$ -dimensionale. Notiamo che questa metrica non è univocamente fissata dal suo valore al bordo che determina l'anomalia (3.84), ma si può mostrare che le differenti scelte danno azioni S_{GRCS} equivalenti.

La corrispondenza bulk-boundary si realizza come nel caso $U(1)$: l'azione S_{GRCS} è invariante per diffeomorfismi a meno di derivate totali e quindi in presenza di geometrie con bordo determina una violazione della simmetria a livello classico che equivale all'anomalia (3.84) a livello quantistico nella teoria di bordo.

In conclusione, la presenza dell'anomalia gravitazionale della teoria conforme al bordo implica un termine aggiuntivo nell'azione di Wen-Zee (3.60) discusso precedentemente. La parte puramente gravitazionale complessiva dell'azione indotta è quindi

data da:

$$S_{GRWZ} + S_{GRCS} = \frac{\nu\bar{s}^2}{4\pi} \int \omega d\omega + \frac{c}{48\pi} \int \text{Tr} \left(\Gamma d\Gamma + \frac{2}{3} \Gamma^3 \right), \quad (3.88)$$

nel caso degli stati di Laughlin ($\bar{c} = 0$).

Notiamo che il termine aggiuntivo S_{GRCS} è completamente covariante nel bulk anche se il sistema è non relativistico. Il risultato (3.88) è stato anche riprodotto con un argomento completamente nel bulk [49], che corregge direttamente la precedente derivazione dell'azione di Wen-Zee. Possiamo riscrivere l'azione di S_{GRCS} in termini della connessione di spin $(2+1)$ -dimensionale, $\omega^{AB} = \omega_\mu^{AB} dx^\mu$, nel seguente modo:

$$S_{GRCS} = \frac{c}{48\pi} \int \text{Tr} \left(\omega d\omega + \frac{2}{3} \omega^3 \right) + \text{termini di bordo}. \quad (3.89)$$

Se isoliamo la parte abeliana di ω^{AB} relativa ai diffeomorfismi del piano, $\omega = \frac{1}{2} \omega^{ab} \epsilon_{ab}$, otteniamo un contributo dello stesso tipo di S_{GRWZ} , ovvero:

$$S_{GRWZ} \rightarrow \frac{12\nu\bar{s}^2 - c}{48\pi} \int \omega d\omega. \quad (3.90)$$

In conclusione abbiamo dimostrato che l'anomalia gravitazionale determina un termine universale nella parte gravitazionale dell'azione di Wen-Zee (3.62). Questo risultato lascia comunque aperta la risposta alla domanda sull'universalità del momento angolare intrinseco \bar{s} .

Notiamo infine che l'azione di Wen-Zee gravitazionale (3.90) è invariante per diffeomorfismi del piano e rotazioni locali $U(1)$ a meno di derivate totali, analogamente al caso discusso nella sezione 3.2.5. Nel lavoro [49] si determina il termine aggiuntivo all'azione che ripristina le simmetrie per superfici con bordo, col risultato,

$$S_{GRWZ} = \xi \int_{\mathcal{M}} \omega d\omega \rightarrow \xi \left[\int_{\mathcal{M}} \omega d\omega + \int_{\partial\mathcal{M}} \omega K \right], \quad (3.91)$$

dove $\xi = (12\nu\bar{s}^2 - c)/48\pi$ dalla (3.90). Notiamo ancora la presenza della curvatura estrinseca K_μ . Il fatto che il termine aggiuntivo di bordo sia locale non ci permette nuovamente di dimostrare l'universalità di \bar{s} .

Capitolo 4

Simmetria W_∞ nell'effetto Hall

Nei capitoli precedenti, abbiamo visto come l'universalità di alcuni osservabili nell'effetto Hall quantistico intero suggerisca che la dinamica è dominata da simmetrie. Ad esempio, nello studio delle eccitazioni di bordo, abbiamo mostrato che la simmetria conforme infinito-dimensionale e le anomalie chirali e gravitazionali determinano le conducibilità Hall e termica. In questo capitolo mostreremo come emerga naturalmente una simmetria infinito-dimensionale nel bulk del sistema, legata all'incompressibilità dello stato fondamentale. Questa proprietà fornisce l'idea chiave per comprendere il comportamento collettivo degli elettroni nel sistema Hall.

La presenza di un gap tra i livelli di Landau per ν intero, e di un gap dinamico per ν frazionario, impedisce le onde di densità nel bulk, ovvero il fluido elettronico è incompressibile. Poiché la densità ed il numero di elettroni di una goccia di fluido sono costanti,

$$N = \rho_0 A, \quad \rho_0 = \frac{\nu B}{2\pi}, \quad (4.1)$$

le uniche fluttuazioni di densità ammesse sono quelle che mantengono l'area A della goccia costante, ma ne cambiano la forma come mostrato nella figura 4.1. Queste fluttuazioni sono generate dai diffeomorfismi del piano che lasciano invariata l'area. Tale simmetria dinamica, detta simmetria W_∞ si connette con la simmetria conforme dei gradi di libertà al bordo [55] [56], come mostreremo in seguito.

Dopo aver presentato la simmetria W_∞ a livello classico e quantistico, descriveremo il lavoro [48] nel quale si deriva sempre da questa simmetria uno sviluppo delle fluttuazioni in contributi multipolari, corrispondenti a campi di spin $\sigma = 1, 2, \dots$, e ad una serie in $1/B$. Al secondo ordine non banale, questo sviluppo riproduce l'azione di Wen-Zee e suggerisce la possibilità di descrivere la viscosità Hall come un effetto delle eccitazioni dipolari.

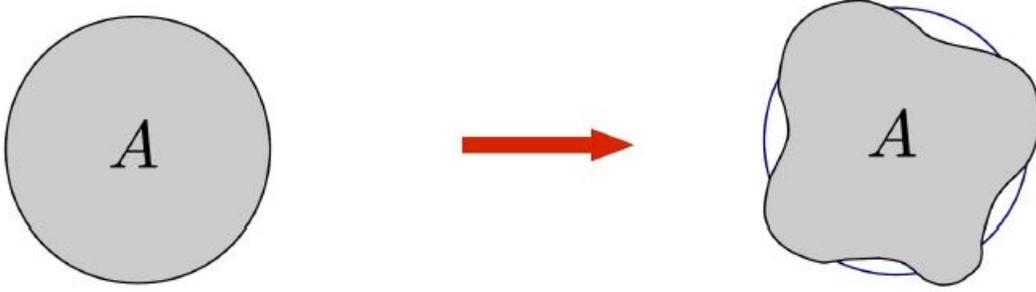


Figura 4.1: Deformazioni della goccia sotto l'azione dei diffeomorfismi che preservano l'area.

4.1 Simmetria W_∞ dei fluidi incompressibili quantistici

4.1.1 Effetto Hall intero

Il sistema degli elettroni bidimensionali non interagenti, studiato nella sezione 2.2.1, è caratterizzato dagli operatori di creazione e distruzione (a, a^\dagger) e (b, b^\dagger) . Dalle equazioni (2.6) è immediato riconoscere negli operatori a, a^\dagger le derivate covarianti che specificano l'hamiltoniana del sistema. Notiamo che in presenza di un campo magnetico, il commutatore dell'impulso canonico con l'hamiltoniana H è non nullo; per costruire delle trasformazioni che lascino la teoria invariante è necessario accompagnare le traslazioni con delle trasformazioni di gauge. Queste trasformazioni dette traslazioni magnetiche [57], sono generate dagli operatori b, b^\dagger , che commutano con H , ma non commutano tra loro.

In realtà possiamo costruire più operatori commutanti con H , prendendo i polinomi degli operatori b e b^\dagger nel seguente modo:

$$\mathcal{L}_{n,m} = (b^\dagger)^{n+1} b^{m+1}, \quad n, m \geq -1, \quad (4.2)$$

$$[\mathcal{L}_{n,m}, H] = 0. \quad (4.3)$$

Mostriamo che questi operatori generano i diffeomorfismi che preservano l'area a livello quantistico. Dalle regole di commutazione degli operatori b, b^\dagger (2.7) si ottiene l'algebra W_∞ :

$$[\mathcal{L}_{n,m}, \mathcal{L}_{k,l}] = \hbar((m+1)(k+1) - (n+1)(l+1)) \mathcal{L}_{n+k, m+l} + O(\hbar^2), \quad (4.4)$$

dove abbiamo esplicitato \hbar . Il primo termine $\mathcal{O}(\hbar)$ riproduce l'algebra classica dei diffeomorfismi che preservano l'area detta w_∞ di cui tratteremo nel prossimo paragrafo. I termini successivi in $\mathcal{O}(\hbar^n)$, $n > 1$, corrispondono alle contrazioni di più derivate.

Gli operatori $\mathcal{L}_{n,m}$ contengono derivate elevate a potenze di grado maggiore di uno, pertanto sono operatori quasi-locali. Le sole trasformazioni locali nelle coordinate sono generate da $\mathcal{L}_{0,-1}$, $\mathcal{L}_{-1,0}$ e $\mathcal{L}_{0,0}$.

Passando ad un sistema di N elettroni, gli operatori si riscrivono nel formalismo di seconda quantizzazione nel seguente modo:

$$\hat{\mathcal{L}}_{n,m} = \int d^x \hat{\Psi}^\dagger (b^\dagger)^{n+1} b^{m+1} \hat{\Psi}, \quad (4.5)$$

dove $\hat{\Psi}$ è l'operatore di campo introdotto in (2.19).

4.1.2 L'origine classica della simmetria

Per comprendere meglio la simmetria W_∞ discutiamo la sua origine classica [55]. Il problema dei livelli di Landau (2.5) è descritto da uno spazio delle fasi quadri-dimensionale $\{x, p_x, y, p_y\}$. L'hamiltoniana si può riscrivere nella forma:

$$H = \frac{1}{2m} ((p_x + y)^2 + (p_y - x)^2). \quad (4.6)$$

Le più generali trasformazioni canoniche che lasciano invariata H sono generate dalle funzioni:

$$\mathcal{L}_{n,m}^{(cl)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = (b^*)^{n+1} b^{m+1}, \quad \text{con } b = \frac{1}{2} ((p_y + x)^2 + i(p_x - y)^2) \quad (4.7)$$

e si realizzano mediante le parentesi di Poisson,

$$\delta H = \{H, \mathcal{L}_{n,m}^{(cl)}\}_{PB} = 0. \quad (4.8)$$

Questo risultato segue dal fatto che le trasformazioni mantengono invariate le combinazioni,

$$\delta(p_x + y) = 0 \quad \text{e} \quad \delta(p_y - x) = 0, \quad (4.9)$$

che esprimono l'hamiltoniana (4.6). Pertanto le funzioni $\mathcal{L}_{n,m}$ agiscono su un sottospazio bidimensionale dello spazio delle fasi quadri-dimensionale originale, che ammette una struttura simplettica in termini di b e b^* . Tale riduzione dello spazio delle fasi si realizza all'interno di ciascun livello di Landau, dove $H = \text{cost.}$, in particolare nel primo livello che è selezionato per $B \rightarrow \infty$. I diffeomorfismi che preservano l'area sono quindi nient'altro che le trasformazioni canoniche dello spazio delle fasi bidimensionale (b, b^*) . Nel caso del primo livello di Landau questo spazio si identifica col piano (z, z^*) degli elettroni.

4.1.3 Algebra W_∞ e incompressibilità dello stato fondamentale

Torniamo al formalismo quantistico di seconda quantizzazione (4.5). Mostriamo come gli operatori nell'espressione di seconda quantizzazione agiscono sugli stati dello spazio di Fock. Sostituendo l'espressione dell'operatore di campo (2.19) in (4.5) e ricordando che $a\psi_0 = b\psi_0 = 0$, otteniamo:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}_{n,m} &= \sum_{k,j=0}^{\infty} \sum_{l,i=0}^{\infty} \hat{c}_{k+j}^{(k)\dagger} \hat{c}_{i+l}^{(l)} \int d^2x \psi_0(\mathbf{x}) \frac{a^k}{\sqrt{k!}} \frac{b^j}{\sqrt{j!}} (b^\dagger)^{n+1} b^{m+1} \frac{(a^\dagger)^l}{\sqrt{l!}} \frac{(b^\dagger)^i}{\sqrt{i!}} \psi_0(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \hat{\mathcal{L}}_{n,m}^{(r)}, \\ \hat{\mathcal{L}}_{n,m}^{(r)} &= \sum_{k \geq m+1} \frac{\sqrt{k!(k+n-m)}}{(k-m-1)!} \hat{c}_{k+n-m+r}^{(r)\dagger} \hat{c}_{k+r}^{(r)}.\end{aligned}\tag{4.10}$$

L'operatore $\hat{\mathcal{L}}_{n,m}$ si separa dunque in copie identiche $\hat{\mathcal{L}}_{n,m}^{(r)}$ agenti indipendentemente su ogni livello di Landau (r).

Il bilineare degli operatori \hat{c}^\dagger, \hat{c} mostra che gli operatori $\hat{\mathcal{L}}_{n+s,n}^{(r)} \sim \sum_k \hat{c}_{k+s+r}^{(r)\dagger} \hat{c}_{k+r}^{(r)}$ realizzano eccitazioni particella-buca all'interno dello stesso livello di Landau alzando, $s > 0$, o abbassando, $s < 0$, il momento angolare degli elettroni. In effetti essi descrivono i gradi di libertà bosonici della teoria fermionica.

Utilizzando le espressioni di seconda quantizzazione si può derivare la forma completa dell'algebra W_∞ ,

$$\begin{aligned}\left[\hat{\mathcal{L}}_{n,m}^{(r)}, \hat{\mathcal{L}}_{k,l}^{(r)} \right] &= \sum_{s=0}^{\min(m,k)} \frac{(m+1)!(k+1)!}{(m-s)!(k-s)!(s+1)!} \hat{\mathcal{L}}_{n+k-s,m+l-s}^{(r)} \\ &\quad - (m \leftrightarrow l, n \leftrightarrow k),\end{aligned}\tag{4.11}$$

indipendente dal livello di Landau (r).

Consideriamo adesso il primo livello e studiamo l'azione degli operatori $\hat{\mathcal{L}}_{n,m}$. Lo stato fondamentale $|\Omega\rangle = |N, \nu = 1\rangle$, (2.21), è unico grazie alla presenza del gap ed è il riempimento completo. Dimostriamo le relazioni:

$$\hat{\mathcal{L}}_{n,m} |\Omega\rangle = 0 \quad \text{per} \quad -1 \leq n < m.\tag{4.12}$$

In base alla decomposizione (4.10), sullo stato $|\Omega\rangle$ agiscono solamente gli operatori $\hat{\mathcal{L}}_{n,m}^{(0)}$, i quali, se $n < m$, generano transizioni particella-buca che abbassano il momento angolare degli stati elettronici all'interno dello stesso livello di Landau. Tuttavia una tale transizione è impossibile nel livello pieno, ottenendo il risultato (4.12).

Le stesse condizioni (4.12) si estendono al caso di k livelli di Landau pieni $\nu = k$,

$$\hat{\mathcal{L}}_{n,m} |N, \nu = k\rangle = 0 \quad \text{per} \quad -1 \leq n < m, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.13)$$

perché gli operatori agiscono orizzontalmente in ogni livello. Riassumendo abbiamo visto come, nel caso dell'effetto Hall quantistico intero, l'incompressibilità corrisponda alla simmetria infinito dimensionale dei diffeomorfismi che preservano l'area; questa simmetria si realizza a livello quantistico mediante le condizioni d'invarianza sullo stato fondamentale (4.12) e l'algebra W_∞ (4.11).

Per evidenziare la corrispondenza tra la simmetria W_∞ e la simmetria conforme, conviene esprimere gli operatori come

$$\hat{V}_{-n}^{(i+2)} = -\hat{\mathcal{L}}_{n+i,i}, \quad i \geq -1, \quad n \geq -i - 1, \quad (4.14)$$

dove l'indice $i + 2 = k$ rappresenta lo spin degli operatori conformi $V^{(k)}(z)$, mentre l'indice n è il modo conforme, ad esempio $V_n^{(2)} \leftrightarrow L_n$; in particolare $[\mathcal{L}_{0,0}, \mathcal{L}_{n,m}] = (n - m)\mathcal{L}_{n,m}$ riproduce la relazione di Virasoro (1.44) con $L_0 \leftrightarrow \mathcal{L}_{0,0}$. Notiamo che il modo n ha un limite inferiore non presente nella teoria conforme, $n \geq -i - 1$, che è dovuto alla finitezza del mare di Fermi e sparisce nel limite termodinamico. La relazione d'incompressibilità può essere espressa in termini degli operatori $\hat{V}_n^{(k)}$ (4.14),

$$\hat{V}_n^{(i+2)} |\Omega\rangle = 0, \quad i = 0, 1, \dots, \quad 0 < n \leq i + 1. \quad (4.15)$$

Queste condizioni devono essere confrontate con le corrispondenti per il vuoto invariante della teoria conforme (2.47), per $\hat{V}_n^{(2)} = \hat{L}_n$,

$$\hat{L}_n |\Omega\rangle = 0, \quad n > 0. \quad (4.16)$$

Le relazioni (4.12) che esprimono la simmetria del fluido quantistico sotto trasformazioni W_∞ sono quindi equivalenti alle condizioni (1.45) di peso massimo nella teoria conforme che esprimono l'invarianza dello stato fondamentale. Analogamente gli operatori $\hat{\mathcal{L}}_{n,m}$ con $n > m$ generano le eccitazioni.

4.1.4 Simmetria W_∞ degli stati di Laughlin

Mostriamo adesso come la simmetria W_∞ del fluido incompressibile è realizzata anche nel caso dell'effetto Hall frazionario $\nu = 1/p$, rappresentato dalla funzione d'onda di Laughlin [58]. Analogamente al caso intero, questo stato è un fluido (densità costante nel bulk) ed è incompressibile (gap dinamico). L'espressione dei generatori $\hat{\mathcal{L}}_{n,m}$

che soddisfano l'algebra W_∞ (4.11) e le condizioni d'invarianza (4.12) per lo stato fondamentale $|\Omega\rangle = |N, \nu = 1/p\rangle$ si ottengono col seguente argomento.

Osserviamo che le funzioni d'onda dello stato fondamentale per $\nu = 1$ e $\nu = 1/p$ sono legate dalla relazione:

$$\Psi_{1/p}(z_i, \bar{z}_i) = \Delta(z_i - z_j)^q \Psi_1(z_i, \bar{z}_i), \quad \frac{1}{\nu} = p = q + 1, \quad (4.17)$$

dove $\Delta(z_i - z_j)$ è il determinante di Vandermonde e q è un intero pari. Questa relazione è stata osservata e sviluppata per la prima volta da Jain. Le eccitazioni dello stato $\nu = 1$ che si estendono nel primo livello sono della forma,

$$\Psi_{exc}(z_i, \bar{z}_i) = P(z_i) \Psi_1(z_i, \bar{z}_i), \quad (4.18)$$

dove $P(z_i)$ è un polinomio omogeneo totalmente simmetrico nello scambio delle coordinate z_i (ovvero nessun \bar{z}_j). La dimostrazione della (4.18) segue dall'applicazione del principio d'esclusione di Pauli. La differenza di momento angolare rispetto allo stato fondamentale $J - J_\Omega > 0$, è data dall'ordine del polinomio P .

Nel caso dello stato di Laughlin, il livello di Landau non è completamente pieno, quindi sarebbero possibili eccitazioni di compressione ($J < J_\Omega$) con un gap finito. Consideriamo il limite di gap infinito per compressioni per stabilire la relazione con il caso $\nu = 1$. Questo limite si può realizzare dinamicamente introducendo nell'hamiltoniana l'interazione effettiva a due corpi a corto raggio di Haldane [59]:

$$V_{int} = \sum_{\substack{q=1 \\ q \text{ dispari}}}^{p-2} V_q \sum_{i < j} \left(\frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \right)^q \delta^{(2)}(z_i - z_j), \quad (4.19)$$

dove V_q sono costanti positive. L'effetto di questo potenziale è quello di dare energia alle funzioni d'onda che si annullano a punti coincidenti $z_i \rightarrow z_j$ con l'andamento,

$$\Psi \sim (z_i - z_j)^k, \quad k \leq p - 2, \quad (4.20)$$

mentre le funzioni con andamento più veloce $k \geq p$ hanno energia nulla.

Consideriamo il sottospazio delle eccitazioni con energia nulla, ovvero il limite $V_q \rightarrow \infty$ nell'hamiltoniana. Abbiamo che le funzioni d'onda del sottospazio devono essere necessariamente della forma:

$$\Psi \simeq P(z_i) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^p e^{-\sum_i |z_i|^2 / 2\ell_B^2}, \quad (4.21)$$

con $\Delta J = J - J_\Omega > 0$, $J_\Omega = pN(N-1)/2$. Abbiamo quindi ottenuto la forma analoga alle eccitazioni $\nu = 1$ per il sottospazio $E = 0$ delle eccitazioni di Laughlin.

In presenza di un potenziale confinante $V(r) = \lambda r^2$, gli stati acquistano un'energia $E \propto \Delta J$, quindi la funzione d'onda di Laughlin (4.17) è lo stato fondamentale esatto dell'interazione di Haldane. Si ritiene che questa interazione sia una buona approssimazione dell'interazione fisica coulombiana, nel seguente senso; analisi numeriche mostrano che gli spettri delle due hamiltoniane possono essere connessi da un trasformazione adiabatica durante la quale il gap non si annulla mai [60]. Quindi la descrizione effettiva di Haldane può essere considerata accurata per lo spettro di bassa energia per $\nu = 1/p$. Questa affermazione è equivalente alle proprietà di universalità fra le rispettive teorie al bordo, riconducibili alla stessa teoria conforme.

Dalle equazioni (4.18) e (4.21) possiamo quindi stabilire una corrispondenza biunivoca fra tutti gli stati con $\nu = 1$ e $\nu = 1/p$, nel seguente modo:

$$\Psi_{exc,\nu=1/p} = \Delta (z_i - z_j)^q \Psi_{exc,\nu=1}. \quad (4.22)$$

Possiamo adesso considerare questa relazione come una trasformazione di similitudine fra i due spazi di Hilbert:

$$|\text{state}, \nu = 1/p\rangle = \Lambda |\text{state}, \nu = 1\rangle, \quad (4.23)$$

dove la forma dell'operatore Λ nella base delle coordinate è data da $\Lambda = \Delta^q(z_i)$. L'espressione degli operatori W_∞ per $\nu = 1/p$ si può quindi ottenere utilizzando la similitudine, nel seguente modo,

$$\hat{\mathcal{L}}_{n,m}^{(\nu=1/p)} = \Lambda \hat{\mathcal{L}}_{n,m}^{(\nu=1)} \Lambda^{-1}. \quad (4.24)$$

Le condizioni d'invarianza dello stato fondamentale di Laughlin sono quindi soddisfatte,

$$\hat{\mathcal{L}}_{n,m}^{(\nu=1/p)} |\Omega, \nu = 1/p\rangle = \Lambda \hat{\mathcal{L}}_{n,m}^{(\nu=1)} |\Omega, \nu = 1\rangle = 0, \quad n < m. \quad (4.25)$$

D'altro canto, l'algebra degli operatori W_∞ per $\nu = 1/p$ e $\nu = 1$ è la stessa grazie alla relazione:

$$\left[\hat{\mathcal{L}}_{n,m}^{(\nu=1/p)}, \hat{\mathcal{L}}_{k,l}^{(\nu=1/p)} \right] = \Lambda \left[\hat{\mathcal{L}}_{n,m}^{(\nu=1)}, \hat{\mathcal{L}}_{k,l}^{(\nu=1)} \right] \Lambda^{-1}. \quad (4.26)$$

Abbiamo quindi mostrato che la simmetria W_∞ si realizza anche negli stati di Laughlin con $\nu = 1/p$ e interazione effettiva di Haldane (4.19). Il limite considerato $V_q \rightarrow \infty$ per stabilire la corrispondenza $\nu = 1 \leftrightarrow \nu = 1/p$ non permette di descrivere tutti gli aspetti della fisica dell'effetto Hall frazionario, ma è sufficiente per descrivere la relazione bulk-boundary e dedurre la corrispondente teoria conforme al bordo.

Notiamo infine che l'implementazione della simmetria W_∞ nella teoria conforme al bordo secondo le identificazioni (4.14) e (4.15) è stata sviluppata nel lavoro [61]; sono state costruite le teorie conformi con simmetria estesa corrispondenti agli stati di Laughlin e gerarchici di Jain, denominate modelli minimali W_∞ [62].

4.2 Simmetria W_∞ e teorie effettive di Chern-Simons generalizzate

4.2.1 Variazione della densità

Nella sottosezione 4.1.3 abbiamo mostrato come le trasformazioni W_∞ corrispondono nel limite classico ai diffeomorfismi del piano che lasciano l'area della goccia di fluido costante. Come già osservato, queste trasformazioni sono generate da una funzione scalare $w(\mathbf{x}, t)$ e agiscono con le parentesi di Poisson delle coordinate (x^1, x^2) . Ad esempio le fluttuazioni della densità sono date da:

$$\delta_w \rho = \{\rho, w\}_{PB} = \epsilon^{ij} \partial_i \rho \partial_j w. \quad (4.27)$$

È conveniente passare alle coordinate complesse $z = x^1 + ix^2$ e $\bar{z} = x^1 - ix^2$ scrivendo:

$$\{\rho, w\}_{PB} = \epsilon^{z\bar{z}} \partial_z \rho \partial_{\bar{z}} w + (z \leftrightarrow \bar{z}), \quad \epsilon^{z\bar{z}} = -\epsilon^{\bar{z}z} = -2i. \quad (4.28)$$

Possiamo trovare una base per la funzione scalare $w(z, \bar{z})$ espandendo in serie di potenze,

$$w(z, \bar{z}) = \sum_{n, m \geq -1} a_{nm} z^{n+1} \bar{z}^{m+1}, \quad \mathcal{L}_{n, m} = z^{n+1} \bar{z}^{m+1}. \quad (4.29)$$

Si verifica facilmente che le funzioni $\mathcal{L}_{n, m}$ soddisfano l'algebra classica (4.4), mentre nella teoria quantistica, le coordinate non commutano $[z, \bar{z}] = \ell_B^2$, e gli operatori $\hat{\mathcal{L}}_{n, m}$ soddisfano l'algebra W_∞ (4.11).

Mostriamo quale sia la fluttuazione indotta dalle trasformazioni W_∞ sul valore d'aspettazione della densità di carica $\rho(z, \bar{z}) = \langle \Omega | \hat{\rho}(z, \bar{z}) | \Omega \rangle$, dove $\hat{\rho}(z, \bar{z}) = \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}$. L'analogo quantistico del generatore $w(\mathbf{x}, t)$ è dato dall'operatore:

$$\hat{w} = \int d^2 z \hat{\Psi}^\dagger(z, \bar{z}) w(z, \bar{z}) \hat{\Psi}(z, \bar{z}). \quad (4.30)$$

La fluttuazione della densità si esprime col commutatore $\delta \hat{\rho} = [\hat{\rho}, \hat{w}]$ che si può calcolare usando le regole di commutazione dell'operatore di campo; si ottiene il seguente

risultato [48]:

$$\delta\rho(z, \bar{z}) = i \langle \Omega | [\hat{\rho}(z, \bar{z}), \hat{w}] | \Omega \rangle = i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\hbar)^n}{B^n n!} (\partial_{\bar{z}}^n \rho \partial_z^n w - \partial_z^n \rho \partial_{\bar{z}}^n w) = \{\rho, w\}_M. \quad (4.31)$$

L'espressione non locale a secondo membro è chiamata parentesi di Moyal $\{\rho, w\}_M$. Il termine di $O(\hbar)$ corrisponde al termine classico delle parentesi di Poisson.

Lo sviluppo in (4.31) vale per qualsiasi stato $|\Omega\rangle$ nel primo livello di Landau con densità $\rho = \langle \Omega | \hat{\rho} | \Omega \rangle$. In particolare saremo interessati all'applicazione di questa formula agli stati fondamentali con $\nu = 1$ e $\nu = 1/p$. L'estensione al caso $\nu = n$ sarà discussa nel prossimo capitolo.

4.2.2 Sviluppo multipolare

La fluttuazione della densità sotto diffeomorfismi che preservano l'area (4.31) è una funzione non locale della densità stessa. Questo risultato è la manifestazione del fatto che quantisticamente, ogni eccitazione nel primo livello di Landau non può essere localizzata in un'area più piccola di $\pi\ell_B^2$. L'espansione è definita dalle potenze \hbar , o analogamente di $\ell_B^2 = 2\hbar c/eB = 2/B$.

Fissiamo $\hbar = 1$ e consideriamo lo sviluppo della (4.31) fino al second'ordine in $1/B$:

$$\delta\rho \sim -\frac{\epsilon^{z\bar{z}}}{B} \partial_{\bar{z}} \rho \partial_z w - \frac{\epsilon^{z\bar{z}}}{B^2} \partial_{\bar{z}}^2 \rho \partial_z^2 w + (z \leftrightarrow \bar{z}). \quad (4.32)$$

Riordinando le derivate e sfruttando la cancellazione dei termini asimmetrici per lo scambio $z \leftrightarrow \bar{z}$, la (4.32) si può riscrivere nella forma:

$$\delta\rho \sim -\epsilon^{z\bar{z}} \left(\frac{1}{B} \partial_{\bar{z}} (\rho \partial_z \tilde{w}) + \frac{1}{B^2} \partial_{\bar{z}}^2 (\rho \partial_z^2 w) \right) + (z \leftrightarrow \bar{z}), \quad (4.33)$$

dove $\tilde{w} = w - \partial_z \partial_{\bar{z}} w / B$.

Lo sviluppo (4.33) permette di individuare facilmente la struttura tensoriale dell'espressione, in quanto la parte scalare di traccia del secondo termine in (4.32) è stata inglobata nel primo termine tramite la traslazione di $w \rightarrow \tilde{w}$. Pertanto lo sviluppo in $1/B$ comprende un campo di spin uno $(a_z, a_{\bar{z}})$ e un campo di spin due $(b_{zz}, b_{\bar{z}\bar{z}})$, tensore simmetrico a traccia nulla,

$$\delta\rho = \epsilon^{z\bar{z}} \partial_{\bar{z}} \left(a_z + \frac{1}{2B} \partial_{\bar{v}} b_{zv} \delta^{\bar{v}v} + \frac{1}{2B} \partial_v b_{z\bar{v}} \delta^{v\bar{v}} \right) + (z \leftrightarrow \bar{z}). \quad (4.34)$$

In tal modo è possibile esprimere la variazione della densità come somma di contributi generati da campi di spin $\sigma = 1, 2, \dots$, corrispondenti a rappresentazioni irriducibili del gruppo delle rotazioni $O(2)$ nel piano.

Tornando alle coordinate spazio-temporali x^μ , riconosciamo nel primo termine l'espressione della corrente di materia (3.5) $j_{(1)}^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu a_\rho$ per $\mu = 0$ della teoria di Chern-Simons (3.7); la forma delle componenti spaziali $j_{(1)}^i$ è determinata univocamente dalla conservazione della corrente e dall'invarianza di gauge di a_μ .

Analogamente il secondo termine in (4.34) corrisponde alla componente temporale della corrente,

$$j_{(2)}^\mu = \frac{1}{B} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \partial_k b_{\rho k}, \quad \mu, \nu, \rho = 0, 1, 2, \quad k = 1, 2. \quad (4.35)$$

Questa corrente contiene delle componenti non fisiche, che possono essere messe a zero utilizzando la simmetria di gauge della (4.35),

$$b_{\mu k} \rightarrow b_{\mu k} + \partial_\mu v_k, \quad (4.36)$$

e fissando il vettore spaziale v_k in modo che b_{jk} sia simmetrico e a traccia nulla. Inoltre, le due componenti b_{0k} sono moltiplicatori di Lagrange non dinamici, come vedremo in seguito.

Riassumendo, l'espansione non locale delle parentesi di Moyal, (4.31), può essere vista come la componente temporale e gauge fissata della corrente:

$$j^\mu = j_{(1)}^\mu + j_{(2)}^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu a_\rho + \frac{1}{B} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \partial_k b_{\rho k}. \quad (4.37)$$

L'analisi può anche essere estesa al termine di $O(1/B^3)$ considerando un campo di spin tre $c_{\mu kl}$ simmetrico a traccia nulla rispetto ai suoi indici spaziali, che possiede ancora due componenti fisiche: $(c_{zzz}, c_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}})$.

Abbiamo quindi mostrato che la simmetria W_∞ del fluido incompressibile ha effetti non-locali, che possono essere rappresentati come la somma di contributi singolarmente locali e indipendenti di campi a spin più alto mediante lo sviluppo in serie in $1/B$. Vedremo che questa espansione corrisponde ad uno sviluppo multipolare, dove il primo termine riproduce la teoria (3.7) del campo idrodinamico, e i successivi correzioni che descrivono eccitazioni di dipolo e momenti più alti [48].

4.2.3 Teoria effettiva al second'ordine

La teoria effettiva del campo di spin due $b_{\mu k}$ si determina seguendo gli stessi passi fatti nella sezione 3.1 per dedurre la teoria di Chern-Simons del campo a_μ . La corrente di materia $j_{(2)}^\mu$ si accoppia usualmente al campo elettromagnetico esterno A_μ . Dobbiamo introdurre una dinamica per il campo $b_{\mu k}$ che abbia le seguenti proprietà: rispettare

l'invarianza di gauge (4.36) e trattare le componenti b_{0k} come non dinamiche. L'azione non dovrà introdurre gradi di libertà propaganti nel bulk per il vincolo di incompressibilità. Siamo quindi condotti ad ipotizzare un'espressione generalizzata della teoria di Chern-Simons per campi di spin due con la seguente forma:

$$S_{CS}^{(2)}[b] = -\frac{1}{2\gamma B} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} b_{\mu k} \partial_\nu b_{\rho k}, \quad (4.38)$$

dove γ è una costante di accoppiamento. Nella letteratura, l'azione di Chern-Simons è stata formulata per campi di spin σ arbitrario della forma $b_\mu^{A_1, \dots, A_{\sigma-1}}$ dove gli indici $\{A_i\}$ del sistema di riferimento locale sono totalmente simmetrici e a traccia nulla. La seguente espressione [63],

$$S_{CS}^{(\sigma)}[b] = \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} b_\mu^{\{A_i\}} \partial_\nu b_\rho^{\{B_j\}} \delta_{\{A_i\}\{B_j\}}, \quad (4.39)$$

è invariante per trasformazioni locali del riferimento agenti sugli $\{A_i\}$ nonché indipendente dalla metrica come l'azione di Chern-Simons originale. Le (4.39) definiscono quindi delle teorie topologiche. Nel limite non relativistico per $\sigma = 2$ questa espressione si riduce alla (4.38) che è solamente invariante per diffeomorfismi del piano indipendenti dal tempo.

Pertanto, introducendo la forma differenziale $b_k = b_{\mu k} dx^\mu$ e aggiungendo il termine d'interazione $j_{(2)}^\mu A_\mu$, l'azione effettiva per il campo di spin due diventa:

$$S^{(2)}[b] = -\frac{1}{2\gamma B} \int b_k db_k + \frac{1}{B} \int Ad\partial_k b_k. \quad (4.40)$$

La scala B deve essere introdotta per motivi dimensionali. Il campo di spin due ha dimensione in massa $[b] = 2$, mentre B è l'inverso della lunghezza magnetica e pertanto ha dimensione in massa pari a 2. Inoltre, l'indice k è considerato come la parte spaziale di un indice di Lorentz. Tuttavia non è possibile estendere il campo $b_{\mu k} \rightarrow b_{\mu\nu}$, in quanto ciò porterebbe ad un momento coniugato ai b_{0k} che quindi diventerebbero dinamici.

Integrando il campo b_k nell'azione effettiva (4.40), si ottiene un nuovo contributo all'azione indotta (3.8):

$$S_{ind}^{(2)}[A] = -\frac{\gamma}{2B} \int \Delta AdA, \quad (4.41)$$

dove Δ indica il Laplaciano. Questa azione comporta una correzione di $O(1/B)$ alla densità e alla corrente Hall. Questo effetto è stato discusso al capitolo 3 e parametrizza la fluttuazione al bordo della densità dello stato di Laughlin, vedi figura 3.2.

4.2.4 Accoppiamento alla metrica spaziale

Consideriamo adesso l'accoppiamento del campo di spin due con la metrica spaziale. Introduciamo una metrica di background nel limite di gravità debole e deriviamo l'azione effettiva all'ordine quadratico nelle fluttuazioni elettromagnetiche e della metrica. La metrica g_{ij} si accoppia al tensore energia-impulso t^{ik} , che esprimiamo in termini del campo $b_{\mu k}$ nel seguente modo [48]:

$$t^{\mu k} = \epsilon^{kn} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu b_{\rho n}. \quad (4.42)$$

In questa espressione abbiamo aggiunto le componenti temporali t^{0k} in modo che il tensore $t^{\mu k}$ sia conservato. La parte antisimmetrica delle componenti spaziali t_{ij} risulta uguale alla somma di due contributi:

$$\epsilon^{ij} t_{ij} = -\epsilon^{ij} (\partial_j b_{0i} - \partial_0 b_{ji}) \approx 0. \quad (4.43)$$

Come discusso precedentemente è possibile fissare la gauge per $b_{\mu k}$ che annulla la componente antisimmetrica, $\epsilon^{ij} b_{ij} = 0$, e i moltiplicatori di Lagrange b_{0i} . Pertanto t_{ij} è simmetrico "on-shell".

La definizione (4.42) è motivata dal confronto con la corrente di materia $j_{(1)}^\mu$ del campo idrodinamico a_μ . Infatti se le fluttuazioni di carica sono date dall'integrale della densità,

$$\delta Q = \int_{\mathcal{D}} d^2 x j_{(1)}^0 = \oint_{\partial\mathcal{D}} dx^i a_i, \quad (4.44)$$

le fluttuazioni dell'impulso sono date dall'integrale del tensore energia-impulso:

$$\delta P^k = \int_{\mathcal{D}} d^2 x t^{0k} = \epsilon^{kl} \oint_{\partial\mathcal{D}} dx^i b_{il}. \quad (4.45)$$

Pertanto, come le fluttuazioni di carica si riducono alla circuitazione sul bordo del campo idrodinamico, in accordo con l'incompressibilità del fluido, così le fluttuazioni dell'impulso sono date dall'integrale sul bordo del campo idrodinamico di spin due. In questo approccio, le fluttuazioni di carica e di materia sono quindi variabili indipendenti, mentre nella teoria di Wen-Zee le seconde sono proporzionali alle prime (cf. (3.61)). L'attuale formulazione suggerisce l'idea dello sviluppo multipolare della dinamica della goccia: campi di spin più alto misurano le fluttuazioni di successive quantità tensoriali al bordo [48].

Riassumendo, l'accoppiamento del campo di spin due con la metrica è dato dall'espressione:

$$S_{int}[b, g] = \lambda \int d^3 x \delta g_{\mu k} \epsilon^{kn} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu b_{\rho n}. \quad (4.46)$$

4.2.5 Derivazione dell'azione di Wen-Zee

L'azione effettiva per il campo di spin due, completa dell'interazione sia con il campo elettromagnetico che con la metrica spaziale, risulta quindi:

$$S^{(2)} [b, A, g] = -\frac{1}{2\gamma B} \int b_k db_k + \frac{1}{B} \int Ad\partial_k b_k + \lambda \int d^3x \delta g_{\mu k} \epsilon^{kn} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu b_{\rho n}. \quad (4.47)$$

Integrando il campo $b_{\mu k}$, l'azione indotta è data dalla somma di tre termini:

$$S_{ind}^{(2)} [A, g] = S_{EM}^{(2)} [A] + S_{MIX}^{(2)} [A, g] + S_{GR}^{(2)} [g], \quad (4.48)$$

dove,

$$S_{EM}^{(2)} [A] = -\frac{\gamma}{2B} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} \Delta A_\mu \partial_\nu A_\rho, \quad (4.49)$$

$$S_{MIX}^{(2)} [A, g] = -\lambda\gamma \int d^3x \epsilon^{ij} \epsilon^{kn} (A_0 \partial_i - A_i \partial_0) \partial_k \delta g_{jn}, \quad (4.50)$$

$$S_{GR}^{(2)} [g] = -\frac{B\gamma\lambda^2}{2} \int d^3x \epsilon^{ij} \delta g_{ik} \delta \dot{g}_{jk}. \quad (4.51)$$

Il primo termine riproduce la correzione elettromagnetica alla densità vista in (4.41). Il secondo e il terzo termine possono essere riscritti utilizzando l'equazione (3.75) e la definizione di $\Gamma_i = \epsilon^{jk} \Gamma_{j,ik}$:

$$S_{MIX}^{(2)} [A, g] + S_{GR}^{(2)} [g] = \lambda\gamma \int d^3x \left(A_0 \mathcal{R} + \epsilon^{ij} \dot{A}_i \Gamma_j - \frac{B\lambda}{2} \epsilon^{ij} \delta g_{ik} \delta \dot{g}_{jk} \right). \quad (4.52)$$

Questa espressione quindi risulta uguale all'azione di Wen-Zee (3.63) nell'approssimazione quadratica delle fluttuazioni della metrica ed elettromagnetiche. Si identificano i parametri

$$\gamma = \frac{\nu\bar{s}}{2\pi}, \quad \lambda = \frac{1}{2}. \quad (4.53)$$

In conclusione abbiamo mostrato che la simmetria W_∞ del fluido incompressibile suggerisce uno sviluppo in campi di spin superiore per le fluttuazioni di densità. Il campo di spin due accoppiandosi alla metrica riproduce l'azione di Wen-Zee al second'ordine nelle fluttuazioni. Pertanto l'approccio di Wen-Zee dell'accoppiamento della corrente di materia alla connessione di spin $U(1)$ è equivalente all'accoppiamento della metrica col campo $b_{\mu k}$. Al tempo stesso, la presenza del campo di spin due suggerisce una pittura fisica che è descritta nel prossimo paragrafo.

4.2.6 Eccitazioni dipolari

Discutiamo adesso gli argomenti qualitativi [48] a sostegno dell'idea che esistano delle eccitazioni dipolari (ed eventualmente multipolari) nel fluido incompressibile, come conseguenza dello sviluppo in campi di spin due e superiori suggerito dalla simmetria W_∞ . Osserviamo innanzitutto che un dipolo è caratterizzato da un vettore di polarizzazione $d_i(\mathbf{x})$ del piano. Poiché \mathbf{d} e $-\mathbf{d}$ identificano lo stesso dipolo, il parametro dell'ordine dipolare è un campo di spin due a traccia nulla corrispondente al valore medio,

$$b_{ij} = \left\langle d_i d_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} d_k d_k \right\rangle. \quad (4.54)$$

Nella fisica dell'effetto Hall non si realizza la rottura spontanea di una simmetria e quindi non utilizziamo la teoria di campo di Ginzburg-Landau per il campo b_{ij} , ma abbiamo le stesse variabili con la dinamica di Chern-Simons.

Un primo effetto della presenza di eccitazioni dipolari nella goccia è mostrato in figura 4.2. I dipoli sono orientati casualmente nel bulk, ma presentano un ordine lungo la direzione radiale in conseguenza del gradiente di carica tra l'interno e l'esterno della goccia. È facile vedere che l'ordinamento al bordo crea una fluttuazione di densità a forma di anello come quelle osservate in figura 3.2 per lo stato di Laughlin. L'effetto proporzionale ad $\bar{s} = p/2$ è in accordo con questo argomento.

Il secondo fenomeno che può essere interpretato in termini di dipoli è la viscosità Hall. L'orientamento casuale dei dipoli nel bulk è perturbato dal trascinamento meccanico del fluido, come mostrato in figura 4.3. Pertanto essi acquistano una configurazione localmente ordinata che comporta una fluttuazione di densità a forma di anello e quindi una forza elettrostatica ortogonale al moto del fluido, come rappresentato in Figura 4.3. Tale effetto è parametrizzato dalla viscosità Hall $\eta_H \propto \bar{s}$.

Le configurazioni dipolari possono essere descritte utilizzando l'espansione della fluttuazione di densità:

$$\delta\rho = \epsilon^{ij} \partial_i \left(a_j + \frac{1}{B} \partial_k b_{jk} + \frac{1}{B^2} \left(\partial_k \partial_l - \frac{1}{2} \delta_{kl} \Delta \right) c_{jkl} + \dots \right). \quad (4.55)$$

Dapprima consideriamo un'eccitazione carica nel bulk $\delta\rho(\mathbf{x}) = q\delta^2(\mathbf{x})$; questa è parametrizzata del campo idrodinamico $a_i \sim O(1/|\mathbf{x}|)$ come descritto dalle (4.44). I campi di spin più alto non contribuiscono perché decadono più velocemente all'infinito, $\partial_k b_{jk} \sim O(1/|\mathbf{x}|^2)$, a causa delle derivate di grado più alto. D'altra parte, nel caso di un'eccitazione dipolare,

$$\delta\rho(\mathbf{x}) = q \left(\delta^2(\mathbf{x} + \mathbf{d}) - \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{d}) \right), \quad (4.56)$$

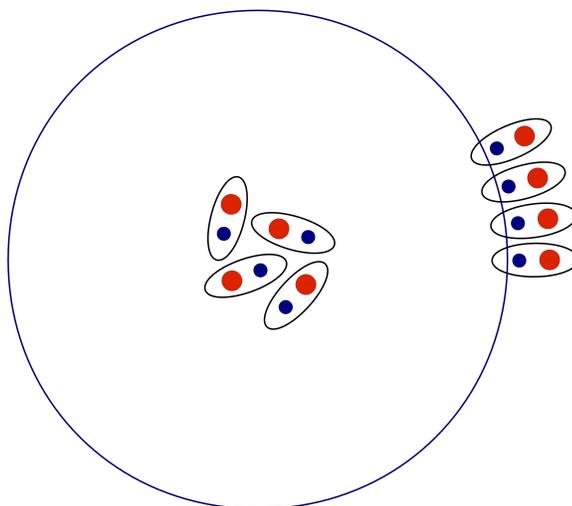


Figura 4.2: Dipoli allineati al bordo comportano il picco nel profilo di densità.

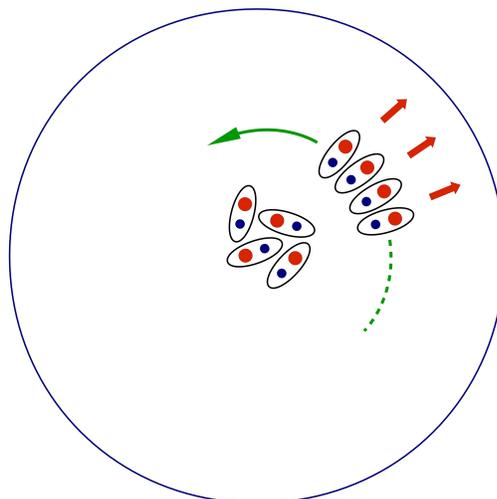


Figura 4.3: La viscosità Hall causata da dipoli allineati dall'azione meccanica sul fluido.

questa corrisponde ad un campo di $O(1/|\mathbf{x}|^2)$, a cui contribuiscono entrambi i campi a_i e b_{jk} . Momenti più alti nella configurazione di cariche gradualmente coinvolgono campi di spin più elevato.

Riguardo l'universalità dei termini dell'azione effettiva, le correzioni locali determinate da derivate dei campi esterni elettromagnetico e gravitazionali, come ad esempio la correzione ΔA in (4.41), sono non universali in quanto possono essere modificati a piacimento nell'azione effettiva. I termini universali devono essere riconducibili ad osservabili della teoria al bordo protetti dalla simmetria conforme.

Più precisamente, occorre comprendere quale teoria al bordo sia indotta dall'azione effettiva dei campi a spin superiori:

$$S[a, b, c, \dots; A, g, \dots] = - \int \left(\frac{\pi}{\nu} ada + \frac{\pi}{\nu \bar{s} B} b_k db_k + \frac{1}{2\alpha B^2} c_{kl} dc_{kl} + \dots + \text{accoppiamenti} \right). \quad (4.57)$$

Analogamente al caso del primo termine descritto al capitolo 3, l'invarianza di gauge su tutto il sistema di bulk e bordo determina l'azione di bordo e la teoria conforme corrispondente. Nel caso del secondo termine, questa relazione può correlare la costante d'accoppiamento \bar{s} dell'azione di Chern-Simons generalizzata a osservabili della teoria conforme e quindi acquistare un valore universale. Questi temi saranno sviluppati nella parte originale della tesi presentata al prossimo capitolo.

Capitolo 5

Analisi microscopica delle eccitazioni di bordo

Questo capitolo contiene i risultati originali del lavoro di tesi, che si sviluppano principalmente nell'ambito della teoria microscopica delle eccitazioni di bordo dell'effetto Hall quantistico. Mediante un'analisi esplicita degli stati nei livelli di Landau, deriveremo le teorie di campo effettive introdotte nei primi capitoli della tesi e verificheremo le corrispondenti ipotesi costruttive. In particolare dimostreremo la simmetria conforme degli stati di bordo e spiegheremo la sua relazione con la simmetria W_∞ del bulk.

Nelle prime due sezioni analizzeremo in dettaglio l'effetto Hall intero che può essere descritto correttamente, come già visto, dal sistema degli elettroni liberi nei livelli di Landau. Dapprima mostreremo come estrarre le teorie conformi di bordo nel caso di un numero n di livelli pieni, definendo un limite al bordo più accurato delle funzioni d'onda elettroniche rispetto al caso già studiato per $\nu = 1$ (par. 2.2.4). Ciò permetterà di costruire esplicitamente la teoria conforme bosonica a n componenti del paragrafo 3.1.1 come termine dominante nello sviluppo in potenze di $1/R$, dove R è il raggio del disco in cui è definito il sistema. Mostreremo inoltre che le correzioni di ordine superiore $\mathcal{O}(1/R^k)$, $k > 1$, contengono strutture di spin superiore, in analogia allo sviluppo multipolare indotto dalla simmetria W_∞ visto al capitolo precedente.

Successivamente, analizzeremo il significato del momento angolare intrinseco \bar{s} nella teoria di bordo. Troveremo risultati in accordo con l'analisi di Gromov, Jensen e Abanov [50] sul termine di bordo nell'azione effettiva di Wen-Zee. Questo studio ci permetterà di evidenziare il significato di questo osservabile e la sua universalità.

Infine, nell'ultima sezione, collegheremo i risultati precedenti allo sviluppo multipolare della densità (4.31) conseguente alla simmetria W_∞ , estendendo l'analisi anche

all'effetto Hall frazionario.

5.1 Teorie conformi al bordo per $\nu = n$

In letteratura non sono presenti studi dettagliati degli stati di bordo dei livelli di Landau superiori al primo. Questo ci ha spinto ad analizzare le proprietà delle corrispondenti funzioni d'onda di singolo elettrone $\psi_{n,m}$, dove $n = 0, 1, \dots$ indica il livello di Landau e m il valore del momento angolare, ottenendo comportamenti non banali.

Inoltre, nel precedente capitolo, abbiamo visto che la simmetria W_∞ suggerisce lo sviluppo delle eccitazioni di un fluido Hall quantistico in contributi di strutture estese, ad esempio dipolari. Nell'ambito della teoria microscopica, un modo per sondare la presenza di tali strutture è effettuare un limite al bordo accurato per le funzioni d'onda elettroniche.

5.1.1 Limite al bordo delle funzioni d'onda

Consideriamo ancora il sistema Hall nella geometria del disco spaziale \mathcal{D} di coordinate (r, θ) , con $0 \leq r \leq R$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Nel capitolo 2, abbiamo mostrato che il limite al bordo dell'operatore di campo del primo livello di Landau descrive il fermione di Weyl (2.35) della teoria conforme (1+1)-dimensionale. Questo limite era definito sulle funzioni d'onda $\psi_{0,m}(r, \theta)$ prendendo la coordinata radiale $r \sim R$ grande e contemporaneamente considerando valori del momento angolare m prossimi alla superficie di Fermi corrispondente al livello pieno, ovvero:

$$L - \sqrt{L} \leq m \leq L + \sqrt{L}, \quad \text{con} \quad R \simeq \sqrt{L}. \quad (5.1)$$

Si ottenevano funzioni d'onda approssimativamente gaussiane nella coordinata radiale (vedi coefficienti $C_m(R^2)$ (2.29)), in accordo con l'intuizione degli stati localizzati al bordo $r \sim R$. Trascurando la dipendenza radiale si otteneva la corretta espressione delle autofunzioni $\frac{1}{\sqrt{R}}e^{im\theta}$ del fermione di Weyl sul bordo e quindi si procedeva costruendo le quantità bosoniche di carica e energia che definiscono la corrispondente teoria conforme.

La forma gaussiana per $r \sim R$ non è presente nelle funzioni d'onda dei livelli di Landau successivi, (2.12). Prendiamo ad esempio l'operatore di campo del secondo livello,

$$\hat{\Psi}^{(1)}(z = re^{i\theta}, t = 0) = \sum_{m=-1}^{\infty} \hat{c}_m^{(1)} \psi_{1,m}(z = re^{i\theta}) = \sum_{m=-1}^{\infty} \hat{c}_m^{(1)} \varphi_{1,m}(r) e^{im\theta}. \quad (5.2)$$

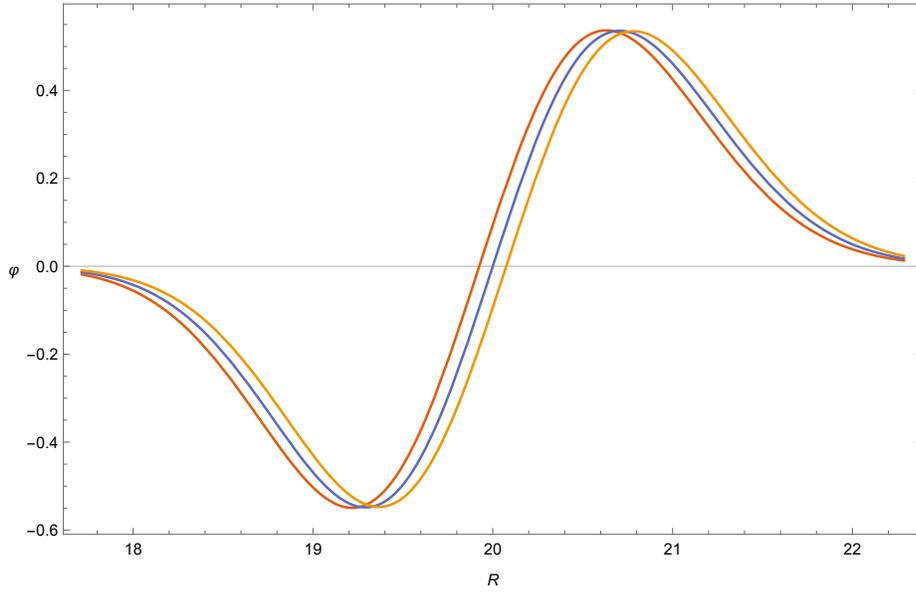


Figura 5.1: Andamento di $\varphi_{1,L+m'}(r)$ intorno a $r \sim R = 20$ per $L = 400$ e $m' = -3, 0, 3$.

La funzione radiale contiene il primo polinomio di Laguerre ed ha la forma:

$$\varphi_{1,m}(r) = \frac{r^m}{\sqrt{\pi(m+1)!}} (r^2 - m - 1) e^{-r^2/2}. \quad (5.3)$$

Questa espressione va analizzata nella regione al bordo che corrisponde, come già detto a $r \sim R$ e $m \sim L \sim R^2$. Il suo andamento, mostrato in figura 5.1, è oscillante: una piccola variazione $\mathcal{O}(1)$ in r cambia o meno il segno di $\varphi_{1,L+m'}$ in base al valore di m' . Quindi, a differenza del primo livello di Landau, non è possibile fissare univocamente la dipendenza radiale a $r = R$ con $L = R^2 + \mu$, $\mu \sim \mathcal{O}(1)$. Pertanto la principale domanda da porsi è come eliminare la dipendenza radiale in modo ben definito per ottenere funzioni di θ che realizzano la base degli stati conformi.

Consideriamo con più attenzione il limite al bordo: ridefiniamo il momento angolare $m = L + m'$, $|m'| \leq \sqrt{L}$ e valutiamo la funzione d'onda in $r = R + x$, dove $x \sim \mathcal{O}(1)$ è la variabile che descrive gli spostamenti intorno al bordo e $R^2 = L \rightarrow \infty$. La funzione d'onda del primo livello di Landau (2.10), con $z = re^{i\theta}$, può essere riscritta in questo limite nella forma:

$$\psi_{0,L+m'}(r, \theta) \simeq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} e^{-\left(x - \frac{m'}{2R}\right)^2} e^{i(L+m')\theta} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}, \frac{m'}{R^2}\right)\right), \quad (5.4)$$

$$r = R + x, \quad R^2 = L \rightarrow \infty, \quad |m'| \leq \sqrt{L}, \quad x \sim \mathcal{O}(1),$$

utilizzando la formula di Stirling.

Effettuiamo lo stesso limite sulla funzione d'onda del secondo livello di Landau, ottenendo¹:

$$\psi_{1,L+m}(R+x,\theta) \simeq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \left[2\left(x - \frac{m}{2R}\right)\right] e^{-(x-\frac{m}{2R})^2} e^{i(L+m)\theta} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}, \frac{m}{R^2}\right)\right). \quad (5.5)$$

Notiamo che rispetto all'espansione del primo livello di Landau compare a fattore il polinomio di Hermite $H_1\left(x - \frac{m}{2R}\right) = 2\left(x - \frac{m}{2R}\right)$. Se ripetiamo le stesse operazioni per la funzione d'onda del terzo livello di Landau otteniamo lo sviluppo (5.4) moltiplicato per il polinomio di Hermite $H_2\left(x - \frac{m}{2R}\right)$, e così via per i livelli successivi:

$$\begin{aligned} \psi_{n,L+m}(R+x,\theta) &= \varphi_{n,L+m}(R+x) e^{i(m+L)\theta}, \\ \varphi_{n,L+m}(R+x) &\simeq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} H_n\left(x - \frac{m}{2R}\right) e^{-(x-\frac{m}{2R})^2}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Tale risultato è spiegato dalla seguente osservazione. Il disco (r, θ) può essere approssimato al bordo, nel limite di raggio molto grande, come il semipiano $x < 0$ del piano (x, y) , vedi figura 5.2. La coordinata x descrive gli spostamenti intorno al raggio R , mentre $y = R\theta$ descrive gli spostamenti lungo il bordo. Nella geometria del semipiano i livelli di Landau sono descritti dalle funzioni d'onda di singolo elettrone,

$$\psi_{n,k}^P(x, y) = \mathcal{N} e^{iky} H_n\left(x - \frac{k_y}{eB}\right) e^{-\left(\left(x - \frac{k_y}{eB}\right)^2\right) \frac{eB}{2\hbar}}, \quad (5.7)$$

come mostrato in [64, pp. 536-538]. Se consideriamo la coordinata y compattificata per la periodicità del disco originale, $y = y + 2\pi R$, l'impulso k_y assume i valori:

$$k_y = \frac{m}{R}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (5.8)$$

Scegliendo le unità di misura tali che $\ell_B^2 = \frac{2}{eB} = 1$ e sostituendo $y = R\theta$ otteniamo,

$$\psi_{n,m}^P(x, \theta) = \mathcal{N} H_n\left(x - \frac{m}{2R}\right) e^{-(x-\frac{m}{2R})^2} e^{im\theta}, \quad (5.9)$$

che è proprio l'andamento della (5.6). Questo argomento spiega la forma nel termine dominante in $1/R$ delle funzioni d'onda elettroniche dei livelli di Landau nel disco.

Notiamo che la dipendenza radiale delle funzioni d'onda è completamente determinata dalla richiesta di ortogonalità degli stati di livelli diversi a momento angolare fissato e per questo motivo non può essere trascurata.

¹Per comodità abbiamo ridefinito $m' \rightarrow m$

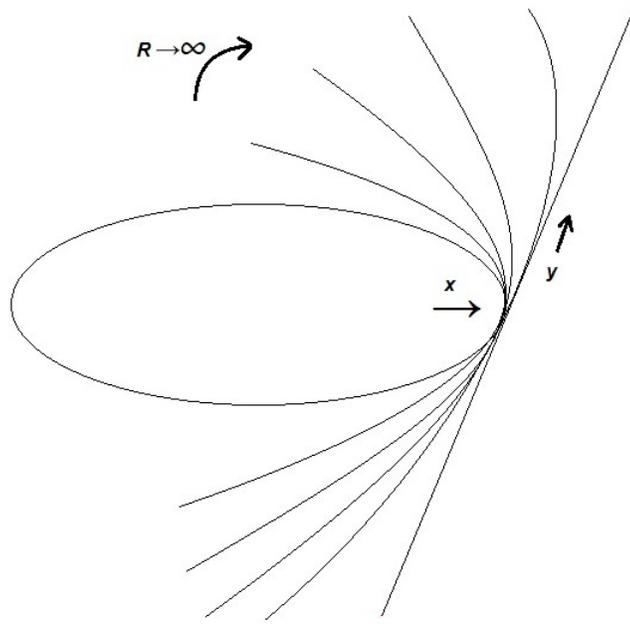


Figura 5.2: Nel limite $R \rightarrow \infty$ il bordo del disco appare come un piano (x, y) con coordinata y compattificata.

5.1.2 Cariche conformi e ortogonalità

Discutiamo adesso la procedura per definire la teoria conforme di n fermioni di Weyl, che descrive le eccitazioni di bordo dell'effetto Hall con $\nu = n$. Consideriamo quantità bilineari nei campi fermionici, che sono osservabili, in particolare i modi della corrente $\hat{\rho}_k$ sul bordo che definiscono la teoria conforme con simmetria $U(1)$ di carica, vedi paragrafo 2.2.5, e soddisfano l'algebra delle correnti (2.46) nel caso di n componenti, ovvero con carica centrale $c = n$.

Prendiamo l'operatore di campo (2.19) per i primi n livelli di Landau pieni,

$$\hat{\Psi}(z, \bar{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{0,m} \hat{c}_m^{(0)} + \sum_{m=-1}^{\infty} \psi_{1,m} \hat{c}_m^{(1)} + \dots + \sum_{m=-n+1}^{\infty} \psi_{n-1,m} \hat{c}_m^{(n-1)}, \quad (5.10)$$

analizziamo la densità,

$$\hat{\rho}(z, \bar{z}) = \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}, \quad (5.11)$$

e studiamone i modi di Fourier al bordo integrando sulla coordinata $r = |z|$, nel seguente modo:

$$\hat{\rho}_k \equiv \int_0^\infty dr r \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \hat{\rho}(r, \theta) e^{-ik\theta}. \quad (5.12)$$

Effettuando il limite al bordo, ovvero $r = R + x$, $R^2 = L$, $m \rightarrow L + m$ con $|m| \leq \sqrt{L}$, si ottiene il risultato:

$$\hat{\rho}_k = \int_{-\infty}^{\infty} (R + x) dx \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \sum_{m,m'} \left(\psi_{0,L+m}(x, \theta) \hat{d}_m^{(0)} + \psi_{1,L+m}(x, \theta) \hat{d}_m^{(1)} + \dots \right) \times \\ \left(\psi_{0,L+m'}^*(x, \theta) \hat{d}_{m'}^{(0)\dagger} + \psi_{1,L+m'}^*(x, \theta) \hat{d}_{m'}^{(1)\dagger} + \dots \right) e^{-ik\theta}, \quad (5.13)$$

dove $\hat{d}_m^{(i)} \equiv \hat{c}_{L+m}^{(i)}$. Utilizziamo l'espressione (5.6) in termini dei polinomi di Hermite per valutare l'integrale radiale. All'ordine $\mathcal{O}(1)$ nello sviluppo $1/R$, otteniamo:

$$\hat{\rho}_k = \sum_m \left(\hat{d}_{m-k}^{(0)\dagger} \hat{d}_m^{(0)} + \hat{d}_{m-k}^{(1)\dagger} \hat{d}_m^{(1)} + \hat{d}_{m-k}^{(2)\dagger} \hat{d}_m^{(2)} + \dots \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}, \frac{k}{R}\right) \\ = \hat{\rho}_k^{CFT(0)} + \hat{\rho}_k^{CFT(1)} + \hat{\rho}_k^{CFT(2)} + \dots + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}, \frac{k}{R}\right). \quad (5.14)$$

Questo risultato segue dall'ortogonalità dei polinomi di Hermite (5.9) valutati allo stesso punto, $x - \frac{m}{R} \sim x$, per $R \rightarrow \infty$. Abbiamo quindi ottenuto che le cariche al bordo si separano in n contributi indipendenti $\hat{\rho}_k^{CFT(i)}$, $i = 0, \dots, n-1$, che agiscono nei sottospazi di Fock dei rispettivi livelli di Landau e realizzano l'algebra delle correnti vista al capitolo 1. Pertanto la teoria conforme al bordo è in accordo con le aspettative basate sulla teoria di Chern-Simons a multicomponenti descritta al paragrafo 3.1.1.

In conclusione, le cariche conformi al bordo nel caso $\nu = n$ si ottengono valutando i momenti rispetto a θ dell'operatore densità (5.11) e integrando nella coordinata radiale. Notiamo che è possibile estrarre una delle componenti della teoria conforme integrando in r con un'opportuna funzione peso $f_j(r)$, utilizzando l'ortogonalità dei polinomi di Hermite. Ad esempio, se vogliamo eliminare il contributo del primo livello di Landau nell'espressione di $\hat{\rho}_0$,

$$\hat{\rho}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} (R + x) dx \sum_m \left(|\varphi_{0,L+m}|^2 \hat{d}_m^{(0)\dagger} \hat{d}_m^{(0)} + |\varphi_{1,L+m}|^2 \hat{d}_m^{(1)\dagger} \hat{d}_m^{(1)} + \dots \right), \quad (5.15)$$

possiamo integrare in x con la funzione peso $f_{(0)}(x) = 1 - 4x^2$ in quanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (R + x) dx f_{(0)}(x) |\varphi_{0,L+m}|^2 = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right). \quad (5.16)$$

Riassumendo si è trovato che la teoria conforme al bordo è descritta dalle cariche $\hat{\rho}_k$ (5.14); altri momenti radiali dell'operatore densità di bulk (5.11) permettono di selezionare una particolare corrente $U(1)$ associata ad un dato livello di Landau.

Osserviamo che nell'espressione ottenuta in (5.14) le cariche conformi corrispondono ai termini di $\mathcal{O}(1)$, ma esistono altri contributi non nulli. I termini di $\mathcal{O}\left(\frac{1}{R^k}\right)$, $k \geq 1$, contengono correzioni di ordine superiore alla teoria conforme sul cilindro che analizzeremo nei prossimi paragrafi.

5.1.3 Funzione di correlazione livelli di Landau superiori

Nel capitolo 1, abbiamo visto che la simmetria conforme vincola la forma del correlatore di due campi ad una legge di potenza, (1.23). Sappiamo inoltre che la proiezione al bordo dell'operatore di campo $\hat{\Psi}(z, \bar{z})$ del primo livello di Landau definisce il campo del fermione di Weyl $\hat{F}(\bar{\eta})$, con dimensione conforme $h = 1/2$. Pertanto la sua funzione di correlazione assume la forma:

$$\langle \Omega | \hat{F}^\dagger(\bar{\eta}_1) \hat{F}(\bar{\eta}_2) | \Omega \rangle = \frac{1}{(\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_2)}, \quad (5.17)$$

nel piano. Questo risultato può essere verificato esplicitamente dal limite al bordo dell'espressione originale dei correlatori di campi nei livelli di Landau. Nel limite al bordo del campo fermionico del primo livello si ottiene l'espressione:

$$\langle \Omega^{(0)} | \hat{\Psi}^{(0)\dagger}(Re^{i\theta_1}) \hat{\Psi}^{(0)}(Re^{i\theta_2}) | \Omega^{(0)} \rangle \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi^3} R \sin\left(\frac{\theta_{21}}{2}\right)}, \quad \theta_{21} = \theta_2 - \theta_1, \quad (5.18)$$

derivata nel lavoro [9]. Questa espressione riproduce correttamente il risultato della teoria conforme sul cilindro e si ottiene dal correlatore nel piano (5.17) utilizzando la mappa conforme (2.38).

Nel caso del secondo livello di Landau, dobbiamo valutare l'espressione,

$$G^{(1)}(x, \theta_1, \theta_2) = \langle \Omega^{(1)} | \hat{\Psi}^{(1)\dagger}((R+x)e^{i\theta_1}) \hat{\Psi}^{(1)}((R+x)e^{i\theta_2}) | \Omega^{(1)} \rangle, \quad (5.19)$$

dove:

$$|\Omega^{(1)}\rangle = \hat{c}_{-1}^{(1)\dagger} \dots \hat{c}_{L-1}^{(1)\dagger} |0\rangle. \quad (5.20)$$

Questa quantità (5.19) può essere approssimata nel limite termodinamico $L = R^2 \rightarrow \infty$ utilizzando lo sviluppo per le funzioni gamma incomplete che compaiono sommando gli indici di momento angolare (vedi appendice A). Si ottiene la funzione,

$$G^{(1)}(x, \theta_{12}) \simeq \frac{4x^2 e^{-2x^2} e^{i\theta_{21}(R^2+1/2)}}{\sqrt{2\pi^3} R} \frac{1}{2i \sin(\theta_{21}/2)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad (5.21)$$

il cui contributo dominante $\mathcal{O}(1/R)$ integrato in x risulta avere l'andamento corretto (5.18) del correlatore fermionico. Tale risultato verifica l'analisi delle precedenti sottosezioni: il secondo livello di Landau, così come i successivi, descrive all'ordine dominante una teoria fermionica chirale al bordo con carica $\hat{\rho}_0^{CFT(1)}$.

5.2 Ruolo del momento angolare intrinseco nella teoria di bordo

In questa sezione analizziamo gli effetti del momento angolare intrinseco \bar{s} sulla teoria di bordo, ottenendo indicazioni sulle sue proprietà di universalità. Come abbiamo visto nella sezione 3.2.4, il parametro \bar{s} determina una correzione $\mathcal{O}(1)$ dovuta alla geometria dello spazio, alla relazione tra carica e numero di flussi:

$$Q = \int d^2x \rho = \nu N_\phi + \nu \bar{s} \chi, \quad (5.22)$$

dove χ è la caratteristica di Eulero. In particolare, nel caso del disco, è presente un contributo $\nu \bar{s}$ che corrisponde ad un termine di bordo locale nell'azione di Wen-Zee (3.68). Vedremo in questo paragrafo che questo contributo può essere interpretato come una carica non nulla dello stato fondamentale della teoria conforme sul bordo, che è diverso nei vari livelli di Landau in base ai valori di s_n dati dalla (3.72)².

Ricordiamo che in teoria dei campi, la carica e l'energia sono usualmente fissate a zero sullo stato fondamentale dalle condizioni di rinormalizzazione; valori diversi da zero hanno senso fisico solamente quando si confrontano geometrie diverse, come ad esempio nell'effetto Casimir. Nel seguito mostreremo che il momento angolare intrinseco si manifesta con un meccanismo analogo.

5.2.1 Operatori di carica

Nella teoria microscopica dell'effetto Hall, le quantità di bulk necessitano una rinormalizzazione nel limite di numero di elettroni $N \rightarrow \infty$. Cominciamo col calcolare il valore d'aspettazione della densità nel $(n+1)$ -esimo livello di Landau definita da:

$$\rho^{(n)} = \langle \Omega^{(n)} | \hat{\rho} | \Omega^{(n)} \rangle. \quad (5.23)$$

Lo stato $|\Omega^{(n)}\rangle = \hat{c}_{-n}^{(n)\dagger} \dots \hat{c}_{L-n}^{(n)\dagger} |0\rangle$ è il livello pieno, con $N = L + 1$ finito. La differenza di densità per due livelli successivi è stata determinata nel lavoro [65],

$$\rho^{(n)}(r^2) - \rho^{(n-1)}(r^2) = -(n-1)! e^{-r^2} \frac{r^{2(N-n)}}{(N-1)!} L_n^{N-n}(r^2) L_{n-1}^{N-n}(r^2). \quad (5.24)$$

Integrando questa espressione si ottiene un risultato nullo per l'ortogonalità dei polinomi di Laguerre, ovvero:

$$Q^{(n)} = Q^{(n-1)} = N, \quad N \text{ finito.} \quad (5.25)$$

²Notiamo che in questo caso $\nu \bar{s} = n \bar{s} = \sum_{i=0}^{n-1} s_i$.

In conclusione, il valore della carica di bulk, ovvero del numero di elettroni è indipendente dal livello di Landau.

La definizione dell'operatore di carica della teoria conforme richiede la sottrazione del valore dello stato fondamentale, nel limite $N \rightarrow \infty$, mediante l'ordinamento normale,

$$\hat{\rho}_0^{(n)} = \sum_m : \hat{d}_m^{(n)\dagger} \hat{d}_m^{(n)} : . \quad (5.26)$$

Una prima scelta ingenua di questa sottrazione ci porta ad assumere un risultato identico per ogni n , corrispondente al valore nullo:

$$\hat{\rho}_0^{(n)} |\Omega^{(n)}\rangle = \left(\mu - \frac{1}{2} \right) |\Omega^{(n)}\rangle = 0. \quad (5.27)$$

Il valore del potenziale chimico è fissato a $\mu = 1/2$ dalle condizioni fisiche descritte al capitolo 2.

Il risultato (5.27) sembra apparentemente in disaccordo con la predizione della teoria effettiva (5.22). La soluzione di questa contraddizione richiede lo studio congiunto delle condizioni di rinormalizzazione per la carica e l'energia.

5.2.2 Spettro d'energia

Nel capitolo 2 abbiamo visto l'espressione dell'operatore di Virasoro della teoria conforme del primo livello di Landau:

$$\hat{L}_0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (m - \mu) \hat{d}_m^\dagger \hat{d}_m. \quad (5.28)$$

La dipendenza dal potenziale chimico μ determina l'energia del vuoto (2.48), che si annulla per $\mu = 1/2$. Inoltre ricordiamo che l'operatore \hat{L}_0 è legato all'hamiltoniana di bordo dalla relazione,

$$\hat{H}_R = \frac{v}{R} \left(\hat{L}_0 - \frac{c}{24} \right), \quad c = 1, \quad (5.29)$$

che include l'effetto Casimir nella geometria del cilindro, parametrizzato da c . In questo paragrafo, studieremo lo spettro delle eccitazioni al bordo nei livelli di Landau superiori ed estrapoleremo da questo la forma di \hat{L}_0 per confronto con le (5.28) (5.29), ad in particolare la dipendenza del potenziale chimico dal livello n .

Consideriamo l'hamiltoniana data dal potenziale confinante armonico (2.23):

$$\hat{H} = \int d^2z \hat{\Psi}^\dagger(z, \bar{z}) V_C(|z|) \hat{\Psi}(z, \bar{z}) = \frac{v}{2R} \int d^2z \hat{\Psi}^\dagger(z, \bar{z}) |z|^2 \hat{\Psi}(z, \bar{z}). \quad (5.30)$$

L'energia di N elettroni nell' n -esimo livello di Landau è data da:

$$E_N^{(n)} = \langle \Omega^{(n)}, N | \hat{H} | \Omega^{(n)}, N \rangle = \frac{v}{2R} \langle |z|^2 \rangle_N^{(n)}. \quad (5.31)$$

Il valore d'aspettazione,

$$\langle n, m ||z|^2 |n, m \rangle \equiv \langle |z|^2 \rangle_{n,m} = \int d^2 z \psi_{n,m}^* z \bar{z} \psi_{n,m} \quad (5.32)$$

sullo stato $|n, m\rangle$, che indica un elettrone di momento angolare m nel livello n , può essere riscritto nella forma,

$$\langle |z|^2 \rangle_{n,m} = \int d^2 z e^{-z\bar{z}} \bar{\chi}_{n,m}(z, \bar{z}) z \bar{z} \chi_{n,m}(z, \bar{z}), \quad (5.33)$$

dove:

$$\psi_{n,m} = e^{-z\bar{z}/2} \chi_{n,m}(z, \bar{z}). \quad (5.34)$$

Nel primo livello di Landau, data la analiticità di $\chi_{0,m}$, la coordinata \bar{z} agisce a sinistra come $-\partial$,

$$\langle 0, m ||z|^2 |0, m \rangle = \int d^2 z -\partial (e^{-z\bar{z}} \bar{\chi}_{0,m}(\bar{z})) z \chi_{0,m}(z). \quad (5.35)$$

Integrando per parti otteniamo l'espressione,

$$\langle |z|^2 \rangle_{0,m} = \int d^2 z e^{-z\bar{z}} \bar{\chi}_{0,m}(z) (z\partial + 1) \chi_{0,m}(z), \quad (5.36)$$

in cui compare $z\partial$ operatore di momento angolare sul primo livello. Sommando sull'indice m per N elettroni nel primo livello si ottiene:

$$\langle |z|^2 \rangle_N^{(0)} = J_0 + N, \quad (5.37)$$

dove J_0 è il valore del momento angolare totale (3.71) per $n = 0$.

L'analogo valore d'aspettazione (5.33) per i livelli superiori può essere ricondotto nella forma (5.36) ricordando che i corrispondenti stati sono ottenuti applicando l'operatore $(a^\dagger)^n$ agli stati del primo livello. Ad esempio, nel secondo livello di Landau, si può facilmente mostrare che vale la relazione:

$$\chi_{1,m}(z, \bar{z}) = (z\bar{z} - m - 1) \chi_{0,m}(z) = (\bar{z} - \partial) \chi_{0,m+1}(z). \quad (5.38)$$

Sostituendo la precedente espressione nel valore d'aspettazione (5.33) con $n = 1$ e integrando per parti, per ricostruire l'ordinamento $z\partial$, si ottiene:

$$\langle |z|^2 \rangle_{1,m} = \int d^2 z e^{-z\bar{z}} \bar{\chi}_{0,m+1}(z) (z\partial + 2) \chi_{0,m+1}(z). \quad (5.39)$$

Infine sommando sull'indice m nel secondo livello da $m = -1$ a $m = N - 2$, abbiamo,

$$\langle |z|^2 \rangle_N^{(1)} = J_1 + 3N, \quad (5.40)$$

dove J_1 è il momento angolare totale sul secondo livello.

In generale, utilizzando la relazione (2.12), ricaviamo la seguente regola di somma:

$$\langle |z|^2 \rangle_N^{(n)} = J_n + (2n + 1)N = \frac{N^2}{2} + \frac{2n + 1}{2}N, \quad (5.41)$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo sostituito l'espressione di J_n (3.71).

Consideriamo adesso un'eccitazione carica composta da l elettroni aggiunti al bordo. L'energia corrispondente, relativa allo stato fondamentale è data da:

$$E_{N+l}^{(n)} - E_N^{(n)} = \frac{v}{R} \left(lN + \frac{l^2}{2} + s_n l \right), \quad s_n = \frac{2n + 1}{2}, \quad (5.42)$$

In questa espressione, il contributo $\mathcal{O}(N)$ deve essere rimosso sottraendo un opportuno termine costante al potenziale (5.30), mentre il termine finito $l^2/2$ riproduce la corretta dimensione conforme (3.41) per lo stato di l elettroni. Il contributo lineare proporzionale al momento angolare intrinseco può essere incluso modificando l'operatore hamiltoniano della teoria conforme nel seguente modo:

$$\hat{H}^{(n)} = \frac{v}{R} \left(\hat{L}_0^{(n)} - \frac{1}{24} \right), \quad \hat{L}_0^{(n)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(m - \frac{1}{2} + s_n \right) \hat{d}_m^{(n)\dagger} \hat{d}_m^{(n)}. \quad (5.43)$$

L'operatore $\hat{L}_0^{(n)}$ sullo stato con l eccitazioni di bordo sopra il mare di Fermi dell' $(n + 1)$ -esimo livello,

$$|l, n\rangle = \hat{d}_1^{(n)\dagger} \dots \hat{d}_l^{(n)\dagger} |\Omega^{(n)}\rangle. \quad (5.44)$$

riproduce infatti lo spettro (5.42). In conclusione, in questo paragrafo abbiamo mostrato che il momento angolare intrinseco modifica l'espressione dell'hamiltoniana conforme per un termine di potenziale chimico (5.28) dipendente dal livello di Landau.

Prima di studiare le conseguenze di questo risultato osserviamo che la (5.43) può anche essere calcolata valutando l'espressione:

$$\langle n, m | H | n, m \rangle \equiv \langle H \rangle_{n,m} = \frac{v}{R} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dr r r^2 \psi_{n,m}^*(r, \theta) \psi_{n,m}(r, \theta). \quad (5.45)$$

Sfruttando le relazioni:

$$[L_n^m(x)]^2 = \frac{(n+m)!}{2^{2n}n!} \sum_{k=0}^n \binom{2n-2k}{n-k} \frac{(2k)!}{k!} \frac{1}{(m+k)} \int_0^\infty dx x^{m+1} L_{2k}^{2m}(2x) e^{-x}, \quad (5.46)$$

$$\int_0^\infty dx e^{-x/2} x^{m+1} L_{2k}^{2m}(x) = \frac{(m+1)!(2m+2k)!}{(2k)!(2m)!} 2^{m+2} F(-2k, m+2; 2m+1; 2), \quad (5.47)$$

si ottiene,

$$\langle H \rangle_{n,m} = \frac{v}{R} \left(m + \frac{(2n+1)}{2} \right). \quad (5.48)$$

Introducendo il momento angolare al bordo, $m \rightarrow L + m$ con $L = R^2 - \mu$ e $\mu = 1/2$, riconosciamo nella precedente espressione i coefficienti dell'operatore (5.43), a parte il termine $\mathcal{O}(R^2)$ rinormalizzato a zero.

5.2.3 Shift del potenziale chimico nei livelli superiori

Confrontiamo il risultato (5.43) con l'espressione della teoria conforme al bordo vista nel capitolo 2. Osserviamo che nel primo livello di Landau, $s_0 = 1/2$, la (5.43) corrisponde all'espressione conforme (5.28) con potenziale chimico $\mu = 0$. Vari argomenti fisici, tra cui l'invarianza conforme dello stato fondamentale e le condizioni al contorno spaziali, fissano il valore $\mu = 1/2$. Dobbiamo quindi effettuare una sottrazione finita all'energia modificando ancora il potenziale confinante:

$$V_C = \frac{v}{2R} |z|^2 + \beta. \quad (5.49)$$

Fissiamo:

$$\beta = -\frac{v}{4R}. \quad (5.50)$$

Ripetendo il calcolo della precedente sezione per il nuovo potenziale confinante, si ottiene la seguente espressione per l'operatore $\hat{L}_0^{(0)}$:

$$\hat{L}_0^{(0)} = \sum_m \left(m - \frac{1}{2} \right) \hat{d}_m^\dagger \hat{d}_m, \quad (5.51)$$

in accordo con il risultato del capitolo 2.

Analizziamo adesso i livelli di Landau superiori; abbiamo:

$$\hat{L}_0^{(n)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(m - \frac{1}{2} + n \right) \hat{d}_m^{(n)\dagger} \hat{d}_m^{(n)}. \quad (5.52)$$

Quindi l'\$(n + 1)\$-esimo livello ha il potenziale chimico:

$$\mu_{(n)} = \mu_0 - n = \frac{1}{2} - n. \quad (5.53)$$

In conclusione, la teoria conforme di un livello di Landau è descritta da un potenziale chimico inferiore di un'unità rispetto a quello del livello sottostante.

Notiamo che in questa analisi abbiamo scelto una forma quadratica del potenziale confinante \$V_C\$. Ciononostante, si può mostrare che il risultato ottenuto non dipende da deformazioni di \$V_C\$. Consideriamo una correzione di grado più alto:

$$V_C = \lambda|z|^2 + \eta|z|^4; \quad (5.54)$$

poiché,

$$\langle |z|^n \rangle \sim N^{1+\frac{n}{2}}, \quad (5.55)$$

l'energia di \$l\$ eccitazioni cariche di bordo scala come,

$$E_{N+l} - E_N \sim \lambda l^2 + \eta l^3 + \text{termini rimossi dalla regolarizzazione}. \quad (5.56)$$

Si può mostrare che questo spettro può essere descritto da una teoria conforme con simmetria \$W_\infty\$ [56] nella geometria del cilindro, solamente se:

$$\lambda \sim \frac{1}{R} \quad \text{e} \quad \eta \sim \frac{1}{R^2}. \quad (5.57)$$

Perciò le correzioni polinomiali al potenziale sono \$\mathcal{O}(1/R^2)\$ e non contribuiscono all'effetto di carica del vuoto.

5.2.4 Universalità del momento angolare intrinseco

Riassumendo il risultato delle precedenti sezioni, abbiamo calcolato la carica e l'energia dei livelli di Landau ottenendo le seguenti espressioni dei relativi operatori conformi

$$\hat{\rho}_0^{(n)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{d}_m^{(n)\dagger} \hat{d}_m^{(n)}, \quad (5.58)$$

$$\hat{L}_0^{(n)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (m - \mu_{(n)}) \hat{d}_m^{(n)\dagger} \hat{d}_m^{(n)}, \quad \mu_{(n)} = \frac{1}{2} - n. \quad (5.59)$$

Riprendendo i risultati del capitolo 2, queste espressioni determinano i seguenti valori sugli stati fondamentali \$|\Omega^{(n)}\rangle\$:

$$\hat{\rho}_0^{(n)} |\Omega^{(n)}\rangle = \left(\mu_{(0)} - \frac{1}{2} \right) |\Omega^{(n)}\rangle = 0, \quad (5.60)$$

$$\hat{L}_0^{(n)} |\Omega^{(n)}\rangle = \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{2} (\mu_{(n)}^2 - \mu_{(n)}) \right] |\Omega^{(n)}\rangle = \frac{n^2}{2} |\Omega^{(n)}\rangle. \quad (5.61)$$

Abbiamo inoltre osservato che questi valori possono essere modificati da rinormalizzazioni finite indipendenti in ciascuna teoria conforme. D'altra parte queste modificano i valori di energia e carica in modo correlato. Specificatamente, è necessario mettere a zero il valore dell'energia del vuoto in ogni livello come richiesto dall'invarianza conforme. Ridefiniamo quindi il potenziale chimico:

$$\mu_{(n)} \rightarrow \mu_{(n)} + n = \frac{1}{2}; \quad (5.62)$$

questo cambia il corrispondente valore della carica del vuoto, ottenendo,

$$\hat{\rho}_0^{(n)} |\Omega^{(n)}\rangle = \left(s_n + \frac{1}{2} \right) |\Omega^{(n)}\rangle = n |\Omega^{(n)}\rangle, \quad (5.63)$$

$$\hat{L}_0^{(n)} |\Omega^{(n)}\rangle = 0. \quad (5.64)$$

In conclusione, il momento angolare intrinseco s_n determina una modifica del potenziale chimico relativo fra i livelli di Landau, che implica una carica del vuoto non nulla $Q = n$ nel livello n , dopo aver effettuato le necessarie rinormalizzazioni della teoria conforme ($\langle \Omega^{(n)} | \hat{L}_0^{(n)} | \Omega^{(n)} \rangle = 0$).

Confrontiamo questo risultato con la predizione della teoria effettiva (3.68) che prevede un contributo "geometrico" alla carica del livello n pari a:

$$Q = \nu s_n \chi = s_n = n + \frac{1}{2}, \quad (5.65)$$

dove $\nu = 1$ per il contributo di un singolo livello e $\chi = 1$ per la geometria del disco. Osserviamo quindi che il risultato per Q nella teoria conforme di bordo (5.63) è in accordo con la predizione della teoria effettiva con bordo di Abanov, Gromov e Jensen [50], a parte per una costante n -indipendente. Questa costante corrisponde all'arbitrarietà per rinormalizzazioni finite della carica globale.

Notiamo, inoltre, che non è possibile effettuare ulteriori rinormalizzazioni in una singola teoria conforme, indipendentemente dalle altre. In base alla discussione precedente, occorrerebbe introdurre una perturbazione del potenziale confinante che abbia valore d'aspettazione nullo su certi livelli e non nullo su altri. Data la forma dei polinomi di Hermite nelle funzioni d'onda al bordo, (5.6), questa perturbazione dovrebbe avere un andamento oscillante al bordo che non permetterebbe la linearizzazione alla superficie di Fermi. In particolare, una regione con pendenza negativa $dV/dr < 0$, $r \sim R$, corrisponderebbe ad una relazione di dispersione antichirale per le eccitazioni di bordo. Queste eccitazioni interagirebbero a coppie chirali-antichirali determinando una teoria di bordo massiva che scompare nel limite infrarosso (il cosiddetto fenomeno della *edge reconstruction* [66]).

In conclusione, abbiamo trovato un'interpretazione del momento angolare intrinseco s_n nella teoria conforme al bordo, che è analoga a quella dell'effetto Casimir. Siamo quindi in presenza di una quantità fisica universale, a meno di una costante; in particolare sono universali le differenze Δs fra due specie di eccitazioni. Questa universalità è meno forte di quella della conducibilità Hall, dove la relazione con l'anomalia chirale ne determina la completa indipendenza dalle condizioni di rinormalizzazione.

Nell'analisi del capitolo 3 dell'azione effettiva, avevamo affermato che i termini locali di bordo parametrizzati da s nell'azione di Wen-Zee erano non universali. L'analisi di questo capitolo ha mostrato invece che in presenza di più modi di eccitazioni al bordo, come per n livelli di Landau, le differenze nei valori di s sono universali e quindi fisicamente rilevanti. Questo risultato è dovuto allo studio di altri osservabili (l'energia) oltre quelli direttamente deducibili dall'azione (la carica).

5.3 Fluttuazioni di bordo e simmetria W_∞ nel bulk

In questa sezione, i risultati del limite al bordo discussi precedentemente saranno riprodotti dallo studio della simmetria del fluido incompressibile nel bulk, la simmetria W_∞ dei diffeomorfismi che preservano l'area. Nella sezione 4.2.1, abbiamo mostrato che tali trasformazioni a livello quantistico inducono un'espressione non locale per la variazione della densità, le parentesi di Moyal (4.31). Vedremo che le eccitazioni di bordo sono derivabili direttamente dallo sviluppo in $1/B$ di questa espressione.

Osserviamo inoltre che l'analisi svolta nella sezione 5.1 si limita allo studio della teoria conforme dell'effetto Hall intero per il quale la teoria microscopica è esplicitamente nota dai livelli di Landau. Lo studio della simmetria W_∞ permetterà di estendere l'analisi delle eccitazioni di bordo al caso del FQHE.

5.3.1 Derivazione delle fluttuazioni di bordo nell'IQHE

Ricordiamo dal Cap. 4 la variazione della densità nel primo livello di Landau sotto trasformazioni W_∞ , (4.31), espressa dalle parentesi di Moyal:

$$\delta\rho(z, \bar{z}) = i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\hbar)^n}{B^n n!} (\partial_{\bar{z}}^n \rho \partial_z^n w - \partial_z^n \rho \partial_{\bar{z}}^n w) = \{\rho, w\}_M. \quad (5.66)$$

Notiamo che l'espressione non è operatoriale in quanto in essa compaiono i valori d'aspettazione sullo stato fondamentale dell'operatore densità $\hat{\rho}$ e dell'operatore \hat{w} , generatore delle trasformazioni (4.30).

Consideriamo prima il caso $\nu = 1$. Il primo termine nello sviluppo (5.66) delle fluttuazioni $\delta\rho$ vale

$$\delta\rho^{(0)} = \frac{2i}{B} \bar{\partial}\rho\partial w + h.c., \quad (5.67)$$

dove ρ è la densità dello stato fondamentale nella geometria del disco, $\rho = \rho^{(0)}(r)$. La funzione $w = w^{(0)}$ data in (4.30) in generale è un polinomio arbitrario nelle coordinate (z, \bar{z}) . La (5.67) si può riscrivere nelle coordinate polari del disco, $z = re^{i\theta}$, nel seguente modo:

$$\delta\rho^{(0)} = \frac{1}{rB} \partial_r \rho^{(0)}(r) \partial_\theta w^{(0)}. \quad (5.68)$$

Mostriamo che lo sviluppo in $1/B$ della (5.66) genera naturalmente lo sviluppo $1/R$ delle eccitazioni di bordo discusso precedentemente; in particolare al primo ordine $\mathcal{O}(1)$ si ottengono i modi della densità (5.14) nella teoria conforme. All'ordine dominante, la densità della goccia di fluido nel primo livello di Landau può essere approssimata dalla forma a scalino, $\rho^{(0)} = \frac{B}{2\pi} \Theta(R - r)$, (figura 2.6). Sviluppando la funzione generatrice nella forma,

$$w^{(0)}(r, \theta) = \sum_n w_n(r) e^{in\theta}, \quad (5.69)$$

la variazione (5.68) della densità diventa:

$$\delta\rho^{(0)} = -\frac{1}{r} \frac{1}{2\pi} \delta(r - R) \sum_n w_n(r) in e^{in\theta}. \quad (5.70)$$

Definiamo i momenti dello sviluppo di Fourier sul bordo, integrando sulla coordinata radiale come nel paragrafo 5.1:

$$\delta\rho_k^{(0)} = \int d\theta e^{-ik\theta} \int dr r \delta\rho^{(0)}. \quad (5.71)$$

Sostituendo la (5.68) nella (5.71), si ottiene:

$$\delta\rho_k = -\frac{1}{2\pi} ik w_k(r) \Big|_{r=R}, \quad (\nu = 1). \quad (5.72)$$

Osserviamo che tali momenti descrivono le fluttuazioni bosoniche al bordo senza aver assunto una forma localizzata della funzione generatrice $w(z, \bar{z})$. Queste fluttuazioni rappresentano le ampiezze sullo stato fondamentale delle cariche bosoniche $\hat{\rho}_k$ della teoria conforme vista nella sezione 5.1. Specificatamente,

$$\delta\rho_k^{CFT} = i \langle \Omega | [\hat{\rho}_k^{CFT}, \hat{\rho}_{-m}^{CFT}] | \Omega \rangle \sim i \delta_{km} k. \quad (5.73)$$

Le relazioni (5.72) (5.73) mostrano il legame diretto tra la simmetria W_∞ nel bulk e le eccitazioni della teoria conforme con $c = 1$ al bordo.

Notiamo inoltre che la variazione della carica è nulla, $\delta\rho_0 = 0$. Questo risultato è dovuto al fatto che il numero di elettroni rimane costante per i diffeomorfismi che preservano l'area della goccia, descrivendo così un insieme canonico.

Analizziamo adesso le fluttuazioni W_∞ sul secondo livello di Landau e confrontiamole con quelle ottenute nella sezione 5.1. Ci occorre l'analogo delle parentesi di Moyal per le variazioni della densità. Abbiamo:

$$\delta\rho^{(1)} = i \langle \Omega^{(1)} | [\hat{\rho}^{(1)}, \hat{w}^{(1)}] | \Omega^{(1)} \rangle, \quad (5.74)$$

dove $\hat{\rho}^{(1)}$ è l'operatore densità del secondo livello, mentre il generatore delle fluttuazioni è

$$\hat{w}^{(1)} = \int d^2z \hat{\Psi}^{(1)\dagger} w(z, \bar{z}) \hat{\Psi}^{(1)}. \quad (5.75)$$

La relazione tra le funzioni d'onda del primo e secondo livello (5.38) ci permette di scrivere le espressioni:

$$\hat{\rho}^{(1)} = (1 + \partial\bar{\partial}) \hat{\rho}^{(0)} \quad (5.76)$$

e

$$\hat{w}^{(1)} = \int d^2z \hat{\Psi}^{(0)\dagger} [(1 + \partial\bar{\partial}) w] \hat{\Psi}^{(0)}. \quad (5.77)$$

In queste espressioni, abbiamo identificato gli spazi di Hilbert isomorfi dei due livelli di Landau. Le relazioni differenziali (5.76), (5.77) commutano con la definizione delle parentesi di Moyal (5.66) perché agiscono sui rispettivi argomenti delle funzioni. Possiamo quindi esprimere le variazioni della densità del secondo livello ancora con le parentesi di Moyal (5.66) mediante la sostituzione:

$$\rho^{(1)} = (1 + \partial\bar{\partial}) \rho^{(0)}, \quad w^{(1)} = (1 + \partial\bar{\partial}) w^{(0)}. \quad (5.78)$$

Considerando ancora il termine dominante in $1/B$, abbiamo:

$$\delta\rho^{(1)} = \frac{1}{rB} (\partial_r \rho^{(1)}) \partial_\theta w^{(1)}, \quad (5.79)$$

e quindi i momenti (5.71) diventano

$$\delta\rho_k^{(1)} \simeq \frac{1}{B} \int dr \int d\theta e^{-ik\theta} \left(\partial_r \left(1 + \frac{\Delta}{4} \right) \rho^{(0)}(r) \right) \partial_\theta \left(1 + \frac{\Delta}{4} \right) w(r, \theta), \quad (5.80)$$

dove Δ è il laplaciano. Integrando per parti ed approssimando ancora $\rho^{(0)}$ con la distribuzione a scalino, si ottiene all'ordine dominante in $1/R$:

$$\delta\rho_k^{(1)} \simeq -\frac{1}{2\pi} ik \left(1 + \frac{\Delta}{4}\right)^2 w_k(r) \Big|_{r=R}. \quad (5.81)$$

Consideriamo adesso il sistema con il primo e il secondo livello pieni, ovvero $\nu = 2$; le ampiezze dei momenti delle fluttuazioni di densità sono data da:

$$\delta\rho_k^{(\nu=2)} = \delta\rho_k^{(0)} + \delta\rho_k^{(1)} = -\frac{1}{2\pi} ik \left[w_k(r) + \left(1 + \frac{\Delta}{4}\right)^2 w_k(r) \right] \Big|_{r=R}. \quad (5.82)$$

Notiamo che è possibile estrarre il contributo di un solo livello di Landau agendo sulla dipendenza dalla coordinata radiale di $w_k(r)$ per $r = R$. Ad esempio, prendendo $w_k(R) = 0$ eliminiamo i contributi alle ampiezze dal primo livello, viceversa scegliendo $\left(1 + \frac{\Delta}{4}\right)^2 w_k(r) \Big|_{r=R} = 0$ eliminiamo quelli del secondo. Questo risultato è in accordo con quanto trovato nella descrizione operatoriale delle cariche conformi $\hat{\rho}_k$ nella sezione 5.1: in ambedue i casi, la componente del singolo livello di Landau può essere selezionata utilizzando l'ortogonalità delle funzioni radiali.

Analoghe formule si ottengono per i livelli di Landau superiori; ad esempio, utilizzando ancora le relazioni tra le funzioni d'onda si ottiene l'espressione del terzo livello,

$$\delta\rho^{(2)} = \left[1 + 2\partial\bar{\partial} + \frac{1}{2} (\partial\bar{\partial})^2 \right] \hat{\rho}^{(0)}. \quad (5.83)$$

In questo paragrafo, abbiamo trascurato le correzioni sottodominanti $\mathcal{O}(1/R)$ alla densità della goccia di fluido e non abbiamo considerato le fluttuazioni indotte dai termini superiori $\mathcal{O}(\hbar^2/B^2)$ nelle parentesi di Moyal (5.66).

5.3.2 Termini di ordine superiore nelle parentesi di Moyal

Discutiamo adesso il contributo del secondo termine $1/B^2$ delle parentesi di Moyal (4.31). Nel caso del primo livello di Landau abbiamo:

$$\delta\rho^{II} = \frac{2i}{B^2} [(\bar{\partial}^2 \rho^{(0)}) \partial^2 w^{(0)} - h.c.]. \quad (5.84)$$

L'operatore $\bar{\partial}$ su $\rho = \rho^{(0)}(r)$ agisce come $z\partial/\partial r^2$. Si ottiene dunque

$$\delta\rho^{II} = \frac{2i}{B^2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r^2} \right)^2 \rho^{(0)} \right] (z^2 \partial^2 - \bar{z}^2 \bar{\partial}^2) w^{(0)} \quad (5.85)$$

L'azione dell'operatore,

$$D_2 = z^2 \partial^2 - \bar{z}^2 \bar{\partial}^2 = (z\partial - \bar{z}\bar{\partial}) (z\partial + \bar{z}\bar{\partial} - 1) \quad (5.86)$$

su un polinomio generico $z^n \bar{z}^m$ è data da:

$$D_2 z^n \bar{z}^m = (n - m)(n + m - 1) z^n \bar{z}^m. \quad (5.87)$$

Valutiamo adesso il contributo del secondo ordine alle ampiezze $\delta\rho_k$ delle fluttuazioni di bordo integrando la (5.84) in r e in θ . Utilizzando lo sviluppo (5.69) si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta\rho_k^{II} &= \int dr r \int d\theta e^{-ik\theta} \delta\rho^{II} \\ &= \frac{i}{2B^2} \int dr \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \rho^{(0)} \right) \right] \sum_m c_{k,m} k (k + 2m - 1) r^{2m+k}, \end{aligned} \quad (5.88)$$

dove abbiamo riscritto

$$w_k(r) = \sum_m c_{k,m} z^k (z\bar{z})^m. \quad (5.89)$$

All'ordine dominante possiamo sostituire la forma a scalino per la densità $\rho^{(0)}$ nella (5.88) ottenendo:

$$\delta\rho_k^{II} = \frac{ik}{8\pi} \frac{\ell_B^2}{R} \sum_m c_{k,m} (k + 2m - 1) (k + 2m) r^{k+2m-1} \Big|_{r=R}. \quad (5.90)$$

Il secondo termine nello sviluppo in $1/B$ delle parentesi di Moyal si caratterizza rispetto al primo termine (5.72) dal fatto di essere $\mathcal{O}(1/R)$ quindi sottodominante, come aspettato, ed inoltre dall'aver una dipendenza diversa da θ , ovvero dal modo di Fourier k . In effetti, si può mostrare che l'operatore D_2 (5.87) possiede lo stesso spettro del generatore di spin 3 dell'algebra W_∞ realizzata nella teoria conforme al bordo [56].

In conclusione, abbiamo mostrato che il primo termine dello sviluppo delle parentesi di Moyal produce naturalmente le fluttuazioni di bordo della teoria conforme, mentre i termini successivi sono correzioni sottodominanti $\mathcal{O}(1/R^k)$ corrispondenti a campi conformi di spin più elevato. Lo studio completo delle correzioni $1/B^k$ e l'identificazione precisa dei campi conformi sono lasciati agli sviluppi successivi oltre il lavoro di questa tesi.

5.3.3 Fluttuazioni al bordo negli stati frazionari

La descrizione delle eccitazioni mediante le trasformazioni W_∞ e le parentesi di Moyal (5.66) resta valida nel caso frazionario $\nu < 1$, come discusso nel capitolo 4. Il primo termine dello sviluppo $1/B$ assume la stessa forma (5.67) e può essere valutato inserendo la corrispondente espressione della densità nello stato fondamentale con $\nu < 1$. Per esempio la densità dello stato di Laughlin con $\nu = 1/p$ ha ancora la forma a scalino all'ordine dominante in $1/R$:

$$\rho(r) \simeq \frac{B}{2\pi p} \Theta(R - r). \quad (5.91)$$

Considerando la fluttuazione $w^{(0)}$ (5.69) e sostituendo nella (5.67), si ottiene:

$$\delta\rho^{(\nu=1/p)} = -\frac{1}{r} \frac{1}{2\pi} \delta(r - R) \sum_n w_n(r) e^{in\theta}. \quad (5.92)$$

Valutando i modi di Fourier e integrando in r si ottengono le ampiezze,

$$\delta\rho_k^{(\nu=1/p)} = -\frac{1}{2\pi p} ik w_k(r) \Big|_{r=R}. \quad (5.93)$$

Questa espressione estende il legame tra la simmetria W_∞ e la teoria conforme al bordo al caso del fluido di Laughlin. Notiamo che diversamente dal caso dell'effetto Hall intero $\nu = n$ non è possibile estrarre altre ampiezze $\mathcal{O}(1)$ utilizzando la dipendenza radiale di $w_k(r)$. Questo risultato conferma che lo stato di Laughlin è descritto da un'unica teoria conforme con $c = 1$.

5.4 Conclusioni

In questo capitolo abbiamo analizzato le proprietà universali degli osservabili dell'effetto Hall quantistico, approfondendo il loro legame con la simmetria conforme della teoria di bordo. In particolare ci siamo focalizzati sullo studio del parametro \bar{s} caratterizzante il momento angolare intrinseco delle eccitazioni.

Nella prima parte abbiamo derivato operativamente la teoria conforme di bordo della teoria microscopica dell'effetto Hall intero, ovvero i livelli di Landau, superando i limiti dell'analisi [9]. La teoria conforme di bordo per $\nu = n$ è descritta da n cariche conformi indipendenti $\hat{\rho}^{CFT(i)}$, $i = 0, \dots, n - 1$, i cui momenti $\hat{\rho}_k^{CFT(i)}$ soddisfano l'algebra delle correnti con carica centrale $c = 1$. Abbiamo infine notato come queste cariche possano essere estratte dall'operatore densità del bulk prendendo diversi momenti radiali.

Nella seconda parte abbiamo confermato ed esteso il risultato di Gromov, Jensen e Abanov [50] sul significato di \bar{s} nella teoria conforme al bordo. Questa analisi ci ha permesso di mostrare il carattere universale di questa quantità, in particolare della differenza Δs tra due livelli di Landau, corrispondente ad una differenza di carica dello stato fondamentale invariante conforme. Abbiamo inoltre mostrato la robustezza del risultato rispetto a modifiche del potenziale confinante e rinormalizzazioni finite.

Infine nell'ultima parte abbiamo mostrato come collegare le variazioni della densità indotte dalla simmetria W_∞ del bulk alle cariche conformi di bordo. Tale relazione ci ha permesso di verificare la presenza di una teoria conforme con $c = 1$ al bordo di una goccia di fluido di Laughlin.

L'analisi presentata in questo capitolo può avere notevoli sviluppi. Può permettere lo studio sistematico delle teorie conformi delle eccitazioni di bordo nel caso del FQHE, in particolare degli stati di Jain e verificare la teoria multicomponente descritta al paragrafo 3.1.1. Inoltre lo studio delle correzioni $\mathcal{O}(1/R^k)$, $k \geq 1$ può determinare gli operatori di spin elevato nella teoria conforme al bordo che corrispondono allo sviluppo multipolare nel bulk descritto al paragrafo 3.2.2.

Appendice A

Calcolo funzione di correlazione secondo livello di Landau

La funzione di correlazione nel secondo livello,

$$G^{(1)}(x, \theta_1, \theta_2) = \langle \Omega^{(1)} | \hat{\Psi}^{(1)\dagger} ((R+x) e^{i\theta_1}) \hat{\Psi}^{(1)} ((R+x) e^{i\theta_2}) | \Omega^{(1)} \rangle, \quad (\text{A.1})$$

con

$$\begin{aligned} |\Omega^{(1)}\rangle &= \hat{c}_{-1}^{(1)\dagger} \dots \hat{c}_{R^2-1}^{(1)\dagger} |0\rangle, \\ \hat{\Psi}^{(1)}((R+x) e^{i\theta}) &= \sum_{m=-1}^{\infty} \hat{c}_m^{(1)} \varphi_{1,m}((R+x)) e^{im\theta}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

diventa:

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x, \theta_1, \theta_2) &= \frac{e^{-i\phi}}{\pi (R+x)^2} \sum_{m=0}^{R^2} \frac{((R+x)^2 e^{i\phi})^m ((R+x)^4 - 2m(R+x)^2 + m^2)}{m!} e^{-(R+x)^2} \\ &= G_a^{(1)} + G_b^{(1)} + G_c^{(1)} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

dove $\phi = \theta_{21} = \theta_2 - \theta_1$. Ricostruendo delle serie esponenziali troncate e sostituendo la definizione della funzione gamma incompleta,

$$\gamma(M, x) = \Gamma(M) \sum_{m=M}^{\infty} \frac{x^m}{m!}, \quad (\text{A.4})$$

con Γ la gamma di Eulero, si ottiene

$$\begin{aligned}
G_a^{(1)}(x, \phi) &= \frac{e^{-(R+x)^2+\xi}\xi e^{-2i\phi}}{\pi} \left(1 - \frac{\gamma(R^2+1, \xi)}{R^2!}\right), \\
G_b^{(1)}(x, \phi) &= -2 \frac{e^{-(R+x)^2+\xi} (R+x)^2}{\pi} \left(1 - \frac{\gamma(R^2, \xi)}{(R^2-1)!}\right), \\
G_c^{(1)}(x, \phi) &= \frac{e^{-(R+x)^2+\xi}}{\pi} \left[1 - \frac{\gamma(R^2, \xi)}{(R^2-1)!} + \xi \left(1 - \frac{\gamma(R^2, \xi)}{(R^2-1)!} - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\gamma(R^2, \xi)}{(R^2-1)!}\right)\right],
\end{aligned} \tag{A.5}$$

dove $\xi = (R+x)^2 e^{i\phi}$. Mettendo insieme i pezzi e utilizzando la proprietà della γ ,

$$\gamma(R^2+1, \xi) = R^2 \gamma(R^2, \xi) - \xi^{R^2} e^{-\xi} \tag{A.6}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
G^{(1)} &= A(x, \phi; R) \left[e^{-i\phi} + e^{i\phi} - 2 + \frac{1}{(R+x)^2} \frac{\gamma(R^2, \xi)}{(R^2-1)!} \left(2 - e^{-i\phi} - \frac{1+\xi}{(R+x)^2}\right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\xi^{R^2} e^{-\xi}}{R^2!} e^{-\xi} \left(1 - \frac{R^2}{\xi} e^{2i\phi}\right) \right]
\end{aligned} \tag{A.7}$$

con

$$A(x, \phi; R) = \frac{(R+x)^2 e^{-(R+x)^2+\xi}}{\pi}. \tag{A.8}$$

Mandiamo adesso $R \rightarrow \infty$ utilizzando il seguente sviluppo asintotico della γ :

$$\begin{cases} \gamma(L, \lambda L) \underset{L \rightarrow \infty}{\simeq} -(\lambda L)^L e^{-\lambda L} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-L)^k b_k(\lambda)}{(\lambda L - L)^{2k+1}}, \\ b_0(\lambda) = 1, \quad b_1(\lambda) = \lambda, \quad b_k(\lambda) = \lambda(1-\lambda) b'_{k-1}(\lambda) + (2k-1)\lambda b_{k-1}(\lambda). \end{cases} \tag{A.9}$$

Sostituendo la precedente espressione in (A.7) e fermandoci al primo contributo non nullo che consiste nello sviluppare le γ fino a $k=1$ nella (A.9), si ottiene infine:

$$G^{(1)} \simeq \frac{4x^2 e^{-2x^2} e^{i\phi(R^2+1/2)}}{\sqrt{2\pi^3} R} \frac{1}{2i \sin(\phi/2)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^2}\right). \tag{A.10}$$

Bibliografia

- [1] A. A. Belavin, Alexander M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov. Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory. *Nucl. Phys.*, B241:333–380, 1984.
- [2] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Senechal. *Conformal Field Theory*. Graduate Texts in Contemporary Physics. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [3] Paul H. Ginsparg. APPLIED CONFORMAL FIELD THEORY. In *Les Houches Summer School in Theoretical Physics: Fields, Strings, Critical Phenomena Les Houches, France, June 28-August 5, 1988*, pages 1–168, 1988.
- [4] Giuseppe Mussardo. *Statistical field theory*. Oxford Univ. Press, New York, NY, 2010.
- [5] K. von Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper. New method for high accuracy determination of the fine structure constant based on quantized Hall resistance. *Phys. Rev. Lett.*, 45:494–497, 1980.
- [6] R. E. Prange and S. M. Girvin. *The Quantum Hall Effect*. Springer, Berlin, 1990.
- [7] D. C. Tsui, H. L. Stormer, and A. C. Gossard. Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit. *Phys. Rev. Lett.*, 48:1559–1562, 1982.
- [8] Horst L. Stormer, Daniel C. Tsui, and Arthur C. Gossard. The fractional quantum Hall effect. *Rev. Mod. Phys.*, 71:S298–S305, 1999.
- [9] Andrea Cappelli, Gerald V. Dunne, Carlo A. Trugenberger, and Guillermo R. Zemba. Conformal symmetry and universal properties of quantum Hall states. *Nucl. Phys.*, B398:531–567, 1993.

- [10] B. I. Halperin. Quantized Hall conductance, current carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential. *Phys. Rev.*, B25:2185–2190, 1982.
- [11] R. B. Laughlin. Quantized Hall conductivity in two-dimensions. *Phys. Rev.*, B23:5632–5733, 1981.
- [12] Michael Stone. Schur Functions, Chiral Bosons and the Quantum Hall Effect Edge States. *Phys. Rev.*, B42:8399–8404, 1990.
- [13] Michael Stone. Edge Waves in the Quantum Hall Effect. *Annals Phys.*, 207:38–52, 1991.
- [14] Michael Stone. Vertex operators in the quantum Hall effect. *Int. J. Mod. Phys.*, B5:509–528, 1991.
- [15] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics*. 2003.
- [16] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs. Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential. *Phys. Rev. Lett.*, 49:405–408, 1982.
- [17] Qian Niu, D. J. Thouless, and Yong-Shi Wu. QUANTIZED HALL CONDUCTANCE AS A TOPOLOGICAL INVARIANT. *Phys. Rev.*, B31:3372–3377, 1985.
- [18] Paul H. Ginsparg. APPLICATIONS OF TOPOLOGICAL AND DIFFERENTIAL GEOMETRIC METHODS TO ANOMALIES IN QUANTUM FIELD THEORY. In *XVI GIFT International Seminar on Theoretical Physics: New Perspectives in Quantum Field Theory Jaca (Huesca), Spain, June 3-8, 1985*, 1985.
- [19] R. B. Laughlin. Anomalous quantum Hall effect: An Incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations. *Phys. Rev. Lett.*, 50:1395, 1983.
- [20] J. M. Leinaas and J. Myrheim. On the theory of identical particles. *Nuovo Cim.*, B37:1–23, 1977.
- [21] Frank Wilczek, editor. *Fractional statistics and anyon superconductivity*. 1990.

- [22] J. K. Jain. Composite fermion approach for the fractional quantum Hall effect. *Phys. Rev. Lett.*, 63:199–202, 1989.
- [23] R. de Picciotto, M. Reznikov, M. Heiblum, V. Umansky, G. Bunin, and D. Mahalu. Direct observation of a fractional charge. *Nature*, 389:162–164, 1997.
- [24] L. Saminadayar, D. C. Glattli, Y. Jin, and B. Etienne. Observation of the $e/3$ Fractionally Charged Laughlin Quasiparticle. *Phys. Rev. Lett.*, 79:2526–2529, 1997.
- [25] Bertrand I. Halperin, Ady Stern, Izhar Neder, and Bernd Rosenow. Theory of the Fabry-Pérot quantum Hall interferometer. *Phys. Rev.*, B83:5440–5457, 2011.
- [26] C. d. C. Chamon, D. E. Freed, S. A. Kivelson, S. L. Sondhi, and X. G. Wen. Two point-contact interferometer for quantum Hall systems. *eprint arXiv:cond-mat/9607195*, 1996.
- [27] W. E. Chickering, J. P. Eisenstein, L. N. Pfeiffer, and K. W. West. Thermopower of two-dimensional electrons at filling factors $\nu = 3/2$ and $5/2$. *Phys. Rev.*, B81:5319–5328, Jun 2010.
- [28] J. Frohlich and A. Zee. Large scale physics of the quantum Hall fluid. *Nucl. Phys.*, B364:517–540, 1991.
- [29] X. G. Wen. *Quantum field theory of many-body systems: From the origin of sound to an origin of light and electrons*. 2004.
- [30] David Tong. *Lectures on the Quantum Hall Effect*. 2016.
- [31] Gerald V. Dunne. Aspects of Chern-Simons theory. In *Topological Aspects of Low-dimensional Systems: Proceedings, Les Houches Summer School of Theoretical Physics, Session 69: Les Houches, France, July 7-31 1998*, 1998.
- [32] Xiao-Gang Wen. Topological orders and edge excitations in FQH states. *Adv. Phys.*, 44(5):405–473, 1995.
- [33] Michael Levin and Ady Stern. Classification and analysis of two dimensional abelian fractional topological insulators. *Phys. Rev.*, B86:115131, 2012.
- [34] Michael Stone. Edge waves and chiral bosonization. In *Trieste Conference on Quantum Field Theory and Condensed Matter Physics Trieste, Italy, May 13-16, 1991*, 1991.

- [35] R. Floreanini and R. Jackiw. Self-dual fields as charge-density solitons. *Phys. Rev. Lett.*, 59:1873–1876, Oct 1987.
- [36] Michael B. Green, John H. Schwarz, and Edward Witten. *Superstring Theory Vol. 1,2*. Cambridge University Press, 2012.
- [37] Gregory W. Moore and N. Read. Nonabelions in the fractional quantum Hall effect. *Nucl. Phys.*, B360:362–396, 1991.
- [38] N. Read and Dmitry Green. Paired states of fermions in two-dimensions with breaking of parity and time reversal symmetries, and the fractional quantum Hall effect. *Phys. Rev.*, B61:10267, 2000.
- [39] Andrea Cappelli, Marina Huerta, and Guillermo R. Zemba. Thermal transport in chiral conformal theories and hierarchical quantum Hall states. *Nucl. Phys.*, B636:568–582, 2002.
- [40] Michael Stone. Gravitational Anomalies and Thermal Hall effect in Topological Insulators. *Phys. Rev.*, B85:184503, 2012.
- [41] X. G. Wen and A. Zee. Shift and spin vector: New topological quantum numbers for the Hall fluids. *Phys. Rev. Lett.*, 69:953–956, 1992. [Erratum: *Phys. Rev. Lett.* 69,3000(1992)].
- [42] J. Frohlich and U. M. Studer. Gauge invariance and current algebra in nonrelativistic many body theory. *Rev. Mod. Phys.*, 65:733–802, 1993.
- [43] N. Read. Non-Abelian adiabatic statistics and Hall viscosity in quantum Hall states and $p(x) + ip(y)$ paired superfluids. *Phys. Rev.*, B79:045308, 2009.
- [44] N. Read and E. H. Rezayi. Hall viscosity, orbital spin, and geometry: paired superfluids and quantum Hall systems. *Phys. Rev.*, B84:085316, 2011.
- [45] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Theory of Elasticity*, volume 7 of *Course of Theoretical Physics*. Elsevier Butterworth-Heinemann, New York, 1986.
- [46] Daniel Z. Freedman and Antoine Van Proeyen. *Supergravity*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 2012.
- [47] Sean M. Carroll. *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. 2004.

- [48] Andrea Cappelli and Enrico Randellini. Multipole Expansion in the Quantum Hall Effect. *JHEP*, 03:105, 2016.
- [49] Alexander G. Abanov and Andrey Gromov. Electromagnetic and gravitational responses of two-dimensional noninteracting electrons in a background magnetic field. *Phys. Rev.*, B90(1):014435, 2014.
- [50] Andrey Gromov, Kristan Jensen, and Alexander G. Abanov. Boundary effective action for quantum Hall states. *Phys. Rev. Lett.*, 116(12):126802, 2016.
- [51] Taylor L. Hughes, Robert G. Leigh, and Onkar Parrikar. Torsional Anomalies, Hall Viscosity, and Bulk-boundary Correspondence in Topological States. *Phys. Rev.*, D88(2):025040, 2013.
- [52] J. E. Avron, R. Seiler, and P. G. Zograf. Viscosity of quantum Hall fluids. *Phys. Rev. Lett.*, 75:697–700, 1995.
- [53] Carlos Hoyos and Dam Thanh Son. Hall Viscosity and Electromagnetic Response. *Phys. Rev. Lett.*, 108:066805, 2012.
- [54] Luis Alvarez-Gaume and Edward Witten. Gravitational Anomalies. *Nucl. Phys.*, B234:269, 1984.
- [55] Andrea Cappelli, Carlo A. Trugenberger, and Guillermo R. Zemba. Infinite symmetry in the quantum Hall effect. *Nucl. Phys.*, B396:465–490, 1993.
- [56] Andrea Cappelli, Carlo A. Trugenberger, and Guillermo R. Zemba. $W(1+\infty)$ dynamics of edge excitations in the quantum Hall effect. *Annals Phys.*, 246:86–120, 1996.
- [57] J. Zak. Magnetic Translation Group. *Phys. Rev.*, 134:A1602–A1606, 1964.
- [58] Michael Flohr and Raimund Varnhagen. Infinite symmetry in the fractional quantum Hall effect. *J. Phys.*, A27:3999–4010, 1994.
- [59] F. D. M. Haldane. Fractional quantization of the Hall effect: A Hierarchy of incompressible quantum fluid states. *Phys. Rev. Lett.*, 51:605–608, 1983.
- [60] F. D. M. Haldane. The hierarchy of fractional states and numerical studies, *in* The Quantum Hall Effect. 1990.

- [61] Andrea Cappelli, Carlo A. Trugenberger, and Guillermo R. Zemba. Stable hierarchical quantum hall fluids as $W(1+\infty)$ minimal models. *Nucl. Phys.*, B448:470, 1995.
- [62] A. Cappelli, Carlo A. Trugenberger, and G. R. Zemba. $W(1+\infty)$ minimal models and the hierarchy of the quantum Hall effect. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 45A:112–119, 1996. [Lect. Notes Phys.469,249(1996)].
- [63] Andrea Campoleoni, Stefan Fredenhagen, Stefan Pfenninger, and Stefan Theisen. Asymptotic symmetries of three-dimensional gravity coupled to higher-spin fields. *JHEP*, 11:007, 2010.
- [64] Lev Davidovich Landau and E. M. Lifshits. *Quantum Mechanics*, volume v.3 of *Course of Theoretical Physics*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 1991.
- [65] Gerald V. Dunne. Edge asymptotics of planar electron densities. *Int. J. Mod. Phys.*, B8:1625, 1994.
- [66] Jianhui Wang, Yigal Meir, and Yuval Gefen. Edge reconstruction in the $\nu=2/3$ fractional quantum hall state. *Phys. Rev. Lett.*, 111:246803, Dec 2013.