

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE
Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN
SCIENZE FISICHE E ASTROFISICHE

Tesi di Laurea Specialistica

**Funzioni di partizione e criteri di stabilità
negli isolanti topologici**

**Partition Functions and Stability Criteria in
Topological Insulators**

Candidato: *Enrico Randellini*

Relatore: *Dott. Andrea Cappelli*

Anno Accademico 2011/12

Indice

Introduzione	1
1 Teorie di campo con simmetria conforme	5
1.1 Invarianza conforme in d dimensioni	6
1.1.1 Generatori del gruppo conforme	6
1.1.2 Il tensore di energia - impulso	7
1.2 Invarianza conforme in due dimensioni	7
1.2.1 Algebra conforme bidimensionale	7
1.2.2 Campi primari e funzioni di correlazione	9
1.2.3 Identità di Ward e OPE dei campi primari	10
1.2.4 Quantizzazione radiale e algebra di Virasoro	12
1.2.5 Spazio di Hilbert degli stati conformi	15
1.2.6 Cenni alle rappresentazioni dell'algebra di Virasoro	18
1.3 Funzione di partizione ed invarianza modulare	20
2 L' Effetto Hall quantistico	23
2.1 Introduzione	23
2.2 L'effetto Hall quantistico intero	26
2.3 L'effetto Hall quantistico frazionario	30
2.4 Incomprimibilità e stati di bordo del fluido Hall	34
2.5 Esperimenti sulla carica e statistica frazionaria	37
3 Teorie conformi del QHE e funzioni di partizione	41
3.1 Aspetti generali della teoria di Chern-Simons	42
3.2 CFT del fermione di Weyl e spettro IQHE	44
3.3 L'anomalia chirale	46
3.4 CFT del bosone chirale e spettro FQHE	47
3.5 Funzioni di partizione per teorie abeliane $c = 1$ dei plateau di Laughlin	49
3.5.1 Geometria dell'anello	49
3.5.2 Condizioni di invarianza modulare	50
3.6 Funzioni di partizione per gli stati gerarchici	53

4	Isolanti e superconduttori topologici	57
4.1	Dal QHE agli isolanti e superconduttori topologici	57
4.2	Simmetria di inversione temporale e degenerazione di Kramers	58
4.3	Modelli per QSHE 2D	61
4.3.1	Modello del gradiente di sforzo di Bernevig e Zhang	61
4.3.2	Modello in pozzi quantici di HgTe/CdTe	63
4.3.3	Topologia \mathbb{Z}_2 per stati QSHE	67
4.4	Misure di conducibilità per QSHE	69
4.5	Cenni ai superconduttori topologici	70
5	Isolanti topologici interagenti in 2D	73
5.1	Teoria di Chern-Simons per isolanti topologici frazionari abeliani	74
5.1.1	Esempi di isolanti topologici frazionari abeliani	77
5.2	Stabilità degli stati di bordo: analisi microscopica	79
5.3	Stabilità degli stati di bordo: argomento del flusso	83
6	Funzioni di partizione negli isolanti topologici abeliani e criteri di stabilità	91
6.1	Funzioni di partizione per teorie $c=1$	92
6.1.1	Settori di Neveu-Schwarz e Ramond	92
6.1.2	Invarianza modulare per teorie $c=1$	98
6.2	Funzione di partizione per teorie $c=2$	100
6.2.1	Settori di Neveu-Schwarz e Ramond	100
6.2.2	Invarianza modulare per teorie $c=2$	103
6.2.3	Invarianza modulare e criteri di stabilità	104
6.2.4	Relazione spin-statistica	105
6.3	Isolanti topologici abeliani a N componenti	106
6.4	Funzione di partizione e stabilità dei superconduttori topologici	108
6.5	Conclusioni	110
A	Trasformazione dei caratteri e funzioni di partizione della CFT di bordo	115
A.1	Trasformazione dei caratteri $c=1$	115
A.2	Trasformazione dei caratteri $c=2$	116
A.3	Trasformazione dei caratteri $c = N$	119
A.4	Trasformazione delle funzioni di partizione	121

Introduzione

Nell'effetto Hall quantistico un conduttore bidimensionale è posto in campi magnetici molto intensi (~ 10 Tesla) e temperature estremamente basse (~ 10 mK). La conducibilità trasversa, o conducibilità Hall, mostra dei plateau al variare del campo magnetico dove assume dei valori interi o frazionari, in unità e^2/h , che sono molto precisi e universali [9] [10]. Questo è l'effetto Hall quantistico intero e frazionario (FQHE). Ai plateau il sistema è completamente isolante nel bulk, ma la corrente fluisce al bordo, con verso fissato dalla direzione del campo magnetico [15]. A causa di quest'ultimo il sistema non è invariante per inversione temporale (*time reversal symmetry*, *TR*). Nella teoria di Laughlin [14] il FQHE è descritto come un fluido quantistico incomprimibile di elettroni, le cui eccitazioni sono anioni, ovvero possiedono carica frazionaria e statistica quantistica frazionaria [16].

L'universalità dell'effetto Hall permette di descrivere la dinamica non-perturbativa a molti corpi per mezzo di una teoria di campo effettiva di basse energie. La statistica frazionaria può essere ottenuta dalla fase di Aharonov-Bohm di un campo di gauge abeliano con azione di Chern-Simons in $(2+1)$ -dimensioni [38]: questa teoria di campo è topologica nel senso che non descrive la propagazione delle eccitazioni locali nel bulk, ma solamente le loro fasi statistiche ed altri effetti topologici.

Il fluido incomprimibile possiede delle eccitazioni che si propagano al bordo del sistema con energie molto minori del gap. Queste hanno massa nulla e possono essere descritte da una teoria $(1+1)$ -dimensionale invariante conforme (CFT) [1] [19], equivalente alla teoria di Chern-Simons in $(2+1)$ -dimensioni [34]. Nelle CFT la simmetria infinito dimensionale di Virasoro permette di determinare completamente lo spettro delle eccitazioni anche nel caso interagente: per esempio, i plateau di Laughlin sono descritti esattamente dalla CFT con l'algebra di Virasoro estesa dall'algebra delle correnti $U(1)$. La corrente Hall si realizza nella CFT di bordo come un'anomalia chirale, ovvero come non conservazione della carica al bordo. Quando il sistema è definito nella geometria dell'anello, la carica si trasmette dal bordo chirale esterno a quello interno antichirale.

La funzione di partizione della CFT è molto utile per descrivere il sistema [43]. Essa verifica la cancellazione dell'anomalia chirale fra i due bordi ed è invariante modulare, una proprietà che assicura anche la cancellazione dell'anomalia gravitazionale.

Gli isolanti topologici sono altri sistemi recentemente scoperti sia in due che in tre

dimensioni [51], che presentano eccitazioni con proprietà topologiche. A differenza del QHE, non occorrono campi magnetici per generarli e quindi rispettano la simmetria di time-reversal TR. Questi sistemi possono essere modellizzati dall'unione di due stati Hall di spin up e spin down, formando il *quantum spin Hall effect* (QSHE): i suoi stati di bordo sono elettroni con spin up e down che si propagano con chiralità opposte. La corrente Hall è nulla, mentre quella di spin-Hall è diversa da zero [55] [59]. Nell'isolante topologico, la simmetria $U(1)$ di spin è rotta a una simmetria \mathbb{Z}_2 di parità di spin per effetto dell'accoppiamento spin-orbita, mentre la simmetria time-reversal è preservata.

La presenza degli stati di bordo a massa nulla distingue un isolante topologico da uno banale. In generale, questi stati non sono robusti come nel FQHE, ma possono decadere se alcune simmetrie discrete del sistema vengono rotte, come la simmetria time-reversal. Si parla quindi di fasi topologiche della materia protette da simmetrie [80].

L'analisi della stabilità di questi stati è il tema centrale di questo lavoro di tesi. Il problema della stabilità degli isolanti topologici è stato risolto nel caso di elettroni non interagenti o debolmente interagenti utilizzando la degenerazione ineliminabile degli stati di spin semintero in presenza di simmetria TR (doppietti di Kramers) [56]. Si dimostra che l'isolante topologico è stabile quando il numero dei campi fermionici di bordo è dispari, perchè è possibile eccitare dei doppietti di Kramers che non possono decadere. Quando invece il numero dei campi è pari, le eccitazioni prodotte non formano doppietti di Kramers e possono decadere. Questo risultato ha determinato una classificazione \mathbb{Z}_2 degli isolanti topologici di elettroni liberi.

Questa analisi è stata estesa ad isolanti topologici interagenti da Levin-Stern ed altri autori [72] [73] [74] [75]. Sfruttando il fatto che le teorie effettive conformi e di Chern-Simons sono risolubili anche nel caso interagente, questi autori hanno riformulato l'argomento di Fu-Kane dei doppietti di Kramers delle eccitazioni di bordo. Il risultato mostra che anche nel caso interagente gli isolanti topologici possiedono una classificazione \mathbb{Z}_2 .

Un'altra fase topologica della materia recentemente scoperta è quella dei superconduttori topologici [51]. A differenza degli isolanti topologici, le loro eccitazioni di bordo sono fermioni di Majorana che non trasportano corrente elettrica. Per questi sistemi lo studio della stabilità ha prodotto un risultato diverso: nel caso libero esiste una classificazione \mathbb{Z} , mentre nel caso interagente questa è caratterizzata da \mathbb{Z}_8 , come mostrato da Kitaev ed altri autori [79].

Questa classificazione è stata riottenuta da Ryu-Zhang analizzando la CFT di bordo $(1+1)$ -dimensionale [78]. Il criterio di stabilità elaborato da questi autori si basa sullo studio della funzione di partizione della CFT. Se questa funzione non è invariante modulare il sistema ha un'anomalia gravitazionale, che segnala una fase topologica di bulk. Il meccanismo è analogo all'effetto Hall, dove la presenza di anomalia chirale implica l'esistenza di stati di bordo che trasportano la corrente Hall, ma si applica

anche a sistemi con eccitazioni neutre come i fermioni di Majorana.

La parte originale di questo lavoro di tesi analizza la stabilità degli stati di bordo di un isolante topologico attraverso lo studio delle funzioni di partizione della CFT degli stati di bordo e l'analisi dell'invarianza modulare. Ritroveremo i due criteri di stabilità noti, basati sulla presenza di doppietti di Kramers e sull'anomalia gravitazionale, e mostreremo che sono equivalenti. Le funzioni di partizione della CFT saranno ottenute estendendo i risultati noti nel FQHE al caso dell'effetto Hall di spin, e mostreremo che l'invarianza modulare richiede di estendere lo spettro del sistema ai settori di Neveu-Schwarz e Ramond.

Mostreremo che il criterio di Fu-Kane (Levin-Stern) dei doppietti di Kramers corrisponde ad una anomalia \mathbb{Z}_2 della CFT di bordo: questa esprime il fatto che gli stati fondamentali dei due settori Neveu-Schwarz e Ramond possiedono parità di spin opposte. La presenza di quest'anomalia permette di avere eccitazioni al bordo che formano doppietti di Kramers che non possono decadere. Vedremo inoltre che la presenza (assenza) dell'anomalia \mathbb{Z}_2 tra i settori di Neveu-Schwarz e Ramond impedisce (permette) l'invarianza modulare della funzione di partizione. Quando l'anomalia \mathbb{Z}_2 è presente non è possibile costruire un invariante modulare compatibile con la simmetria TR . Il sistema possiede perciò un'anomalia gravitazionale che protegge gli stati a massa nulla sul bordo, in accordo col criterio di Ryu-Zhang. Viceversa, quando l'anomalia \mathbb{Z}_2 è assente l'invariante modulare può essere trovato.

La tesi è strutturata come segue. Nel Cap.(1) riassumeremo le principali proprietà di una teoria di campo invariante conforme, in particolare gli elementi necessari per la costruzione della funzione di partizione. Nel Cap.(2) descriveremo l'effetto Hall quantistico, vedremo come la teoria di Laughlin predice le eccitazioni anioniche del fluido incomprimibile e le eccitazioni chirali di bordo. Nel Cap.(3) esporremo le teorie di campo effettive di bassa energia per l'effetto Hall: la teoria di Chern-Simons e l'equivalente CFT di bordo. In particolare presenteremo le funzioni di partizione della CFT invarianti modulari della CFT. Nel Cap.(4) introdurremo la fisica degli isolanti topologici e superconduttori topologici e descriveremo brevemente i risultati sperimentali. Nel Cap.(5) mostreremo il criterio di stabilità per gli isolanti topologici non interagenti basato sui doppietti di Kramers, e la sua estensione al caso interagente, che utilizza la teoria effettiva di Chern-Simons. Nel Cap.(6) presenteremo i risultati originali. Determineremo le funzioni di partizione degli stati di bordo del QSHE e dell'isolante topologico, discuteremo i settori di Neveu-Schwarz e Ramond e l'invarianza modulare. Analizzeremo quindi la stabilità degli stati di bordo in alcuni casi significativi e ritroveremo gli criteri di stabilità dei doppietti di Kramers e dell'anomalia gravitazionale, mostrando che sono legati alla presenza (assenza) dell'anomalia \mathbb{Z}_2 .

Capitolo 1

Teorie di campo con simmetria conforme

Una teoria di campo quantistica (QFT) si dice invariante di scala quando la sua azione non cambia per dilatazioni delle coordinate $x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Questa simmetria caratterizza i sistemi fisici in cui le fluttuazioni quantistiche (o termiche nell'applicazione alla meccanica statistica) non hanno una scala caratteristica, sia essa una massa ($m = 0$) o una lunghezza di correlazione ($\xi = \infty$). Ad esempio, l'azione classica del campo scalare a massa nulla in d -dimensioni euclidee

$$S = \int d^d x \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi, \quad (1.1)$$

è invariante per dilatazioni se il campo trasforma come

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = \lambda^{-\frac{d-2}{2}} \varphi(x), \quad (1.2)$$

dove l'esponente $\frac{d-2}{2}$ è la dimensione di massa del campo. Corrispondentemente il correlatore invariante di scala assume la forma

$$\langle \varphi(x) \varphi(x') \rangle \sim \frac{1}{|x - x'|^{d-2}}. \quad (1.3)$$

La simmetria conforme è una generalizzazione locale dell'invarianza di scala, in cui il riscaldamento è diverso in ogni punto dello spazio-tempo. Intuitivamente questa estensione sembra ragionevole in una teoria con interazioni locali; in effetti, questa è particolarmente utile in due dimensioni, dove la simmetria conforme è descritta da un set infinito di generatori e permette la soluzione esatta della dinamica [1] [2] [3] [4]. Le applicazioni fisiche delle teorie conformi bidimensionali sono innumerevoli, dai fenomeni critici in meccanica statistica, alla materia condensata e alla teoria della stringa relativistica.

1.1 Invarianza conforme in d dimensioni

1.1.1 Generatori del gruppo conforme

Consideriamo uno spazio \mathbb{R}^d con metrica piatta $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ di segnatura (p, q) ed elemento di linea $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. Una trasformazione di coordinate da $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ è detta *conforme* se cambia il tensore metrico per un fattore di scala

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x)g_{\mu\nu}(x). \quad (1.4)$$

Analizziamo questa relazione per trasformazioni infinitesime $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ attorno alla metrica piatta $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Ricordando che la metrica al primo ordine in ϵ trasforma come

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} - (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu), \quad (1.5)$$

ed imponendo la condizione (1.4), si trova che la variazione della metrica deve essere proporzionale alla metrica stessa

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \rho(x)\eta_{\mu\nu}. \quad (1.6)$$

La funzione $\rho(x)$ è ottenuta prendendo la traccia della (1.6) ,

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = 2 \frac{\partial \cdot \epsilon}{d} \eta_{\mu\nu}. \quad (1.7)$$

Se applichiamo le derivate $\partial_\alpha \partial^\mu$ alla (1.7) otteniamo

$$[\eta_{\alpha\nu} \partial^2 + (d-2)\partial_\alpha \partial_\nu] \partial \cdot \epsilon = 0. \quad (1.8)$$

Per $d > 2$ la (1.7) e (1.8) richiedono che la derivata terza di ϵ si annulli, quindi ϵ è al massimo quadratica nelle coordinate. Abbiamo le seguenti trasformazioni possibili:

1. $\epsilon^\mu = a^\mu$, ovvero le traslazioni;
2. $\epsilon^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu$, con $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ corrispondenti a rotazioni infinitesime;
3. $\epsilon^\mu = \delta x^\mu$, le trasformazioni di scala infinitesime;
4. $\epsilon^\mu = b^\mu x^2 - 2x^\mu b \cdot x$, le trasformazioni conformi speciali.

Si dimostra che il gruppo conforme in $d = p+q$ dimensioni ha $(d+1)(d+2)/2$ generatori ed è isomorfo a $SO(p+1, q+1)$ [3]. Notiamo che il gruppo conforme contiene il gruppo di Poincarè $ISO(p, q)$.

1.1.2 Il tensore di energia - impulso

Un oggetto di importanza fondamentale per lo studio delle teorie invarianti conformi è il tensore energia-impulso. La sua definizione è legata alla variazione dell'azione $S[\varphi, g_{\mu\nu}]$ sotto una trasformazione della metrica

$$\delta S[\varphi, g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2(2\pi)^{d-1}} \int d^d x T^{\mu\nu}(x) \delta g_{\mu\nu}(x), \quad (1.9)$$

che assicura la simmetria

$$T_{\mu\nu}(x) = T_{\nu\mu}(x). \quad (1.10)$$

Se consideriamo trasformazioni di coordinate attorno alla metrica piatta (1.5), otteniamo la legge di conservazione,

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}(x) = 0, \quad (1.11)$$

dall'invarianza dell'azione. Nel caso particolare di trasformazioni conformi (1.6) la variazione dell'azione si riscrive

$$\delta S = \frac{1}{(2\pi)^{d-1}d} \int d^d x T^\mu{}_\mu(x) \partial_\rho \epsilon^\rho(x). \quad (1.12)$$

L'annullarsi della traccia del tensore energia-impulso

$$T^\mu{}_\mu(x) = 0, \quad (1.13)$$

è condizione sufficiente per l'invarianza della teoria. Questa condizione non è però necessaria: essendo $\epsilon^\mu(x)$ al più quadratica, è sufficiente che $T^\mu{}_\mu = \partial_\alpha V^\alpha$ perché la (1.12) si annulli per avere invarianza di scala e $T^\mu{}_\mu = \partial^2 \Phi$ per invarianza conforme. Nel caso $d = 2$ l'analisi è differente come vedremo in seguito.

1.2 Invarianza conforme in due dimensioni

1.2.1 Algebra conforme bidimensionale

Consideriamo lo spazio-tempo bidimensionale piatto con segnatura euclidea: l'equazione (1.7) che definisce le trasformazioni conformi diventa

$$\partial_1 \epsilon^1 = \partial_2 \epsilon^2, \quad (1.14)$$

$$\partial_1 \epsilon^2 = -\partial_2 \epsilon^1. \quad (1.15)$$

Queste sono le condizioni di Cauchy-Riemann per una funzione olomorfa $\epsilon(z) = \epsilon^1 + i\epsilon^2$, della coordinata complessa del piano $z = x^1 + ix^2$:

$$0 = \partial_{\bar{z}} \epsilon(z) = \frac{1}{2} (\partial_1 + i\partial_2) (\epsilon^1 + i\epsilon^2). \quad (1.16)$$

Otteniamo quindi il fatto ben noto che le trasformazioni conformi bidimensionali coincidono con le trasformazioni analitiche del piano complesso:

$$z \rightarrow z + \epsilon(z), \quad \bar{z} \rightarrow \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z}). \quad (1.17)$$

e quindi i suoi generatori sono infinito dimensionali. Nelle coordinate complesse scriviamo

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dzd\bar{z}, \quad (1.18)$$

dalla quale otteniamo le componenti del tensore metrico $g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0$, $g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = \frac{1}{2}$, e del suo inverso $g^{zz} = g^{\bar{z}\bar{z}} = 0$, $g^{z\bar{z}} = g^{\bar{z}z} = 2$. Analogamente troviamo le componenti complesse del vettore $\epsilon^z = \epsilon(z)$, $\epsilon^{\bar{z}} = \bar{\epsilon}(\bar{z})$ e del tensore energia impulso

$$\begin{aligned} T_{zz} = T &= \frac{1}{4}(T_{11} - T_{22} - 2iT_{12}), \\ T_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{T} &= \frac{1}{4}(T_{11} - T_{22} + 2iT_{12}), \\ T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} &= \frac{1}{4} = T^\mu_\mu = 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

L'annullarsi dell'azione (1.12) per trasformazioni conformi infinito dimensionali in due dimensioni (1.16) implica un vincolo più forte sul tensore energia impulso, che deve essere a traccia nulla. La legge di conservazione (1.11) nelle coordinate complesse, utilizzando la condizione di traccia nulla (1.19), dà luogo alle due relazioni

$$\partial_{\bar{z}} T_{zz} = 0 \quad \text{e} \quad \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0, \quad (1.20)$$

che mostrano come le due componenti non nulle del tensore di energia impulso siano una funzione olomorfa e una antiolomorfa

$$T_{zz}(z) = T(z) \quad \text{e} \quad T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}) = \bar{T}(\bar{z}). \quad (1.21)$$

Il tensore di energia-impulso è il generatore delle trasformazioni conformi, quindi la (1.21) implica la fattorizzazione nei settori olomorfo ed antiolomorfo dell'invarianza conforme in due dimensioni, come vedremo in dettaglio nei paragrafi successivi.

Le relazioni di commutazione dei generatori dell'algebra conforme si possono determinare prendendo una trasformazione infinitesima

$$z \rightarrow z' = z + \epsilon(z), \quad \text{con} \quad \epsilon(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n z^{n+1}, \quad (1.22)$$

sviluppando la funzione analitica $\epsilon(z)$ in serie di Laurent attorno all'origine $z = 0$. L'effetto della trasformazione su una funzione scalare $\phi(z, \bar{z})$ definita nel piano complesso è espressa da

$$\delta\phi = \phi(z', \bar{z}') - \phi(z, \bar{z}) = (\epsilon(z)\partial_z + \bar{\epsilon}(\bar{z})\partial_{\bar{z}})\phi(z, \bar{z}) = - \sum_{n \in \mathbf{Z}} (a_n \ell_n + \bar{a}_n \bar{\ell}_n)\phi(z, \bar{z}), \quad (1.23)$$

dove abbiamo introdotto i generatori infinitesimi delle trasformazioni conformi nel piano

$$\ell_n = -z^{n+1}\partial_z \quad \text{e} \quad \bar{\ell}_n = -\bar{z}^{n+1}\partial_{\bar{z}}. \quad (1.24)$$

E' immediato verificare che i generatori ℓ e $\bar{\ell}$ soddisfano le seguenti relazioni di commutazione (algebra di Virasoro classica):

$$\begin{aligned} [\ell_n, \ell_m] &= (n-m)\ell_{n+m}, \\ [\bar{\ell}_n, \bar{\ell}_m] &= (n-m)\bar{\ell}_{n+m}, \\ [\ell_n, \bar{\ell}_m] &= 0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Poichè gli ℓ commutano con gli $\bar{\ell}$ l'algebra conforme è la somma diretta $\mathcal{A} \oplus \bar{\mathcal{A}}$ di due sottoalgebre isomorfe. Data la loro indipendenza possiamo pensare z e \bar{z} come due variabili indipendenti. Notiamo che le trasformazioni conformi (1.22) non sono definite globalmente su tutta la sfera di Riemann $\mathbb{C} \cup \infty$ perché devono necessariamente introdurre delle singolarità. Le trasformazioni invertibili sono quelle dette di Möbius,

$$z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{e} \quad \bar{z} \rightarrow \frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{d}}, \quad (1.26)$$

dove $a, b, c, d, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \in \mathbb{C}$ e $ad-bc = 1$. Queste trasformazioni definiscono il gruppo conforme globale in due dimensioni

$$\frac{SL(2, \mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2} \approx SO(3, 1), \quad (1.27)$$

dove il quoziente per \mathbb{Z}_2 è dovuto al fatto che un cambio di segno di a, b, c, d lascia invariata la trasformazione. I generatori $\{\ell_{-1}, \ell_0, \ell_1\}$ e i rispettivi antiolomorfi generano il gruppo globale conforme in due dimensioni. Identifichiamo ℓ_{-1} e $\bar{\ell}_{-1}$ come i generatori delle traslazioni, $(\ell_0 + \bar{\ell}_0)$ delle dilatazioni, $i(\ell_0 - \bar{\ell}_0)$ delle rotazioni ed $\ell_1, \bar{\ell}_1$ delle trasformazioni conformi speciali. Le trasformazioni globali corrispondono al caso $d = 2$ delle trasformazioni conformi in $d > 2$ discusse precedentemente.

1.2.2 Campi primari e funzioni di correlazione

L'invarianza conforme di una teoria impone dei vincoli sui campi e sulle funzioni di correlazione. Un campo $\Phi_{h, \bar{h}}(z, \bar{z})$ è chiamato *primario* se trasforma in modo covariante:

$$\Phi(z, \bar{z}) \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^h \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right)^{\bar{h}} \Phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})), \quad \text{per } z \rightarrow f(z), \quad \bar{z} \rightarrow \bar{f}(\bar{z}). \quad (1.28)$$

Le quantità reali (h, \bar{h}) sono dette pesi o dimensioni conformi, mentre $\Delta = h + \bar{h}$ è la dimensione di scala e $s = h - \bar{h}$ lo spin conforme. L'importanza dei campi primari sta nel fatto che sono univocamente associati alle rappresentazioni irriducibili dell'algebra conforme. Per una trasformazione infinitesima $z \rightarrow z + \epsilon(z)$ la proprietà di trasformazione (1.28) diventa $(\partial = \partial_z, \bar{\partial} = \partial_{\bar{z}})$:

$$\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \Phi(z, \bar{z}) = ((h\partial\epsilon + \epsilon\partial) + (\bar{h}\bar{\partial}\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}\bar{\partial})) \Phi(z, \bar{z}). \quad (1.29)$$

In corrispondenza della trasformazione (1.28), la teoria è covariante se la funzione di correlazione di n campi primari soddisfa

$$\begin{aligned} & \langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \Phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{\partial f(z)}{\partial z} \right)_{z=z_i}^{h_i} \left(\frac{\partial \bar{f}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right)_{\bar{z}=\bar{z}_i}^{\bar{h}_i} \langle \Phi_1(f(z_1), \bar{f}(\bar{z}_1)) \cdots \Phi_n(f(z_n), \bar{f}(\bar{z}_n)) \rangle. \end{aligned} \quad (1.30)$$

La proprietà di covarianza (1.30) unita all'invarianza della teoria sotto il gruppo conforme globale (1.26), impone che il correlatore di due campi primari abbia la forma [2]

$$\langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \Phi_2(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \begin{cases} \frac{1}{z_1^{2h} \bar{z}_1^{2\bar{h}}} & \text{se } h_1 = h_2 \text{ e } \bar{h}_1 = \bar{h}_2, \\ 0 & \text{se } h_1 \neq h_2. \end{cases} \quad (1.31)$$

Anche il correlatore a tre campi è completamente determinato a meno di una costante. I correlatori a $n \geq 4$ punti soddisfano dei vincoli che sono brevemente descritti nei paragrafi successivi. Si dice infine che un campo è *quasi-primario*, se trasforma secondo la (1.28) solo per trasformazioni di Möbius. Ad esempio, un campo derivativo non è un quasi-primario.

1.2.3 Identità di Ward e OPE dei campi primari

Quando una teoria possiede una simmetria i correlatori soddisfano delle identità generali, chiamate identità di Ward. Usando il formalismo funzionale ricaveremo tali identità per funzioni di correlazione di campi primari di una teoria invariante conforme. Un correlatore di n campi si può scrivere

$$\langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \Phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle = \frac{\int [\mathcal{D}\Phi] \exp(-S[\Phi]) \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \Phi_n(z_n, \bar{z}_n)}{\int [\mathcal{D}\Phi] \exp(-S[\Phi])}, \quad (1.32)$$

dove S è l'azione della teoria e $[\mathcal{D}\Phi]$ è la misura funzionale. Supponiamo che i punti z_i in cui sono definiti i campi nella (1.32) siano contenuti in una regione del piano \mathcal{R} delimitata da una circonferenza \mathcal{C} di raggio R , Fig.(1.1). Facciamo quindi una trasformazione di coordinate infinitesima $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu(x)$, con la richiesta che $\epsilon(x)$ sia una funzione analitica e regolare dentro \mathcal{R} , mentre all'esterno sia una funzione differenziabile tendente rapidamente a zero all'infinito. La trasformazione è un cambio di variabili nell'integrale funzionale (1.32) e determina la seguente variazione dell'azione e dell'integrando

$$\langle \delta_\epsilon X \rangle - \langle (\delta_\epsilon S) X \rangle = 0, \quad (1.33)$$

dove con $\langle X \rangle$ si intende per brevità il correlatore di n campi (1.32). Usando l'espressione del tensore energia impulso (1.9) riscriviamo il termine con la variazione dell'azione dividendo l'integrazione tra la regione interna ed esterna ad \mathcal{R} ,

$$\langle (\delta_\epsilon S) X \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{|x| < R} d^2x \langle (T_{\mu\nu}(x) X) \rangle \partial^\mu \epsilon^\nu + \frac{1}{2\pi} \int_{|x| \geq R} d^2x \langle (T_{\mu\nu}(x) X) \rangle \partial^\mu \epsilon^\nu.$$

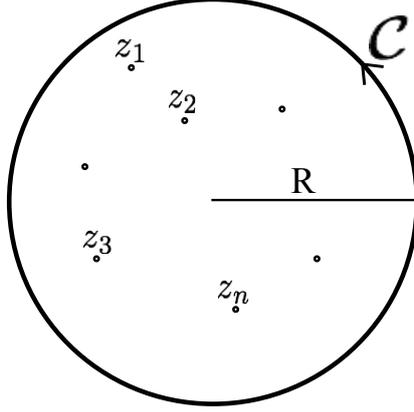


Figura 1.1: Circonferenza \mathcal{C} di raggio R contenente i punti z_i in cui sono definiti i campi.

Il contributo nella regione interna è nullo poichè la trasformazione è conforme in \mathcal{R} ($T^\mu_\mu(x) = 0$). Il termine nella regione esterna si annulla integrando per parti e, trascurando il contributo all'infinito, si riconduce a un integrale sul bordo della circonferenza \mathcal{C} . Passando a variabili complesse (z, \bar{z}) ed usando le espressioni (1.19) per T, \bar{T} nel piano complesso otteniamo:

$$\langle (\delta_\epsilon S) X \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} dz \epsilon(z) \langle T(z) X \rangle - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} d\bar{z} \bar{\epsilon}(\bar{z}) \langle \bar{T}(\bar{z}) X \rangle. \quad (1.34)$$

Sostituendo il risultato trovato per $\langle (\delta_\epsilon S) X \rangle$ nella (1.33) vediamo come il tensore energia-impulso sia il generatore delle trasformazioni conformi e come la sua azione si decompone in parte olomorfa e antiolomorfa

$$\langle \delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} X \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} dz \epsilon(z) \langle T(z) X \rangle - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} d\bar{z} \bar{\epsilon}(\bar{z}) \langle \bar{T}(\bar{z}) X \rangle. \quad (1.35)$$

che possono essere discusse separatamente. Il termine con la variazione dei campi $\langle \delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} X \rangle$ si può riscrivere ricordando la trasformazione dei campi (1.29)

$$\langle \delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} X \rangle = \sum_{i=1}^n [(h_i \partial_i \epsilon(z_i) + \epsilon(z_i) \partial_i) + (\bar{h}_i \bar{\partial}_i \bar{\epsilon}(\bar{z}_i) + \bar{\epsilon}(\bar{z}_i) \bar{\partial}_i)] \langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \Phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle. \quad (1.36)$$

Anche in questo caso la parte olomorfa si separa da quella antiolomorfa $\langle \delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} X \rangle = \langle \delta_\epsilon X \rangle + \langle \delta_{\bar{\epsilon}} X \rangle$. Servendosi del teorema di Cauchy la parte olomorfa $\langle \delta_\epsilon X \rangle$ si riscrive

$$\begin{aligned} \langle \delta_\epsilon X \rangle &= \sum_{i=1}^n [(h_i \partial_i \epsilon(z_i) + \epsilon(z_i) \partial_i)] \langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} dz \epsilon(z) \sum_{i=1}^n \left[\frac{h_i}{(z - z_i)^2} + \frac{1}{(z - z_i)} \partial_i \right] \langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \rangle. \end{aligned}$$

Poichè questa relazione e la (1.35) sono valide per ogni funzione analitica $\epsilon(z)$, l'identità di Ward (1.33) esprime una relazione locale per i correlatori conformi:

$$\begin{aligned} & \langle T(z)\Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \Phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{h_i}{(z-z_i)^2} + \frac{1}{(z-z_i)} \partial_i \right] \langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \Phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Un'analogia identità si scrive per la parte antiolomorfa.

Tipicamente le funzioni di correlazione sono singolari quando la posizione di due o più campi coincidono. Sotto ipotesi molto generali, tali comportamenti singolari si possono esprimere con l'OPE (*Operator Product Expansion*)

$$A(x)B(y) \sim \sum_i C_i(x-y)O_i(y), \quad (1.38)$$

dove gli O_i sono un set completo di operatori locali e C_i funzioni della posizione singolari in $x=y$. Per campi conformi con dimensioni di scala d l'analisi dimensionale determina la forma delle funzioni C_i , cioè $C_i \sim C_{ABC}|x-y|^{-\Delta_A-\Delta_B+\Delta_{O_i}}$, dove C_{ABC} sono le cosiddette costanti di struttura.

L'identità di Ward (1.37) esprime quindi l'OPE del campo $T(z)$ con il campo primario $\Phi_i(z_i, \bar{z}_i)$ per $z \rightarrow z_i$:

$$T(z)\Phi_i(w, \bar{w}) = \frac{h_i}{(z-w)^2} \Phi_i(w, \bar{w}) + \frac{1}{(z-w)} \partial_w \Phi_i(w, \bar{w}) + \text{regolari}. \quad (1.39)$$

Il tensore energia-impulso non è un campo primario, infatti l'OPE con se stesso è data da

$$T(z)T(w) \sim \frac{c}{2(z-w)^4} + \left(\frac{2}{(z-w)^2} + \frac{1}{z-w} \partial_w \right) T(w). \quad (1.40)$$

Il termine aggiuntivo è necessario per ottenere un correlatore $\langle TT \rangle$ non nullo e la costante c è chiamata *carica centrale* o *anomalia conforme*; il suo valore dipende dalla particolare teoria considerata. Per esempio $c=1$ per un campo bosonico libero, mentre $c=1/2$ per quello fermionico di Majorana. Notiamo che $T(z)$ è un campo quasi-primario di dimensione canonica $(h, \bar{h}) = (2, 0)$. Dall'OPE (1.40) si determina la trasformazione infinitesima per $T(z)$

$$\delta_\epsilon T(z) = 2\partial\epsilon(z)T(z) + \epsilon(z)\partial T(z) + \frac{c}{12}\partial^3\epsilon(z), \quad (1.41)$$

con un termine in più legato al polo quartico.

1.2.4 Quantizzazione radiale e algebra di Virasoro

Per determinare le identità di Ward e l'OPE del tensore energia-impulso con i campi primari abbiamo usato il formalismo funzionale. Nelle teorie di campo conformi è molto utile anche il formalismo operatoriale nello spazio di Hilbert. Consideriamo la teoria

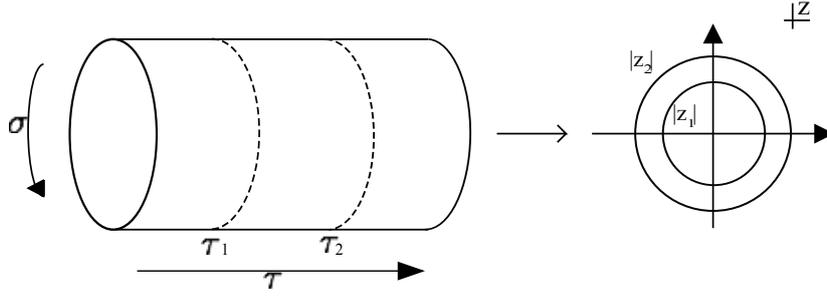


Figura 1.2: Mappa dal cilindro al piano complesso

definita su un cilindro (1+1) dimensionale, con la coordinata temporale τ che va da $-\infty$ a $+\infty$ lungo l'asse del cilindro, e la coordinata spaziale σ periodica con i punti 0 e L identificati, Fig.(1.2). Questo cilindro con coordinata complessa $\zeta = \tau + i\sigma$ può essere mappato nel piano complesso z mediante la trasformazione conforme

$$z = \exp\left(\frac{2\pi}{L}\zeta\right) = \exp\left(\frac{2\pi}{L}(\tau + i\sigma)\right). \quad (1.42)$$

Ne segue che il tempo scorre radialmente nel piano, con il passato ($\tau = -\infty$) nell'origine $z = 0$ ed il futuro ($\tau = +\infty$) all'infinito, e le superfici a tempi fissati nel cilindro corrispondenti a cerchi nel piano. La procedura di quantizzazione radiale della teoria conforme nel piano corrisponde alla quantizzazione canonica sul cilindro. Poichè le dilatazioni nel piano, $z \rightarrow e^{2\pi a/L}z$, corrispondono a traslazioni temporali nel cilindro, $\tau \rightarrow \tau + a$, il generatore delle dilatazioni nel piano corrisponde all'Hamiltoniana del sistema.

Nel formalismo operatoriale la trasformazione conforme di un campo è scritta in termini del commutatore a tempi uguali con un generatore espresso da un integrale spaziale del tensore di energia impulso:

$$\delta_\epsilon \Phi(w, \bar{w}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=|w|} dz \left[T(z) \epsilon(z), \Phi(w, \bar{w}) \right]. \quad (1.43)$$

Le funzioni di correlazione possono essere rappresentate come

$$\langle X \rangle = \langle 0 | T[A_{j_1}(\sigma_1, \tau_1) \cdots A_{j_n}(\sigma_n, \tau_n)] | 0 \rangle, \quad (1.44)$$

dove T rappresenta l'ordinamento temporale rispetto al tempo euclideo τ . Nella quantizzazione radiale definiamo l'ordinamento radiale del prodotto di due operatori come

$$T[A(z)B(w)] = \begin{cases} A(z)B(w) & \text{se } |z| > |w|, \\ B(w)A(z) & \text{se } |w| > |z|. \end{cases} \quad (1.45)$$

Il commutatore a tempi uguali (1.43) è perciò dato dalla differenza su due cammini di integrazione, che si riconducono ad un unico integrale di cammino \mathcal{C}_w attorno al punto w come mostrato in Fig.(1.3),

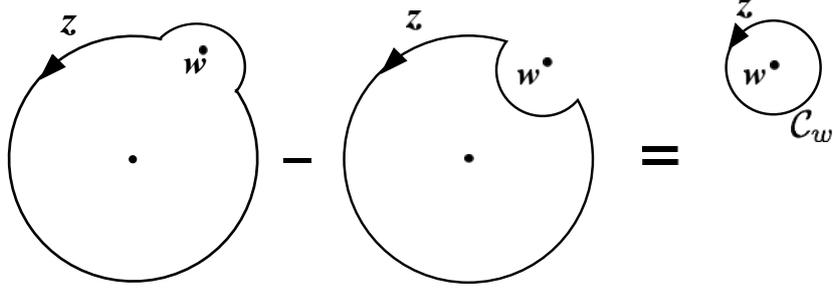


Figura 1.3: Differenza dei cammini di integrazione attorno a w

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon \Phi(w, \bar{w}) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\oint_{|z|>|w|} - \oint_{|z|<|w|} \right] dz \epsilon(z) T(z) \Phi(w, \bar{w}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_w} dz \epsilon(z) T(z) \Phi(w, \bar{w}) = (h\partial\epsilon(w) + \epsilon(w)\partial) \Phi(w, \bar{w}), \end{aligned} \quad (1.46)$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la (1.29).

Per definire gli stati conformi nello spazio di Hilbert sviluppiamo il tensore di energia impulso in serie di Laurent:

$$\begin{aligned} T(z) &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} z^{-n-2} L_n, & L_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_0} dz z^{n+1} T(z), \\ \bar{T}(\bar{z}) &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{z}^{-n-2} \bar{L}_n, & \bar{L}_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_0} d\bar{z} \bar{z}^{n+1} \bar{T}(\bar{z}). \end{aligned} \quad (1.47)$$

Per calcolare l'algebra soddisfatta dai modi L_n utilizziamo la rappresentazione come integrale di contorno facendo attenzione al fatto che l'ordinamento radiale implica la scelta di un contorno \mathcal{C}'_0 che includa \mathcal{C}_0 , come segue:

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= \left(\oint_{\mathcal{C}'_0} \frac{dz}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_0} \frac{dw}{2\pi i} - \oint_{\mathcal{C}'_0} \frac{dw}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_0} \frac{dz}{2\pi i} \right) z^{n+1} T(z) w^{m+1} T(w) \\ &= \oint_{\mathcal{C}_0} \frac{dw}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_w} \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} w^{m+1} \left(\frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{1}{z-w} \partial T(w) \right). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Il calcolo di quest'ultimo integrale è fatto prendendo l'OPE per z che tende a w tra i due operatori nell'integrando. Applicando il teorema dei residui nella z e integrando poi in w otteniamo l'algebra di Virasoro

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0}, \\ [\bar{L}_n, \bar{L}_m] &= (n-m)\bar{L}_{n+m} + \frac{\bar{c}}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0}, \\ [L_n, \bar{L}_m] &= 0. \end{aligned} \quad (1.49)$$

In quest'algebra, i termini c -numero (centrali) sono parametrizzati da c e \bar{c} . Ogni CFT contiene un insieme di rappresentazioni di quest'algebra per un dato valore di c e \bar{c} .

Per $c = \bar{c} = 0$ l'algebra di Virasoro si riconduce all'algebra conforme classica (1.25). Si vede che la sottoalgebra (L_{-1}, L_0, L_1) soddisfa le relazioni

$$[L_{\mp 1}, L_0] = \mp L_{\mp 1}, \quad [L_1, L_{-1}] = 2L_0, \quad (1.50)$$

senza termine anomalo corrispondenti al gruppo globale conforme $SL(2, \mathbb{C})$.

Possiamo ottenere l'Hamiltoniana della teoria conforme in modo canonico dal generatore delle traslazioni temporali sul cilindro. Usando la trasformazione di coordinate (1.42) e la legge di trasformazione del tensore di energia impulso si mostra [2] che il tensore $T_{cyl}(f(z))$ nel cilindro è legato a $T_{pl}(z)$ nel piano dalla relazione:

$$T_{cyl}(f(z)) = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \left[T_{pl}(z) - \frac{c}{24} \right]. \quad (1.51)$$

L'hamiltoniana nel cilindro è definita come l'integrale spaziale della componente temporale di T_{cyl}

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^L T_{\tau\tau}^{cyl}(\sigma) d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^L (T^{cyl}(\sigma) + \bar{T}^{cyl}(\sigma)) d\sigma. \quad (1.52)$$

Se sostituiamo la (1.51) e la definizione dei generatori di Virasoro (1.47) otteniamo

$$H = \frac{2\pi}{L} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint \left(T(z) z^2 - \frac{c}{24} \right) \frac{dz}{z} \right] + c.c. = \frac{2\pi}{L} \left(L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12} \right). \quad (1.53)$$

Come già osservato otteniamo che il generatore delle dilatazioni nel piano è legato all'hamiltoniana nel cilindro. Il passaggio dal piano al cilindro causa un'effetto Casimir, ovvero l'energia di vuoto è diversa da zero e proporzionale a c , $E_0 = -\frac{c\pi}{6L}$. In generale la comparsa dell'anomalia conforme è legata a una rottura della simmetria conforme dovuta all'introduzione di una scala nel sistema, in questo caso la lunghezza L . L'anomalia conforme si manifesta anche quando la CFT è definita in una superficie bidimensionale curva. La curvatura introduce una scala e il valore di aspettazione della traccia del tensore di energia-impulso è proporzionale alla curvatura scalare R ed alla carica centrale c [5],

$$\langle T_{\mu}^{\mu}(x) \rangle = -\frac{c}{12} R(x). \quad (1.54)$$

1.2.5 Spazio di Hilbert degli stati conformi

Lo stato di vuoto $|0\rangle$ dell'hamiltoniana del piano $H = L_0 + \bar{L}_0$ deve soddisfare le condizioni

$$L_n |0\rangle = 0, \quad \text{se } n \geq -1, \quad (1.55)$$

affinché il tensore energia-impulso non sia singolare a $z = 0$, come si vede dallo sviluppo (1.47). Le trasformazioni generate dagli operatori L_n con $n \leq -2$ non sono singolari a $z = 0$, quindi deformano il vuoto creando nuovi stati:

$$L_n |0\rangle = |\text{nuovi stati}\rangle \quad \text{se } n \leq -2. \quad (1.56)$$

Si può mostrare che la relazione di realtà di $T_{\mu\nu}$ nel cilindro Minkowskiano implica la relazione di hermiticità

$$L_n^\dagger = L_{-n}. \quad (1.57)$$

Analogamente alla (1.55) dobbiamo avere per il comportamento a $z \rightarrow \infty$ di $T(z)$ le relazioni

$$\langle 0 | L_n = 0 \quad \text{se} \quad n \leq 1. \quad (1.58)$$

Osserviamo che i generatori L_{-1}, L_0, L_1 annichilano sia il vuoto “in” che il vuoto “out”

$$\langle 0 | L_s = L_s | 0 \rangle = 0, \quad s = 0, \pm 1, \quad (1.59)$$

ed esprimono l’invarianza del vuoto sotto le trasformazioni regolari di Moebius (1.26).

La teoria della rappresentazione dell’algebra di Virasoro può essere sviluppata sia analizzando gli stati che i campi conformi. A ogni campo primario ϕ_h (1.28) sono associati dei campi secondari o discendenti, che formano la famiglia conforme $[\phi_h]$. Ad ogni famiglia conforme corrisponde una rappresentazione irriducibile dell’algebra di Virasoro. In ogni teoria possiamo identificare un set completo di campi locali $\{A_j\}$ che consiste di un numero, anche infinito, di famiglie conformi

$$\{A_j\} = \bigoplus_h [\phi_h]. \quad (1.60)$$

Per determinare i campi discendenti prendiamo l’OPE (1.39) e la riscriviamo usando i generatori di Virasoro (1.47)

$$T(z)\phi_h(w) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (z-w)^{-n-2} (L_n \phi_h)(w). \quad (1.61)$$

Dal confronto troviamo

$$(L_0 \phi)(z) = h \phi(z), \quad (1.62)$$

$$L_{-1} \phi(z) = \partial \phi(z), \quad (1.63)$$

$$L_n \phi(z) = 0 \quad \text{se} \quad n \geq 1. \quad (1.64)$$

Gli altri L_{-n} con $n \geq 2$ creano campi discendenti $L_{-n} \phi_h(z)$ con peso conforme $(h+n)$.

Il formalismo operatoriale permette di descrivere in modo semplice la struttura della rappresentazione dell’algebra conforme. Introduciamo gli stati di peso massimo a partire da un campo primario di peso conforme h applicato nell’origine:

$$|h\rangle = \phi_h(0) |0\rangle. \quad (1.65)$$

Usando l’OPE (1.39) calcoliamo il commutatore

$$[L_n, \phi(z)] = z^{n+1} \partial \phi(z) + h(n+1) z^n \phi(z), \quad (1.66)$$

equivalente alla variazione di un campo primario per trasformazioni infinitesime (1.29). Usando le proprietà del vuoto (1.55) e la (1.66) ricaviamo

$$L_n |h\rangle = 0 \quad \text{se} \quad n > 0, \quad (1.67)$$

$$L_0 |h\rangle = h |h\rangle. \quad (1.68)$$

Lo stato di peso massimo $|h\rangle$ soddisfa le condizioni (1.67) ed è autostato di L_0 con autovalore h . Definiamo poi gli stati “out ” mediante la formula

$$\langle h| = \lim_{z, \bar{z} \rightarrow \infty} \langle 0| \phi_h(z, \bar{z}) z^{2h} \bar{z}^{2\bar{h}}. \quad (1.69)$$

Questi stati soddisfano le equazioni

$$\langle h| L_n = 0, \quad \text{se} \quad m < 0, \quad (1.70)$$

$$\langle h| L_0 = h \langle h|. \quad (1.71)$$

Dato lo stato di massimo peso $|h\rangle$ possiamo costruire i suoi stati discendenti applicando i generatori L_{-n_k} con $n_k > 0$. Poichè le (1.49) danno

$$[L_0, L_{-n}] = nL_{-n}, \quad (1.72)$$

troviamo $L_0 L_{-n} |h\rangle = (h + n)L_{-n} |h\rangle$, cioè L_{-n} aumenta di n il peso conforme dello stato $|h\rangle$. Un generico stato discendente può essere creato applicando ripetutamente tali operatori sullo stato di massimo peso

$$|h; n_1 \dots n_k\rangle = L_{-n_1} \dots L_{-n_k} |h\rangle \quad \text{con} \quad n_1 \leq n_2 \dots \leq n_k, \quad (1.73)$$

da cui

$$L_0 |h; n_1 \dots n_k\rangle = \left(h + \sum_{i=1}^k n_i\right) |h; n_1 \dots n_k\rangle. \quad (1.74)$$

La dimensione dello spazio di Hilbert a livello k è legata al numero di partizioni $p(k)$ dell'intero k , ottenute dalla funzione generatrice

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(k) q^k = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^k}. \quad (1.75)$$

Una volta individuata la struttura della rappresentazione possiamo definirne il carattere della rappresentazione nel seguente modo:

$$\chi_h(q) = q^{-\frac{c}{24}} \text{Tr}_h(q^{L_0}) = q^{-\frac{c}{24}} \sum_{n=0}^{\infty} d(n) q^{n+h}. \quad (1.76)$$

Assumendo che tutti gli stati della rappresentazione siano non degeneri, ovvero $d(n) = p(n)$ come ad esempio per $c = 1$ e $h \neq \frac{n^2}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$, otteniamo

$$\chi_h(q) = q^{-\frac{1}{24}+h} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n} = \frac{q^h}{\eta(q)}, \quad (1.77)$$

dove abbiamo introdotto la funzione di Dedekind

$$\eta(q) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n). \quad (1.78)$$

1.2.6 Cenni alle rappresentazioni dell'algebra di Virasoro

In generale gli stati discendenti di una famiglia conforme non sono tutti linearmente indipendenti. Questo dipende dalla struttura dell'algebra di Virasoro per un dato valore di h e c . Lo studio delle rappresentazioni consiste nella determinazione degli stati non degeneri e con prodotto scalare definito positivo (per rappresentazioni unitarie). Ad esempio la norma del primo stato discendente è ottenuta utilizzando le regole di commutazione (1.49):

$$\langle h | L_{-n}^\dagger L_{-n} | h \rangle = 2nh + \frac{c}{12}n(n^2 - 1), \quad n > 0. \quad (1.79)$$

Questa quantità è positiva per ogni $n > 0$ se $c > 0$ ed $h > 0$.

Lo spazio vettoriale $V_{(c,h)}$ di tutti i discendenti (1.73) può contenere uno o più vettori nulli $|\chi\rangle$ che soddisfano le condizioni di di peso massimo:

$$\begin{aligned} L_n |\chi\rangle &= 0, & \text{se } n > 0, \\ L_0 |\chi\rangle &= (h + N) |\chi\rangle, \end{aligned} \quad (1.80)$$

per un opportuno $N > 0$. Dalle (1.80) segue che $|\chi\rangle$ è ortogonale a tutti gli stati e ha norma nulla

$$\langle \psi | \chi \rangle = 0, \quad |\psi\rangle \in V_{(c,h)}, \quad (1.81)$$

$$\langle \chi | \chi \rangle = 0. \quad (1.82)$$

E' semplice verificare che partendo dallo stato di massimo peso $|h\rangle$, lo stato $|\chi\rangle$

$$|\chi\rangle = \left(L_{-2} + \frac{3}{2(2h+1)} L_{-1}^2 \right) |h\rangle, \quad (1.83)$$

è nullo a livello $N = 2$ (1.80) quando h assume i valori

$$h = \frac{1}{16} (5 - c \pm \sqrt{(c-1)(c-25)}). \quad (1.84)$$

La rappresentazione $V_{(c,h)}$ è quindi riducibile perchè contiene un sottospazio ortogonale di stati formato dal vettore nullo e dai suoi discendenti. Per questi valori di c e h si ottiene una rappresentazione irriducibile eliminando il vettore nullo $|\chi\rangle$ ed i suoi discendenti dalla famiglia conforme originale $[\phi_h]$, che quindi contiene meno stati ed è chiamata *famiglia conforme degenera*.

Per determinare se un vettore nullo è presente al generico livello N dobbiamo calcolare gli zeri del determinante della matrice di Gramm $M^N(c, h)$, i cui elementi sono i prodotti scalari degli stati discendenti a livello N

$$M^N(c, h) = \begin{pmatrix} \langle h | L_1^N L_{-1}^N | h \rangle & \cdots & \langle h | L_1^N L_{-N} | h \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle h | L_N L_{-1}^N | h \rangle & \cdots & \langle h | L_N L_{-N} | h \rangle \end{pmatrix}. \quad (1.85)$$

Il calcolo di questo determinante è dovuto a Kac [6]. In base allo studio del segno del determinante, si dimostra che esistono quattro diverse regioni di valori di c e h nelle quali si hanno diversi tipi di rappresentazioni conformi.

- $c < 0$. In questo caso le teorie conformi sono non unitarie. L'esempio (1.79) mostra che se c è negativo la norma di uno stato discendente è negativa. In particolare nella rappresentazione del vuoto della teoria abbiamo lo stato $\langle 0 | L_2 L_{-2} | 0 \rangle = \frac{c}{2}$, che è sempre negativo se $c < 0$.
- $c > 1$. Il determinante di Kac non si annulla se $h > 0$ e si hanno rappresentazioni unitarie senza vettori nulli.
- $c = 1$. Il determinante di Kac si annulla per $h = \frac{n^2}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$, ma non diventa negativo. Le rappresentazioni ottenute per $h \neq \frac{n^2}{4}$, $h > 0$ sono unitarie e irriducibili, mentre quelle per $h = n^2/4$ sono irriducibili dopo l'eliminazione del vettore nullo a livello $N = n + 1$ e dei suoi discendenti.
- $0 < c < 1$, con $h > 0$. In questo intervallo è stato dimostrato [7] che non si hanno mai rappresentazioni unitarie ad esclusione di una serie discreta di punti (c, h) parametrizzati da un intero m come segue:

$$c(m) = 1 - \frac{6}{m(m+1)}, \quad m = 1, 2, 3 \dots, \quad (1.86)$$

$$h_{p,q} = \frac{[(m+1)p - mq]^2 - 1}{4m(m+1)}, \quad 1 \leq p \leq m-1, \quad 1 \leq q \leq m. \quad (1.87)$$

In quest'ultimo caso si hanno $m(m-1)/2$ valori di $h_{p,q}$, che formano la così detta griglia conforme o tabella di Kac. Queste rappresentazioni contengono vettori nulli (corrispondenti agli zeri del determinante di Kac) che possono essere separati dagli stati a norma positiva. Le teorie costruite a partire da queste rappresentazioni con $0 < c < 1$ sono dette *modelli minimali conformi*. Si dimostra [1] [2] che l'OPE di due campi primari può essere ridotta ai soli campi presenti nella tabella di Kac. Questo troncamento dell'OPE corrisponde a particolari regole di selezione, dette *regole di fusione*, che hanno la seguente espressione

$$\phi_{p_1, q_1} \times \phi_{p_2, q_2} = \sum_{k=|p_1-p_2|+1}^{p_1+p_2-1} \sum_{l=|q_1-q_2|+1}^{q_1+q_2-1} [\phi_{k,l}], \quad (1.88)$$

con $k + p_1 + p_2 = 0 \pmod{2}$, $l + q_1 + q_2 = 0 \pmod{2}$.

Uno dei maggiori successi dei modelli minimali conformi sta nella capacità di classificare i comportamenti critici di modelli meccanico-statistici in due dimensioni. La teoria della rappresentazione dell'algebra di Virasoro dà infatti le dimensioni di scala dei campi presenti nella CFT, legate agli esponenti critici alla transizione di fase del secondo ordine. L'esempio più semplice e largamente discusso in letteratura

è dato dal modello di Ising al punto critico. Questo è descritto dalle (1.86) ponendo $m = 3$. Segue che $c = \frac{1}{2}$ e la tabella di Kac contiene tre pesi conformi $h_{1,1} = h_{2,3} = 0$, $h_{2,1} = h_{1,3} = 1/2$, $h_{1,2} = h_{2,2} = 1/16$. A questi corrispondono i tre campi primari $I = \Phi_{1,1} = \Phi_{2,3}$, $\epsilon = \Phi_{2,1} = \Phi_{1,3}$, $\sigma = \Phi_{1,2} = \Phi_{2,2}$, che soddisfano le regole di fusione,

$$\begin{aligned} I \cdot \epsilon &= [\epsilon], & \epsilon \cdot \epsilon &= [I], \\ I \cdot \sigma &= [\sigma], & \epsilon \cdot \sigma &= [\sigma], \\ I \cdot I &= [I], & \sigma \cdot \sigma &= [I] + [\epsilon]. \end{aligned} \tag{1.89}$$

1.3 Funzione di partizione ed invarianza modulare

L'invarianza conforme ammette una separazione tra la parte olomorfa e antiolomorfa dei campi, manifestamente visibile nelle identità di Ward. Le quantità fisiche sono però descritte da combinazioni dei due settori, che dipendono dall'osservabile considerato e devono essere determinate dalle condizioni al contorno. Nel caso della funzione di partizione possiamo considerare le condizioni al contorno periodiche nelle due dimensioni per descrivere ad esempio le proprietà di volume di un sistema statistico al punto critico.

Una rappresentazione della doppia periodicità si ottiene introducendo un reticolo bidimensionale nel piano complesso, generato da due vettori di base, w_1 e w_2 , chiamati periodi del reticolo. Si ottiene un toro mediante la relazione di equivalenza nel piano \mathbb{C} :

$$z \sim z + nw_1 + mw_2, \quad n, m \in \mathbb{Z}. \tag{1.90}$$

Usando l'invarianza sotto rotazioni e dilatazioni possiamo ridurre la coppia di periodi (w_1, w_2) ai valori $(1, \tau)$, con $\tau = w_2/w_1$ e $\text{Im}\tau > 0$, chiamato parametro modulare. I vertici del toro $\{0, 1, \tau, \tau + 1\}$ definiscono la cella fondamentale del reticolo come mostrato in Fig.(1.4).

Altri due periodi w'_1 e w'_2 generano lo stesso reticolo se sono legati ai primi due da una combinazione lineare invertibile a coefficienti interi,

$$\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}. \tag{1.91}$$

La richiesta fisica è che la teoria conforme sul toro non dipenda dalla scelta dei periodi del reticolo ovvero dalla scelta delle coordinate utilizzate per descrivere il toro. Questa è l'invarianza modulare della CFT, che può essere messa in relazione con l'assenza di anomalie gravitazionali [42].

La trasformazione (1.91) agisce su τ come:

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}. \tag{1.92}$$

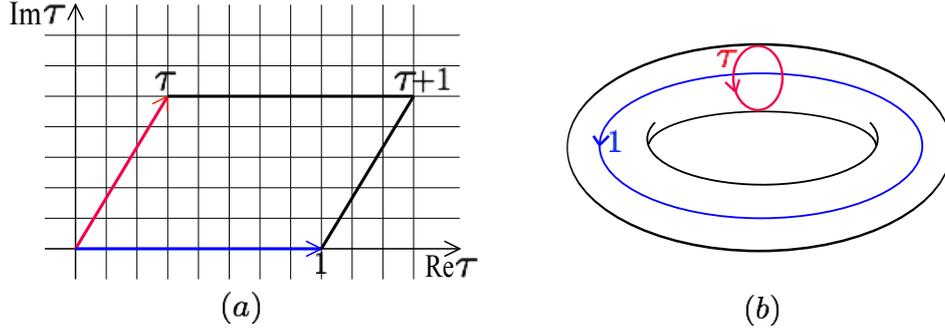


Figura 1.4: (a): il piano complesso τ con i periodi fondamentali $(\tau, 1)$ che definiscono la cella fondamentale di vertici $(0, 1, \tau, \tau + 1)$. (b): il toro \mathbb{T}^2 ottenuto come prodotto di due circonferenze S^1 di raggi $(\tau, 1)$.

Il gruppo di trasformazioni di τ si chiama *gruppo modulare*

$$\Gamma \equiv PSL(2, \mathbb{Z}) \equiv \frac{SL(2, \mathbb{Z})}{\mathbb{Z}_2}, \quad (1.93)$$

dove il quoziente \mathbb{Z}_2 è relativo al cambio di segno di tutti i coefficienti nella (1.92). Questo gruppo discreto infinito dimensionale è generato dalle due trasformazioni

$$T : \tau \rightarrow \tau + 1, \quad (1.94)$$

$$S : \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}, \quad (1.95)$$

che sono legate dalle relazioni $(ST)^3 = S^2 = C$, dove C la coniugazione di carica, $C^2 = 1$. Una coordinata ζ di un punto del toro trasforma in modo covariante, ovvero sotto $T : \zeta \rightarrow \zeta$, mentre sotto $S : \zeta \rightarrow -\zeta/\tau$.

I valori indipendenti della variabile complessa τ formano il dominio fondamentale \mathcal{F} di Γ , definito come la regione del piano complesso i cui punti non sono connessi da trasformazioni modulari:

$$\mathcal{F} = \left\{ \tau \in \mathbb{C} \mid -\frac{1}{2} < \text{Re}\tau \leq \frac{1}{2}, |\tau| \geq 1 \right\}. \quad (1.96)$$

Per definire la funzione di partizione nel toro è necessario specificare le direzioni spaziali e temporali nel reticolo. Scegliamo la direzione temporale nell'asse immaginario del piano complesso, mentre quella spaziale lungo l'asse reale. Le traslazioni lungo questi assi sono effettuate dagli operatori hamiltoniana H e impulso P . Usando l'hamiltoniana della geometria del cilindro Eq.(1.53), e l'impulso $P = \frac{2\pi}{L}(L_0 - \bar{L}_0)$, abbiamo automaticamente la periodicità spaziale e definiamo la funzione di partizione come la traccia della matrice di trasferimento nella direzione temporale nel seguente modo:

$$Z = \text{Tr} \exp\left(- (H\text{Im}\tau - iP\text{Re}\tau)\right) = \text{Tr}\left(q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0 - c/24}\right), \quad (1.97)$$

con $q = \exp(2\pi i\tau)$ e $\bar{q} = \exp(-2\pi i\bar{\tau})$. La traccia su tutti gli stati della teoria si decompone nella somma diretta delle due algebre di Virasoro $\mathcal{V} \oplus \bar{\mathcal{V}}$. Utilizzando i

caratteri della rappresentazione definiti dalla (1.76), otteniamo quindi

$$Z = \sum_{h, \bar{h}} \mathcal{N}_{h, \bar{h}} \chi_h(q) \bar{\chi}_{\bar{h}}(\bar{q}), \quad (1.98)$$

dove $\mathcal{N}_{h, \bar{h}} \in \mathbb{N}$ è la molteplicità con cui ciascuna coppia (h, \bar{h}) di rappresentazioni appare nella teoria.

In alcuni esempi di teorie calcolabili esplicitamente, ad esempio col path-integral, si può verificare che la funzione di partizione è invariante modulare, $Z(\tau + 1) = Z(-1/\tau) = Z(\tau)$, ed assume la forma (1.98) in termini delle rappresentazioni di Virasoro. Viceversa, nel caso di teorie interagenti dove il calcolo esplicito non è possibile, l'espressione (1.98) permette di dedurre la funzione di partizione utilizzando i risultati della teoria delle rappresentazioni per la forma dei caratteri $\chi_h(q)$. In questo caso, i coefficienti $\mathcal{N}_{h, \bar{h}}$ devono essere determinati autoconsistentemente dalla richiesta di invarianza modulare unita ad altre condizioni fisiche. L'invarianza della funzione di partizione sotto T , $Z(\tau + 1) = Z(\tau)$, impone che $\mathcal{N}_{h, \bar{h}}$ sia nullo a meno che $h - \bar{h} = k$, con k intero. Questo implica che lo spin dei campi della teoria deve essere intero. Soddisfare l'invarianza sotto S , cioè $Z(-1/\tau) = Z(\tau)$ è più complesso: la soluzione del problema nel caso dei modelli minimali si riconduce a un problema lineare risolto in [8]. Vedremo nel seguito come la richiesta dell'invarianza modulare della teoria vincoli il contenuto operatoriale affinché questa sia consistente.

Capitolo 2

L' Effetto Hall quantistico

2.1 Introduzione

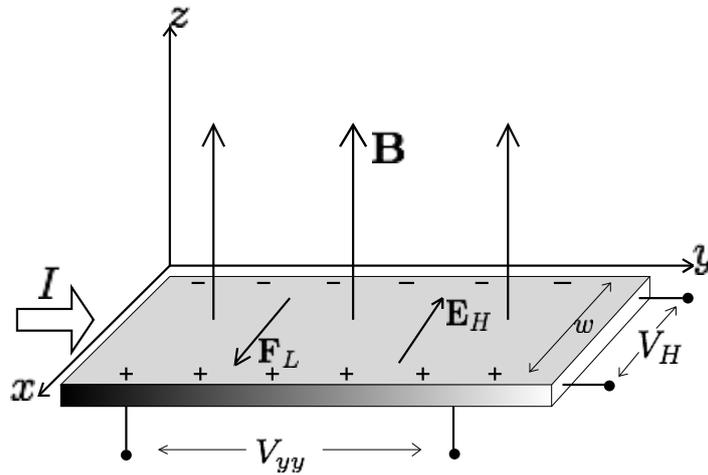


Figura 2.1: Geometria dell'effetto Hall

Consideriamo sul piano (x, y) un nastro conduttore di larghezza w nel quale scorre una corrente I lungo \hat{y} . Quando un campo magnetico di intensità B è diretto lungo l'asse \hat{z} in direzione perpendicolare alla corrente, si genera una differenza di potenziale V_H lungo la direzione \hat{x} , chiamata tensione di Hall. Il fenomeno avviene a causa della forza di Lorentz che si esercita sulle cariche in movimento nel campo magnetico

$$\mathbf{F}_L = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{e}{c} v B \hat{x}. \quad (2.1)$$

Come riportato in Fig.(2.1) la forza di Lorentz provoca un accumulo di cariche positive nella direzione \hat{x} e di carica opposta nella direzione $-\hat{x}$. La tensione Hall V_H è la differenza di potenziale misurata tra gli estremi distanti w . A regime si instaura un equilibrio tra il campo elettrico di Hall $E_H = -E_x$ e la forza di Lorentz diretta in verso opposto

$$\frac{e}{c} v B = E_H e. \quad (2.2)$$

Data la presenza del campo B i voltaggi e le correnti non sono più collineari, per cui la resistività ρ e la conducibilità σ sono quantità tensoriali, legate dalla relazione $\sigma_{ij} = (\rho^{-1})_{ij}$ e definiti come

$$E_i = \rho_{ik} J_k, \quad i, k = x, y, \quad (2.3)$$

con J_k la densità di corrente. Nell'esperimento si misurano i due voltaggi V_{yy} e V_H in funzione di B che, divisi per la corrente I , danno la resistenza longitudinale R_{yy} e la resistenza di Hall o trasversa $R_H = R_{xy}$. Classicamente la resistenza trasversa è lineare nel campo magnetico

$$R_H = \frac{V_H}{I} = \frac{B}{\rho_e e c}, \quad (2.4)$$

con ρ_e la densità elettronica. Nella direzione parallela al flusso di corrente non c'è nessuna influenza del campo magnetico, e la resistenza longitudinale rimane costante. Questo è l'effetto Hall classico noto da oltre un secolo.

Il comportamento classico è violato quando il sistema è sottoposto a temperature estremamente basse e campi magnetici molto intensi [9]. In questi regimi subentra il comportamento quantistico che produce degli effetti sorprendenti ricchi di novità nell'ambito della fisica della materia condensata.

La tecnologia essenziale per la scoperta dell'effetto Hall quantistico è stato il transistor MOSFET, oggi comunemente usato in elettronica. In questi dispositivi gli elettroni sono confinati in uno stato bidimensionale dell'ordine dei $10nm$, corrispondente a una buca di potenziale nella direzione perpendicolare al piano (x, y) . A basse temperature gli elettroni occupano perciò solo il livello di energia più basso e il loro moto risulta perfettamente bidimensionale. A temperature dell'ordine di $100mK$ e campi magnetici dell'ordine delle decine di Tesla, la dipendenza lineare della resistenza di Hall nel campo magnetico non è più valida ma si manifestano dei plateau ai valori

$$R_{xy} = \frac{h}{e^2} \frac{1}{\nu}, \quad (2.5)$$

dove h è la costante di Planck e ν , chiamato frazione di riempimento o *filling fraction*, assume valori interi o razionali. Allo stesso valore del campo magnetico in cui la resistenza di Hall ha un plateau, quella longitudinale R_{yy} si annulla e la corrente scorre senza dissipare energia, si veda Fig.(2.2).

K. Von Klitzing, G. Dorda e M. Pepper [10], osservarono per la prima volta i valori interi $\nu = 1, 2, 3 \dots$, scoprendo così l'effetto Hall quantistico intero (QHE). Valori frazionari furono osservati negli anni successivi con l'uso di campioni più puri. I valori $\nu = 1/p$ con p dispari furono osservati per la prima volta da Tsui, Stormer e Gossard [11]. Un'altra sequenza è quella di Jain in cui $\nu = m/(2m \pm 1)$, con m intero. Questo è l'effetto Hall quantistico frazionario (FQHE).

prescinde dalla forma, dal materiale e dai dettagli microscopici del campione. Vedremo infatti che il bulk del sistema può essere descritto mediante la teoria effettiva di Chern-Simons, una teoria di gauge topologica; questa può spiegare la quantizzazione della conducibilità e descrivere le proprietà universali di lunga distanza del sistema. In questo lavoro di tesi ci occuperemo di questa teoria e della associata teoria conforme che descrive gli stati di bordo caratteristici del QHE.

2.2 L'effetto Hall quantistico intero

I livelli di Landau

Cominciamo col ricordare brevemente la meccanica quantistica dei livelli di Landau. L'hamiltoniana di un elettrone di massa m e carica e con spin polarizzato lungo la direzione \hat{z} del campo magnetico B (trascurando il contributo costante $-g\mu_B B$ dello spin polarizzato) è data da

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2. \quad (2.8)$$

Quest'hamiltoniana e la corrispondente equazione di Schrödinger sono gauge invarianti, e per l'analisi successiva è conveniente scegliere il gauge simmetrico $\mathbf{A} = \frac{1}{2}B(-y, x, 0)$, ed usare coordinate complesse z, \bar{z} [19]. Definiamo le seguenti due quantità: la frequenza di ciclotrone $\omega_c = eB/mc$ e la lunghezza magnetica $l_B = \sqrt{2\hbar c/eB}$. Ponendo $\hbar = c = 1$ possiamo introdurre due coppie di operatori di creazione e distruzione nello spazio delle fasi 4-dimensionale:

$$\hat{a} = \frac{z}{2l_B} + l_B \bar{\partial}, \quad \hat{a}^\dagger = \frac{\bar{z}}{2l_B} - l_B \partial, \quad (2.9)$$

$$\hat{b} = \frac{\bar{z}}{2l_B} + l_B \partial, \quad \hat{b}^\dagger = \frac{z}{2l_B} - l_B \bar{\partial}, \quad (2.10)$$

con regole di commutazione

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1, \quad (2.11)$$

e tutte le altre nulle. In termini di questi operatori l'hamiltoniana (2.8) coincide con quella di un oscillatore armonico

$$\hat{H} = \omega_c \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \quad (2.12)$$

mentre l'operatore di momento angolare nella direzione dell'asse \hat{z} è

$$\hat{J}_z = (\mathbf{x} \times \mathbf{p})_z = \hat{b}^\dagger \hat{b} - \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (2.13)$$

Poichè gli operatori \hat{a} e \hat{b} commutano tra loro troviamo che lo spettro dell'hamiltoniana si compone di livelli di energia (livelli di Landau) $\epsilon_n = \omega_c(n + 1/2)$, $n \in \mathbb{N}$, che

sono infinitamente degeneri rispetto al momento angolare, con autovalori $J_{n,l} = (l - n)$, con $n, l \in \mathbb{N}$. Gli stati degeneri che appartengono ad ogni livello sono caratterizzati dal valore del momento angolare l . La funzione d'onda dello stato di vuoto è $\psi_0 = (1/l_B\sqrt{\pi})\exp(-|z|^2/2l_B^2)$ e soddisfa le condizioni $\hat{a}\psi_0 = \hat{b}\psi_0 = 0$. Una base completa delle autofunzioni del momento angolare del primo livello di Landau è data da

$$\psi_{0,l} = \frac{1}{l_B\sqrt{\pi}} \frac{1}{l!} \left(\frac{z}{l_B}\right)^l \exp(-|z|^2/2l_B^2). \quad (2.14)$$

Gli stati dei livelli di Landau più elevati sono ottenuti applicando più volte gli operatori \hat{a}^\dagger e \hat{b}^\dagger allo stato fondamentale ottenendo:

$$\begin{aligned} \psi_{n,l}(z, \bar{z}) &= \frac{(\hat{b}^\dagger)^{l+n}}{\sqrt{(l+n)!}} \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \psi_0(z, \bar{z}) \\ &= \frac{1}{l_B} \sqrt{\frac{n!}{\pi(l+n)!}} \left(\frac{z}{l_B}\right)^l L_n^l\left(\frac{|z|^2}{l_B^2}\right) \exp(-|z|^2/2l_B^2), \end{aligned} \quad (2.15)$$

dove n indica i livelli energetici, $l + n \geq 0$, e $L_n^l(x)$ sono i polinomi generalizzati di Laguerre.

Le autofunzioni $\psi_{0,l}$ possiedono un massimo sulle orbite circolari di raggio $r_l = l_B\sqrt{l}$, per cui la tipica struttura dei livelli di Landau è quella di orbitali concentrici. L'area racchiusa nell'orbita di raggio r_l è pari a $A_l = \pi r_l^2 = \frac{\Phi_0}{B}l$, cioè il flusso del campo magnetico attraverso la superficie A_l è l volte il quanto di flusso $\Phi_0 = hc/e$. Calcolando l'area dell'anello compreso tra i due raggi r_l ed r_{l+1} troviamo che essa racchiude un quanto di flusso Φ_0 Fig.(2.3). C'è quindi uno stato di momento angolare l per ogni quanto di flusso. Se prendiamo un campione finito di superficie A attraversato dal flusso magnetico $\Phi = BA$, la degenerazione di ogni livello di Landau, cioè il numero di stati N_s degeneri in energia, è data dal numero di quanti di flusso passanti attraverso la superficie del campione, ovvero

$$N_s = \frac{\Phi}{\Phi_0}. \quad (2.16)$$

Prendiamo un sistema di elettroni non interagenti con densità ρ_e e supponiamo che riempiano per intero un numero n di livelli di Landau, separati uno dall'altro da un gap di energia $\Delta\epsilon = \omega_c$. Il numero di elettroni N_e deve quindi essere un multiplo intero degli stati a disposizione in un livello $N_e = nN_s$, ovvero la frazione di riempimento degli stati ν assume valori interi

$$\nu = \frac{N_e}{N_s} = N_e \frac{\Phi_0}{\Phi} = \frac{\rho_e}{eB} = n. \quad (2.17)$$

In questo caso, quando l'energia di Fermi si posiziona nel gap tra l'ultimo livello occupato e il primo vuoto, gli elettroni non possono saltare nel livello successivo dato l'elevato gap $\omega_c \propto B$ (l'intensità del campo magnetico è elevata), e non possono condurre

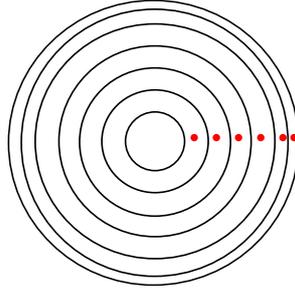


Figura 2.3: Gli stati degeneri nel momento angolare nel primo livello di Landau sono rappresentati come anelli di area costante. Ogni anello è attraversato da un quanto di flusso e per $\nu = 1$ è popolato da un elettrone.

corrente; quindi la conducibilità longitudinale σ_{yy} si annulla. Per n livelli di Landau completamente pieni possiamo esprimere la ρ_e in termini di ν nella (2.17) e sostituirla nella (2.4), ottenendo i valori quantizzati (interi) per la resistenza (conducibilità) trasverse osservati negli esperimenti

$$R_{xy} = \frac{h}{e^2} \frac{1}{\nu}, \quad \sigma_{xy} = \frac{1}{R_{xy}} = \nu \frac{e^2}{h} = \frac{e^2}{h} n. \quad (2.18)$$

Per un sistema a densità fissata il filling fraction ν è controllato dal campo magnetico. Più elevata è l'intensità di B , maggiore è il flusso Φ e maggiore sarà il numero degli stati degeneri a disposizione per ogni livello di Landau, da cui l'andamento decrescente dei valori di ν all'aumentare del campo, come sperimentalmente osservato in Fig.(2.2).

Le relazioni scritte sopra suggeriscono che una variazione di B cambi la degenerazione degli stati, e quindi implichi una variazione della resistenza Hall. Il grafico in Fig.(2.2) mostra invece che per valori del campo magnetico attorno al centro di quantizzazione la resistenza Hall rimane costante. La formazione di questi plateau può essere spiegata dalla presenza di impurità come segue.

Un'impurità può creare una buca di potenziale locale che può intrappolare un elettrone. In presenza di impurità le funzioni d'onda di singola particella si suddividono in due classi, una banda di stati estesi e un set di stati localizzati [13] [15]. La caratteristica forma a delta della densità degli stati per ogni livello di Landau viene quindi modificata in una distribuzione a campana, tanto più larga quanto più elevato è il grado di impurità presente nel sistema, Fig.(2.4). Gli stati estesi si posizionano ancora al centro di ogni livello di Landau, mentre quelli localizzati sono nelle code delle bande che connettono i vari livelli. Quando l'energia di Fermi è nella regione degli stati localizzati, modulando il campo magnetico aumenta o diminuisce il numero di elettroni negli stati localizzati che non trasportano corrente. Solamente gli elettroni negli stati estesi contribuiscono al flusso di corrente. Ne segue che il valore della corrente rimane fissato al valore che assume quando tutti gli stati estesi sono completamente pieni fino a un certo livello di Landau, ovvero la resistenza Hall è quantizzata al valore $R_{xy} = h/(\nu e^2)$,

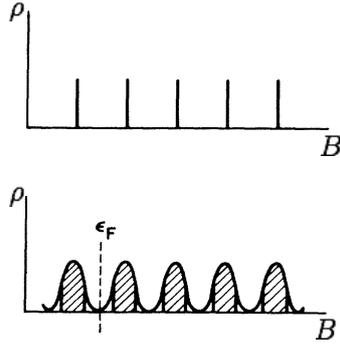


Figura 2.4: In alto la densità degli stati per un sistema elettronico ideale. In basso la densità degli stati per un sistema reale. La forma a delta è smussata. Lo spettro degli stati estesi si posiziona nei picchi centrati su ogni livello di Landau, mentre quello degli stati localizzati nelle code. Fino a che l'energia di Fermi non si avvicina ai picchi centrali la resistenza di Hall non cambia, manifestando dei plateau in funzione del campo magnetico.

mentre quella longitudinale è nulla. Continuando a variare il campo magnetico, non appena l'energia di Fermi passa attraverso la banda degli stati estesi la resistenza longitudinale varia in modo apprezzabile perchè è permessa la conduzione ohmica, e la resistenza Hall si comporta come previsto dalla teoria classica fino al riempimento di tutti gli stati estesi e la formazione di un nuovo plateau.

Incomprimibilità dello stato fondamentale

Il problema di N_e elettroni non interagenti tra loro è descritto nel formalismo della prima quantizzazione prendendo N_e copie degli operatori \hat{a} e \hat{b} . Per valori interi $\nu = n$, i primi n livelli sono occupati e la funzione d'onda a multi corpi è data dal determinante di Slater. Nel caso di $\nu = 1$ questo è espresso dal determinante di Vandermonde

$$\Psi_0(\{z_i\}, \{\bar{z}_i\}) = \prod_{0 \leq i < j \leq N_e} (z_i - z_j) \exp\left(-\sum_i |z_i|^2 / 2l_B^2\right). \quad (2.19)$$

Nel linguaggio della seconda quantizzazione il problema a N corpi è descritto dall'hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m} \int d^2\mathbf{x} (D_i \hat{\Psi})^\dagger (D_i \hat{\Psi}), \quad (2.20)$$

con $D_i = \partial_i - ieA_i$ la derivata covariante. L'operatore di campo $\hat{\Psi}$ possiede un'espansione in termini degli autostati dell'energia e del momento angolare di singola particella (2.15)

$$\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=-n}^{\infty} \hat{c}_l^{(n)} \psi_{n,l}(\mathbf{x}) \exp\left(-i\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right). \quad (2.21)$$

I coefficienti sono gli operatori di creazione e distruzione fermionici di Fock che soddisfano

$$\{\hat{c}_l^{(n)}, \hat{c}_m^{(k)\dagger}\} = \delta_{n,k} \delta_{l,m}, \quad (2.22)$$

con tutti gli altri anticommutatori nulli.

Concentrandosi sul livello di Landau più basso, $n = 0$ o LLL (*Lowest Landau Level*), l'operatore di campo assume la forma

$$\hat{\Psi}(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \hat{c}_l^{(0)} \psi_{0,l}(\mathbf{x}) \exp\left(-i \frac{\omega_c}{2} t\right), \quad (2.23)$$

con le $\psi_{0,l}$ date dalla (2.14); se consideriamo il LLL completamente pieno, il corrispondente stato quantistico $|\Omega\rangle$ avrà tutti gli stati di momento angolare occupati, con un valore del momento angolare totale pari a L e un numero complessivo di elettroni $N_e = L + 1$. Lo stato $|\Omega\rangle$ è ottenuto agendo sul vuoto di Fock con gli operatori di creazione fermionici

$$|\Omega\rangle = c_0^\dagger c_1^\dagger \cdots c_L^\dagger |0\rangle. \quad (2.24)$$

Quando lo stato fondamentale è completamente pieno, ogni orbitale di momento angolare l è occupato da un elettrone dando luogo a una configurazione complessivamente simile a una goccia di liquido di raggio $R \simeq l_B \sqrt{L}$, Fig.(2.3). Questa configurazione è chiaramente incompressibile. Una compressione della goccia ne diminuirebbe il momento angolare e richiederebbe il salto di un elettrone al livello di Landau superiore. Tali transizioni sono però vietate dal gap di energia che separa i due livelli. L'incompressibilità è riflessa anche nella distribuzione spaziale della densità. Il suo valore di aspettazione è facilmente calcolabile in seconda quantizzazione

$$\langle \Omega | \rho_e | \Omega \rangle = \langle \Omega | \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} | \Omega \rangle = \frac{1}{l_B^2 \pi} \exp(-r^2/l_B^2) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{r}{l}\right)^{2l}. \quad (2.25)$$

La Fig.(2.5) mostra il profilo della densità della goccia di fluido quantistico incompressibile. Il carattere fluido è riflesso dal valore uniforme al suo interno, per $r \ll l_B \sqrt{L}$, che diventa rapidamente nullo al bordo $r \simeq l_B \sqrt{L}$.

2.3 L'effetto Hall quantistico frazionario

La funzione d'onda di Laughlin

Abbiamo visto che nel caso di conducibilità Hall intera i plateau possono essere descritti nel modello di elettroni liberi. Nel caso di riempimento frazionario di un livello di Landau è necessario introdurre l'interazione coulombiana per eliminare la degenerazione e ottenere un gap di energia, con la conseguente quantizzazione della conducibilità Hall.

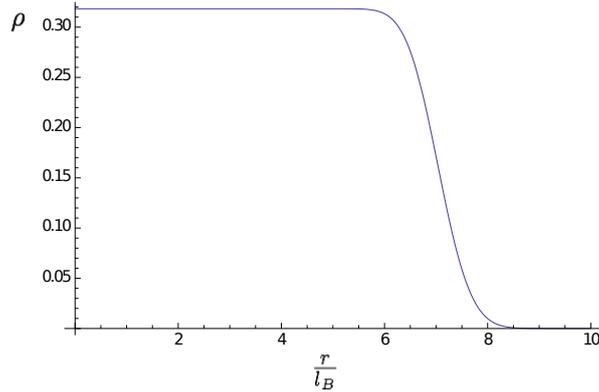


Figura 2.5: Valore di aspettazione della densità di carica ρ in unità $1/l_B^2$ per il primo livello di Landau completamente riempito fino a $L=50$ in funzione di r/l_B .

La pittura fisica fondamentale dell'effetto Hall frazionario per $\nu = 1/p$ con p dispari, è dovuta a Laughlin [14], che ha mostrato come si realizzi un nuovo stato della materia. Non è un solido, come un reticolo di Wigner perchè non avrebbe densità uniforme, ma un fluido quantistico incompressibile con proprietà topologiche. La fluidità è sinonimo di densità uniforme mentre l'incompressibilità dell'esistenza di un gap di energia tra lo stato fondamentale e le onde di densità. L'approccio di Laughlin evidenzia inoltre che le eccitazioni hanno carica frazionaria e statistica quantistica frazionaria: ovvero non sono nè bosoni nè fermioni ma anioni, un termine introdotto da Wilczek [16]. Per una review si veda [25].

L'ansatz di Laughlin descrive lo stato fondamentale del sistema mediante una funzione d'onda variazionale che generalizza l'espressione (2.19) nel primo livello di Landau nel modo seguente:

$$\Psi_p(\{z_i\}, \{\bar{z}_i\}) = \prod_{0 \leq i < j \leq N_e} (z_i - z_j)^p \exp\left(-\sum_i |z_i|^2 / 2l_B^2\right), \quad (2.26)$$

dove p è dispari per la richiesta di antisimmetria nello scambio degli elettroni. Le proprietà fisiche dello stato descritto dalla (2.26) si deducono interpretando il modulo quadro della funzione d'onda come una densità di probabilità classica come segue

$$|\Psi_p(\{z_i\}, \{\bar{z}_i\})|^2 = \exp(-\beta V(\{z_i\}, \{\bar{z}_i\})). \quad (2.27)$$

Ponendo la temperatura fittizia $\beta = 1/p$ troviamo l'espressione

$$V(\{z_i\}, \{\bar{z}_i\}) = -2p^2 \sum_{j < k} \ln|z_j - z_k| + \frac{p}{l_B^2} \sum_i |z_i|^2, \quad (2.28)$$

che descrive l'energia potenziale di un plasma in due dimensioni di particelle di carica p che interagiscono col potenziale elettrostatico logaritmico, e sono attratte all'origine da un fondo neutralizzante di densità di carica $\sigma = 1/\pi l_B^2$. La tendenza naturale di

un plasma è quella di raggiungere configurazioni localmente neutre, quindi la densità elettronica dello stato quantistico,

$$\rho_e(z_1) = \frac{N \int \cdots \int |\Psi_p(\{z_i\}, \{\bar{z}_i\})|^2 dz_2 \dots dz_N}{\langle p|p \rangle}, \quad (2.29)$$

deve essere uguale a $1/p$ volte la densità di carica del plasma equivalente, quindi uniforme e uguale a

$$\rho_e = \frac{1}{\pi p l_B^2}. \quad (2.30)$$

Esprimendo il filling fraction $\nu = 1/p$ in termini della densità elettronica ρ_e e della lunghezza magnetica l_B^2

$$\nu = \frac{1}{p} = \rho_e \pi l_B^2 = N_e \frac{\Phi_0}{\Phi} = \frac{N_e}{N_s}, \quad (2.31)$$

otteniamo nuovamente il filling fraction come rapporto tra il numero N_e di elettroni e il numero N_s di flussi attraverso il campione. La densità di carica ha lo stesso andamento uniforme della Fig.(2.5) in funzione della distanza dall'origine, e valore dato dalla (2.30).

L'uniformità garantita dalla neutralità del plasma è solo sulle scale di lunghezza maggiori della distanza tra particelle. Per garantire l'uniformità su scale minori dobbiamo vedere se il plasma equivalente è un liquido, ovvero se l'interazione coulombiana è schermata dinamicamente (Debye screening). Questo è quanto accade nel nostro caso, caratterizzato dalla costante di accoppiamento adimensionale del plasma (2.28) $\Gamma = 2p^2$. Analisi numeriche mostrano che il plasma è un liquido per $\Gamma < 140$, quindi nei casi di interesse per l'effetto Hall frazionario, $1 \leq p \leq 7$, il plasma equivalente è senza dubbio un liquido a densità uniforme.

Le simulazioni numeriche dimostrano che la funzione d'onda di Laughlin ha un'ottima sovrapposizione con lo stato fondamentale del problema a più corpi ottenuto anch'esso per via numerica in presenza d'interazione coulombiana ed anche altre interazioni repulsive. In particolare la funzione d'onda di Laughlin è lo stato fondamentale esatto del potenziale d'interazione a corto raggio, detto pseudo-potenziale di Haldane [9]. Queste ed altre osservazioni permettono di concludere che la funzione d'onda di Laughlin descrive in modo ottimale lo stato fondamentale del sistema nel caso frazionario $\nu = 1/p$.

Carica e statistica frazionaria delle eccitazioni

Un'eccitazione del liquido incompressibile di Laughlin corrisponde a un vortice che modifica localmente la densità. Infatti le fluttuazioni di densità, ovvero di carica, sono schermate sulla lunghezza tipica del problema, la lunghezza magnetica l_B . Il gap corrisponde al costo di energia finito necessario per creare il vortice. Secondo la teoria di Laughlin questo vortice, o quasi-buca, localizzata nel punto ξ è data dalla funzione

d'onda

$$\Psi_p(\xi, \{z_i\}, \{\bar{z}_i\}) = \mathcal{N} \prod_{i=1}^N (z_i - \xi) \Psi_p(\{z_i\}, \{\bar{z}_i\}), \quad (2.32)$$

dove \mathcal{N} è una costante di normalizzazione. Il termine aggiunto a fattore dell'espressione dello stato fondamentale si comporta come una barriera centrifuga che allontana ogni elettrone dal punto ξ , lasciando altrove lo stato fondamentale leggermente perturbato.

Riprendendo l'analogia col plasma equivalente troviamo che la funzione di probabilità classica è data da

$$|\Psi_p(\xi, \{z_i\}, \{\bar{z}_i\})|^2 = \exp\left(-\beta(V(\{z_i\}, \{\bar{z}_i\}) - 2p \sum_i \ln|z_i - \xi|)\right). \quad (2.33)$$

In questo caso gli elettroni, oltre a $V(\{z_i\}, \{\bar{z}_i\})$ sentono un potenziale aggiuntivo pari a $-2p \sum_i \ln|z_i - \xi|$. Tale potenziale è prodotto da una carica unitaria che si va ad aggiungere alla densità di fondo nel punto ξ . Per mantenere la neutralità complessiva del plasma, attorno alla carica unitaria nel punto ξ si dovrà accumulare una carica uguale e opposta. Poichè nel plasma equivalente ogni particella ha carica p , si dovranno accumulare $1/p$ elettroni per bilanciare l'eccitazione. La carica elettrica dell'eccitazione è perciò frazionaria, $q = e/p$.

Osserviamo inoltre che la funzione d'onda di Laughlin per due quasi-buche, una in ξ_1 e l'altra in ξ_2 , comporta l'inserimento del fattore $\prod_{i=1}^N (z_i - \xi_1)(z_i - \xi_2)$, più un fattore relativo $(\xi_1 - \xi_2)^{1/p}$, ottenendo la funzione d'onda complessiva

$$\Psi_p(\xi_1, \xi_2, \{z_i\}, \{\bar{z}_i\}) = \mathcal{N} (\xi_1 - \xi_2)^{\frac{1}{p}} \prod_{i=1}^N (z_i - \xi_1)(z_i - \xi_2) \Psi_p(\{z_i\}, \{\bar{z}_i\}). \quad (2.34)$$

Il fattore olomorfo con potenza frazionaria può essere parzialmente giustificato dalla neutralità del plasma equivalente.

In generale, la statistica quantistica di un sistema di particelle identiche per lo scambio di due di esse si ottiene effettuando la continuazione analitica nelle rispettive coordinate z_1, z_2 ,

$$(z_1 - z_2) \rightarrow e^{i\theta} (z_1 - z_2), \quad \text{con } \theta \in [0, \pi]. \quad (2.35)$$

Se prendiamo la funzione d'onda di Laughlin (2.26) per lo stato fondamentale del FQHE, uno scambio di due elettroni implica

$$\Psi_p(\{z_i\}, \{\bar{z}_i\}) \rightarrow e^{i\pi p} \Psi_p(\{z_i\}, \{\bar{z}_i\}) = -\Psi_p(\{z_i\}, \{\bar{z}_i\}). \quad (2.36)$$

Questo risultato conferma che la funzione d'onda di Laughlin rispetta la statistica fermionica degli elettroni per valori di p dispari. Nel caso della funzione d'onda di due quasibuche (2.34), la fase accumulata dalla funzione d'onda per uno scambio delle due coordinate è

$$\Psi_p(\xi_1, \xi_2, \{z_i\}, \{\bar{z}_i\}) = e^{\frac{i\pi}{p}} \Psi_p(\xi_1, \xi_2, \{z_i\}, \{\bar{z}_i\}). \quad (2.37)$$

La statistica delle quasibuche del FQHE è perciò frazionaria

$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{1}{p} = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots, \quad (2.38)$$

ovvero le quasibuche sono anioni. Vedremo meglio in seguito che l'introduzione del termine nella (2.34) responsabile per la statistica frazionaria è giustificata dalla teoria effettiva di Chern-Simons. L'ulteriore fase acquistata dalla funzione d'onda coincide infatti con la fase di Aharonov-Bohm corrispondente al moto di due cariche nel campo di gauge di Chern-Simons.

Costruzione gerarchica. Serie di Jain.

La serie di Jain con $\nu = m/(2mq \pm 1)$, con m e q interi positivi, è un'altra serie di plateau stabili della resistività Hall appartenenti al livello di Landau più basso. Una caratterizzazione di questi stati è stata fornita da Jain mediante la teoria dei fermioni composti [17]. In questa teoria si analizza l'effetto Hall intero di nuove particelle, dette fermioni composti, elettroni ai quali sono accoppiati $2q$ quanti di flusso Φ_0 . Le nuove particelle sono composte perchè dotate di carica e e $2q$ quanti di flusso, e fermioniche perchè il numero pari di flussi per ogni elettrone non ne cambia la statistica. Per $\nu^* = m$ le particelle composte, supposte debolmente interagenti, formano un fluido incompressibile riempiendo m livelli di Landau. Il flusso totale accoppiato al sistema di densità ρ è $2q\Phi_0\rho$ e dovrà essere sottratto al flusso del campo B . Quindi il fluido frazionario di elettroni in un campo magnetico B è messo in corrispondenza con un fluido intero di fermioni composti in presenza di un campo magnetico $B^* = B - 2q\Phi_0\rho$. Il filling fraction $\nu^* = m$ dei fermioni composti è legato a quello degli elettroni da $\nu = m/(2mq \pm 1)$. In base a questa costruzione dei fermioni composti, la teoria di Jain fornisce la funzione d'onda dello stato fondamentale e per le eccitazioni del fluido, con carica minima $1/(2q + 1)$. L'esistenza di eccitazioni debolmente interagenti accoppiate al campo ridotto B^* è confermata da molti esperimenti.

2.4 Incompressibilità e stati di bordo del fluido Hall

Il comportamento quantistico del fluido incompressibile è evidente dalla forma smussata della densità della goccia ai bordi del campione, Fig.(2.5), dove la probabilità di occupazione non è nè zero nè uno. La densità di una goccia di liquido classico ha invece un bordo netto a scalino. In [19] si evidenzia che nel limite $N_e \rightarrow \infty$ la densità quantistica (2.25) assume un profilo classico. Infatti, nella coordinata riscalata $w = z/\sqrt{N_e}$, la densità ha limite per N_e infinito pari a

$$\lim_{N_e \rightarrow \infty} \rho_e(|z| = \sqrt{N_e}|w|) = \frac{\nu}{\pi l_B^2} \Theta\left(1 - \frac{|w|^2}{l_B^2}\right), \quad (2.39)$$

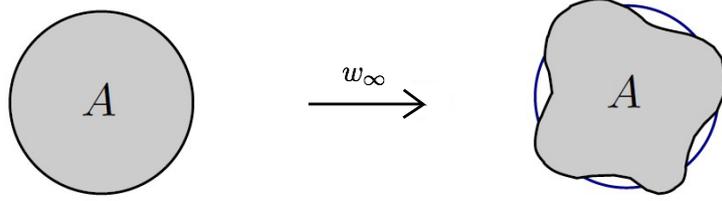


Figura 2.6: Onde di bordo di una goccia incompressibile generate dalle trasformazioni che soddisfano l'algebra w_∞ .

dove Θ è la funzione gradino. Se inoltre ricordiamo che la densità degli elettroni per un campione di area A e filling fraction ν è legata alla lunghezza magnetica dalla relazione

$$\rho_e = \frac{N_e}{A} = \nu \frac{1}{\pi l_B^2}, \quad (2.40)$$

appare chiaro che non è possibile fare un limite semiclassico $\hbar \rightarrow 0$ con tutte le altre quantità fissate. Per un dato campo magnetico B e filling fraction ν , il limite $\hbar \rightarrow 0$ implica la condizione $N_e \rightarrow \infty$, se il sistema deve avere un'area macroscopica finita A .

Lo studio di una goccia classica con profilo a gradino (2.39) mette in luce un altro aspetto del fluido Hall [20] [21]. Se consideriamo deformazioni di questa goccia, la densità non può cambiare localmente a causa dell'incompressibilità. Il suo integrale spaziale dà il numero di particelle N_e costante. Inoltre, essendo $\rho_e = N_e/A$, anche l'area A occupata dal campione deve rimanere costante, ovvero le possibili deformazioni della goccia hanno stessa area. Le configurazioni del fluido incompressibile sono quindi legate tra loro dalle riparametrizzazioni delle coordinate che conservano l'area (*area preserving diffeomorphisms*).

I generatori di queste trasformazioni soddisfano l'algebra w_∞ [24]. Si dimostra [21] che applicando queste trasformazioni si ottengono le onde di bordo che deformano la goccia incompressibile Fig.(2.6). Queste osservazioni sono il punto di partenza per lo studio [19], [20], [21], in cui è mostrata la possibilità di poter descrivere il sistema Hall come un liquido quantistico incompressibile con simmetria $W_{1+\infty}$, la versione quantistica della simmetria w_∞ .

Nelle precedenti sezioni abbiamo studiato i livelli di Landau nel piano. Quando però consideriamo una geometria finita, come un disco o un anello, la presenza di un potenziale confinante $V(|\mathbf{x}|)$ al bordo modifica la struttura dei livelli di Landau [15]. Gli autovalori dell'energia non sono più degeneri ma acquistano una dipendenza approssimativamente lineare in l , il momento angolare riscalato al bordo, $J = L + l$ con $L = R^2/2\nu \gg l$, ed R il raggio del disco, Fig. (2.7). A causa dell'incompressibilità, il potenziale crea una superficie di Fermi lungo il bordo. Le onde di bordo sono eccitazioni chirali a massa nulla con piccola energia $E \simeq O(l/R)$ (*chiral gapless edge excitations*). Le eccitazioni di bulk sono invece deformazioni localizzate della densità, con carica

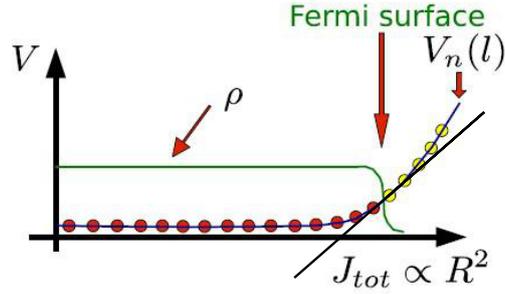


Figura 2.7: LLL nel disco. I livello di energia include il potenziale di confinamento $V(R)$ ed è approssimato linearmente al bordo R . La superficie di Fermi si realizza nello spazio delle configurazioni lungo il bordo del campione.

$qe/p, q \in \mathbb{Z}$, e con gap di energia dato dall'autointerazione coulombiana $E \sim O(e^2/l)$. Data la condizione di densità costante, la deformazione localizzata della densità del bulk è compensata da un cambio di densità nel bordo, dove si crea un'eccitazione carica.

E' dovuta a Stone [40] [22] [23] la dimostrazione che i fermioni (2+1)-dimensionali corrispondono a fermioni di Weyl (1+1)-dimensionali al bordo, che sono chirali, carichi e relativistici, il cui mare di Dirac corrisponde a un livello di Landau completamente pieno. Il risultato di Stone è ottenuto in [18] riprendendo il formalismo della seconda quantizzazione Sez.(2.2) e inserendo gli effetti di bordo nell'hamiltoniana (2.20) tramite un potenziale $\int d^2x V(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x})$,

$$H = \frac{1}{2m} \int d^2\mathbf{x} (D_i \hat{\Psi})^\dagger (D_i \hat{\Psi}) + \int d^2\mathbf{x} V(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}). \quad (2.41)$$

Le eccitazioni nello spettro dell'hamiltoniana al bordo del campione, cioè per $l \simeq L$, hanno una relazione di dispersione relativistica del tipo

$$\epsilon_l \simeq \frac{v}{R}(l - L - \mu), \quad (2.42)$$

dove la velocità v e il potenziale chimico μ sono parametri fenomenologici. La formulazione relativistica della teoria in (1+1)-dimensioni è ottenuta prendendo il limite termodinamico [18] $R^2 \sim L \rightarrow \infty$. Introducendo le variabili shiftate

$$\epsilon_l = \epsilon_{L+l}, \quad \hat{b}_j = \hat{a}_{L+l}, \quad \text{per } l \ll L \rightarrow \infty, \quad (2.43)$$

l'operatore di campo (2.21) valutato al bordo assume l'espressione

$$\Psi(Re^{i\theta}, t) = \left(\frac{2}{\pi l_B^2} \right)^{1/4} \exp(i(L + \mu)) F_R(\theta, t), \quad (2.44)$$

dove

$$F_R(\theta, t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{b}_j}{\sqrt{2\pi R}} \exp\left(i(j - \mu) \left(\theta - \frac{vR}{t} \right) \right). \quad (2.45)$$

L'hamiltoniana del sistema (2.41) espressa in termini del campo $F_R(\theta, t)$, nel limite termodinamico assume la seguente espressione di bordo

$$H_R = \frac{v}{2} \int_0^{2\pi R} F_R^\dagger (-i\partial_x) F_R + c.c., \quad (2.46)$$

dove $x = R\theta$ è la coordinata sul bordo. Le equazioni (2.45) e (2.46) sono il campo e l'hamiltoniana di un fermione di Weyl che si muove alla velocità v sulla circonferenza di lunghezza $2\pi R$. L'espressione (2.45) mostra l'importanza del potenziale chimico μ per le condizioni al contorno soddisfatte dal campo. Si ottiene la condizione di raccordo

$$F_R(\theta + 2\pi) = e^{-2\pi i\mu} F_R(\theta), \quad (2.47)$$

parametrizzata dalla parte frazionaria di μ . Le scelte più comuni in CFT sono a) $\mu = 0$, corrispondente alle condizioni periodiche di Ramond nel cerchio; b) $\mu = 1/2$, corrispondente alle condizioni antiperiodiche di Neveu-Schwarz nel cerchio.

2.5 Esperimenti sulla carica e statistica frazionaria

Misure della carica frazionaria attraverso lo shot noise

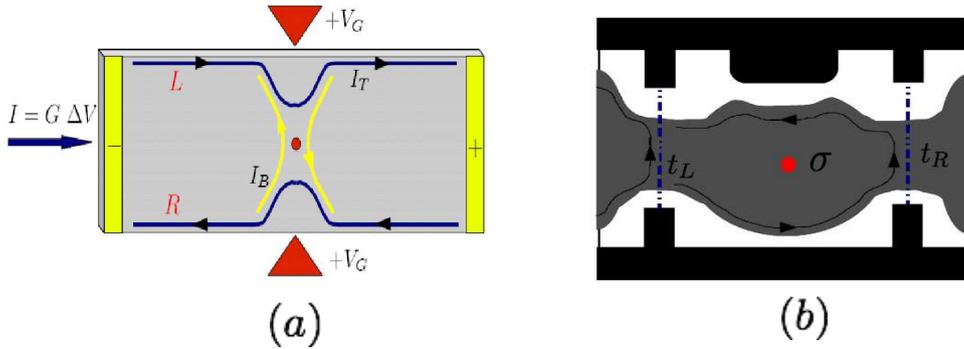


Figura 2.8: (a): setup dell'esperimento di misura della carica frazionaria. Il fluido è compresso in un punto attraverso un potenziale statico V_G . Il punto di contatto permette un effetto tunnel tra i due bordi. (b): l'interferometro Fabry-Perot per lo studio della statistica frazionaria. Mediante l'inserzione di due costrizioni R e L gli stati di bordo possono avvolgersi attorno alle quasiparticelle nel bulk grazie al tunneling nelle costrizioni.

Discutiamo i punti fondamentali degli esperimenti di *tunneling* di eccitazioni di bordo che hanno permesso di misurare la carica frazionaria delle eccitazioni [26] [27], Fig.(2.8) (a). Queste eccitazioni sono chirali lungo un bordo e antichirali nel bordo opposto e quindi sono non interagenti. In presenza di una costrizione locale del fluido è possibile far interagire le eccitazioni sui due bordi mediante un termine reale nell'hamiltoniana al punto di contatto, che introduce un effetto di tunneling tra i due bordi. In un

regime di costrizione debole è dominante il tunneling delle quasiparticelle di carica più bassa (interazione più rilevante). Questo processo è descritto da una statistica di tipo poissoniano per eventi indipendenti, ovvero scorrelati tra loro. Inoltre a temperature estremamente basse il rumore termico è soppresso, e rimane solo il rumore quantistico (*shot noise*) dovuto alla natura granulare dei portatori di carica. Nella statistica di Poisson la varianza del numero di particelle che passano da un bordo all'altro è proporzionale al valore medio: ne segue che la fluttuazione quadratica S_I della corrente di backscattering I_B a frequenza nulla è legata alla corrente totale I dalla relazione

$$S_I = \langle |\delta I_B(\omega)|^2 \rangle |_{\omega=0} = e^* I, \quad (2.48)$$

che permette di determinare la carica e^* delle eccitazioni, [28]. I risultati sperimentali confermano la frazionalizzazione della carica $e^* = e/p$ negli stati Hall della serie di Laughlin $\nu = 1/p$, ed in numerosi stati della serie gerarchica di Jain, in accordo con le teorie fenomenologiche e le predizioni delle teorie conformi descritte nei prossimi capitoli.

Interferometri di Fabry-Perot e statistica frazionaria

Nel FQHE le eccitazioni cariche degli stati di bordo e di bulk sono anioni. La fase accumulata dalla funzione d'onda per uno scambio di due eccitazioni, o per l'avvolgimento di un'eccitazione attorno a un'altra può essere misurata usando l'interferometro di Fabry-Perot [29], Fig.(2.8) (b). Le quasiparticelle che si muovono lungo il bordo superiore e inferiore possono subire un effetto tunnel tra i due bordi in corrispondenza sia della restrizione L che R, con ampiezze di tunneling t_L e t_R . La corrente di tunneling porta a delle fluttuazioni della conduttanza longitudinale σ_{yy} . La probabilità che le eccitazioni di bordo si spostino dall'angolo in basso a sinistra all'angolo in alto a sinistra misura l'avvolgimento tra le quasiparticelle N_{qp} nel bulk (σ nella figura) e le quasiparticelle che si muovono sul bordo. Questa probabilità è data, all'ordine più basso in t_L e t_R , dalla somma dei contributi dei due possibili cammini

$$\sigma_{yy} \propto |t_L U_L + t_R U_R |\Psi\rangle|^2 = |t_R|^2 + |t_L|^2 + 2Re(e^{2i\alpha} t_L^* t_R \langle \Psi | M_{\text{edge bulk}} | \Psi \rangle), \quad (2.49)$$

dove $|\Psi\rangle$ è lo stato della corrente al punto iniziale, $e^{2i\alpha}$ è la fase abeliana di Aharonov-Bohm dovuta al campo magnetico esterno e $M_{\text{edge bulk}} = U_L^{-1} U_R$ è l'operatore unitario che rappresenta la statistica frazionaria tra le particelle di bordo e di bulk. Per tunneling deboli, l'effetto tunnel dominante è dato dalle quasiparticelle con carica frazionaria più piccola. Per stati della serie di Laughlin e di Jain, il termine di interferenza corrispondente all'ultimo termine nella (2.49) è proporzionale a

$$2|t_L^* t_R|^2 \cos(2\pi\nu) \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} - N_{qp} \right). \quad (2.50)$$

Il primo contributo è la fase di Aharonov-Bohm del campo magnetico, mentre il secondo è la fase statistica (monodromia) della quasiparticella nel bordo attorno a N_{qp} anioni nel bulk con carica νe . La carica delle quasiparticelle nel bordo può essere misurata dalla modulazione di σ_{yy} in funzione di Φ . La statistica frazionaria è invece ottenuta aumentando il numero di quasiparticelle nel bulk da $N_{qp} \rightarrow N_{qp} + 1$. Prime verifiche sperimentali di questo importantissimo risultato per la teoria dell'effetto Hall quantistico sono state presentate negli ultimi due anni [30] [31].

Capitolo 3

Teorie conformi del QHE e funzioni di partizione

Il fluido Hall incompressibile possiede eccitazioni di bassa energia $O(1/R)$ situate al bordo del sistema nelle geometrie realizzate sperimentalmente. A partire da Halperin [15] si è cominciato a studiarne la dinamica. Abbiamo visto che queste eccitazioni sono relativistiche (a massa nulla) e chirali in (1+1)-dimensioni. Nel Cap (1) abbiamo evidenziato che una teoria (1 + 1)-dimensionale a massa nulla è invariante di scala e possiede naturalmente la simmetria conforme infinito dimensionale dell'algebra di Virasoro. La teoria effettiva di bassa energia (grandi distanze) delle eccitazioni di bordo è quindi una CFT (1 + 1)-dimensionale. Nel caso più semplice si tratta della teoria con corrente $U(1)$ e carica centrale $c = 1$ che descrive i plateau di Laughlin con conducibilità $\sigma_H = (e^2/h)\nu$, $\nu = 1, 1/3, 1/5 \dots$.

Più in generale le teorie conformi utilizzate nell'effetto Hall quantistico sono caratterizzate da numeri quantici che assumono sempre valori razionali, ovvero appartengono alla classe razionale RCFT (*rational conformal field theory*). Dal punto di vista matematico queste teorie contengono un numero finito di rappresentazioni dell'algebra di simmetria chirale, cioè l'algebra di Virasoro estesa da altri generatori come la corrente $U(1)$.

La funzione di partizione della teoria definita nella geometria di un toro spazio-temporale $S^1 \times S^1$ ha una funzione molto importante perchè serve per definire la RCFT: essa contiene tutti gli stati presenti nello spazio di Hilbert, organizzati in settori corrispondenti alle rappresentazioni dell'algebra di simmetria estesa.

La teoria conforme (1+1)-dimensionale di bordo è equivalente alla teoria topologica di Chern-Simons definita per l'intero sistema (2 + 1)-dimensionale [32], [33]. Oltre alle eccitazioni di bordo la teoria topologica descrive le eccitazioni di bulk statiche. La fisica di bassa energia del QHE è quindi descritta in termini di quasiparticelle statiche nel bulk e di eccitazioni dinamiche al bordo del sistema. Questa connessione *bulk-boundary* è valida in generale: Witten [34] [35] ha dimostrato che ogni RCFT è associata a una

teoria di Chern-Simons, e che la funzione di partizione del toro della prima teoria corrisponde alla funzione d'onda per la seconda teoria nella varietà $S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}$, dove \mathbb{R} è l'asse temporale.

Nel seguito discutiamo le proprietà principali della teoria topologica di CS, concentrandosi poi sulla simmetria conforme che caratterizza le eccitazioni di bordo e la costruzione delle funzioni di partizione invarianti modulari.

3.1 Aspetti generali della teoria di Chern-Simons

Un sistema di particelle cariche può essere descritto da una corrente di materia conservata J_μ [37]. In due dimensioni spaziali questa corrente è duale a un campo di gauge a_μ (differente dal campo elettromagnetico esterno), $J_\mu = \frac{1}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu\lambda}\partial^\nu a^\lambda$, con $a_\mu \sim a_\mu + \partial_\mu\chi$. Nell'approccio idrodinamico del fluido Hall, J_μ è la densità di corrente che descrive i gradi di libertà a bassa energia: la fluttuazione δJ_μ indotta da una variazione del campo elettromagnetico δA_λ deve soddisfare l'equazione:

$$-e\delta J^\mu = -\sigma_{xy}\epsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu\delta A_\lambda = -\frac{\nu e^2}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu\delta A_\lambda, \quad (3.1)$$

per riprodurre la conducibilità Hall a riempimento $\nu = 1/p$, con $p = 1, 3, 5 \dots$. (Usiamo $B < 0$ in modo che $-eB > 0$, e $\hbar = c = 1$).

La teoria gauge invariante di Chern-Simons, con azione

$$S = \int d^2x dt \left(-\frac{p}{4\pi}\epsilon^{\mu\nu\lambda}a_\mu\partial_\nu a_\lambda + \frac{e}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu a_\lambda \right), \quad (3.2)$$

riproduce la (3.1) dalla variazione canonica dell'azione efficace

$$J^\mu = -\frac{\delta\Gamma[A_\mu]}{\delta A_\mu}, \quad (3.3)$$

dove $\Gamma[A_\mu]$ è ottenuta integrando il campo a_μ nella (3.2) mediante l'uso delle equazioni del moto. Osserviamo che il termine di Chern-Simons in $(2+1)$ -dimensioni è più rilevante, nel senso del gruppo di rinormalizzazione, del termine di Maxwell, e viola la simmetria di parità e di inversione temporale come accade nel QHE per la presenza del campo magnetico B .

L'azione (3.2) descrive la risposta lineare dello stato fondamentale a un campo elettromagnetico esterno. Per avere una descrizione completa dobbiamo discutere le eccitazioni della teoria effettiva. In particolare dobbiamo assicurarci che questa teoria contenga delle eccitazioni con gli stessi numeri quantici degli elettroni. Introduciamo perciò una sorgente statica che possiede una carica l rispetto al campo a_μ nel punto \mathbf{x}_0 [37] [38]. L'azione di Chern-Simons diventa:

$$S = \int d^2x dt \left(-\frac{p}{4\pi}\epsilon^{\mu\nu\lambda}a_\mu\partial_\nu a_\lambda + \frac{e}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu a_\lambda + la_0\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right). \quad (3.4)$$

Risolvendo le equazioni del moto troviamo

$$J^0 = -\frac{eB}{2\pi p} + \frac{l}{p}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (3.5)$$

dove il primo termine coincide con la (3.1), mentre il secondo corrisponde all'aumento nella densità elettronica associato all'eccitazione. L'Eq.(3.5) mostra che l'eccitazione inserita nel punto \mathbf{x}_0 ha carica elettrica $Q = -el/p$, e l/p unità di flusso del campo a_μ . Per due eccitazioni con cariche l_1 e l_2 , a causa dell'effetto Aharonov-Bohm, l'avvolgimento di un'eccitazione attorno all'altra introduce una fase non banale

$$\theta = \frac{2\pi}{p} \times l_1 \times l_2. \quad (3.6)$$

Questo è l'effetto topologico introdotto dal campo di Chern-Simons. Nel caso di eccitazioni identiche, con $l_1 = l_2 = l$, uno scambio delle due comporta la fase

$$\theta = \pi \frac{l^2}{p}. \quad (3.7)$$

La verifica che la teoria di Chern-Simons contenga delle eccitazioni con carica e statistica fermionica è fatta osservando che un elettrone di carica $q = -e$ corrisponde a particelle che hanno carica p rispetto ad a_μ . Poichè p è dispari, la fase statistica accumulata per lo scambio di due elettroni è, secondo la (3.7), $\exp(i\pi p) = -1$. Questa identificazione permette di determinare la carica e la statistica frazionaria delle eccitazioni osservando che l'avvolgimento di un elettrone attorno a un'eccitazione con carica l dà la fase $\theta = 2\pi l$. La regolarità della funzione d'onda fermionica impone che la carica $l \in \mathbb{Z}$. La teoria di Chern-Simons contiene perciò, per p fissato, eccitazioni di carica positiva e negativa, il cui minimo valore è $Q = \pm e/p$, corrispondente a $l = \pm 1$. La statistica corrispondente allo scambio di due quasiparticelle è data invece dalla fase $\theta = \pi/p$, confermando che questi sono anioni.

La generalizzazione a N fluidi [38] è determinata introducendo un vettore di campi statistici $a_{I\mu}$, $I = 1 \dots, N$, accoppiati tra loro mediante una matrice di interi K_{IJ} e a una corrente esterna non dinamica $j_{I\mu}$. Si ottiene l'azione

$$S = \int d^2x dt \left(-\frac{1}{4\pi} K_{IJ} a_{I\mu} \partial_\nu a_{J\lambda} \epsilon^{\mu\nu\lambda} + \frac{e}{2\pi} A_\mu t_I \partial_\nu a_{I\lambda} \epsilon^{\mu\nu\lambda} + l_I a_{I\mu} j_{I\mu} \right), \quad (3.8)$$

dove A_μ è il campo elettromagnetico esterno e t_I è il vettore delle cariche dei campi $a_{I\mu}$. Nel caso generale il filling fraction, la carica e la statistica delle quasiparticelle è data dalle seguenti relazioni

$$\nu = \sum_{I,J} t_I K_{IJ}^{-1} t_J, \quad q = \sum_{I,J} t_I K_{IJ}^{-1} l_J, \quad \theta = \pi \sum_{I,J} l_J K_{IJ}^{-1} l_J. \quad (3.9)$$

I parametri (N, t_I, l_I, K_{IJ}) dipendono dal fluido topologico considerato. Abbiamo visto che la serie di Laughlin corrisponde al caso $N = t = 1$ e $K = p$. La serie di Jain

è data da N campi di gauge identici tra loro e matrice $K_{IJ} = \pm\delta_{I,J} + 2sC_{IJ}$, con $C_{IJ} = 1, t_I = 1, \forall I, J = 1, \dots, N$.

La teoria di Chern-Simons è una teoria topologica e come tale la sua hamiltoniana è nulla. L'azione (3.2) non introduce nessun grado di libertà che si propaga nello spazio $(2+1)$ -dimensionale, descrivendo soltanto gli effetti topologici. Quando la teoria di Chern-Simons è definita in uno spazio con bordo si manifestano anche delle eccitazioni di bordo, in accordo con la fisica del fluido incomprimibile descritta nel precedente capitolo. Un modo per collegare la teoria di Chern-Simons con la teoria conforme sul bordo è attraverso l'invarianza di gauge. In presenza del bordo l'azione di Chern-Simons non è più gauge invariante e la necessità di recuperarla impone l'introduzione di gradi di libertà sul bordo [38] [39] [40]. Nel caso della teoria ad una componente (3.2) la CFT con $c = 1$ è descritta dall'azione di Floreanini-Jackiw di un bosone chirale neutro che si muove sul bordo con velocità v [41],

$$S = -\frac{p}{4\pi} \int dxdt (\partial_t + v\partial_x) \phi \partial_x \phi, \quad (3.10)$$

la cui quantizzazione è discussa in [18].

3.2 CFT del fermione di Weyl e spettro IQHE

Riprendiamo la teoria del fermione di Weyl introdotta nel capitolo precedente. Questa è definita nel cilindro minkowskiano $(R\theta, t)$, composto dal cerchio e dalla coordinata temporale. Se passiamo al tempo euclideo con la trasformazione $t = -i\tau$, il piano spazio-temporale conforme è definito dalla la coordinata complessa η ,

$$\eta = \exp\left(\frac{1}{R}(v\tau + iR\theta)\right), \quad \text{Arg}\eta = \text{Arg}z, \quad (3.11)$$

dove z parametrizza l'originale piano in cui si trovano gli elettroni. Nella variabile η , l'operatore di campo è antilomorfo, e le espressioni per l'operatore e il suo hermitiano coniugato sono:

$$F_R(\bar{\eta}) = \frac{\eta^{1/2}}{\sqrt{2\pi R}} F(\bar{\eta}), \quad F(\bar{\eta}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{b}_j \bar{\eta}^{-j+\mu-1/2}, \quad (3.12)$$

$$F_R^\dagger(\bar{\eta}) = \frac{\eta^{1/2}}{\sqrt{2\pi R}} F^\dagger(\bar{\eta}), \quad F^\dagger(\bar{\eta}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{b}_j^\dagger \bar{\eta}^{j-\mu-1/2}, \quad (3.13)$$

dove abbiamo isolato gli operatori $F(\bar{\eta})$ e $F^\dagger(\bar{\eta})$ nella notazione del Cap.(2). Le equazioni del moto adesso coincidono con le condizioni di analiticità $\partial_\eta F = \partial_{\bar{\eta}} F^\dagger = 0$, e l'hamiltoniana H_R e la densità di corrente ρ_R sono anch'esse chirali

$$\rho_R = F_R^\dagger F_R, \quad (3.14)$$

$$H_R = \frac{1}{i} \oint d\bar{\eta} \mathcal{H}_R(\bar{\eta}), \quad \mathcal{H}_R(\bar{\eta}) = \frac{v}{2} (\partial_{\bar{\eta}} F_R^\dagger F_R - F^\dagger \partial_{\bar{\eta}} F). \quad (3.15)$$

Definiamo le cariche ρ_n e L_n , e esprimiamole in termini degli operatori di creazione e distruzione usando l'espansione dei campi (3.12),

$$\rho_n \equiv \frac{R}{i} \oint d\bar{\eta} \rho_R(\bar{\eta}) \bar{\eta}^{n-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{b}_{k-n}^\dagger \hat{b}_k, \quad (3.16)$$

$$L_n \equiv \frac{R}{iv} \oint d\eta \mathcal{H}_R(\bar{\eta}) \bar{\eta}^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(k - \frac{n}{2} - \mu\right) \hat{b}_{k-n}^\dagger \hat{b}_k. \quad (3.17)$$

Tali cariche generano, rispettivamente, le trasformazioni locali di gauge e conformi. Le trasformazioni globali sono generate da ρ_0 , operatore totale di carica, e $\{L_{-1}, L_0, L_1\}$, dove L_0 è l'hamiltoniana CFT adimensionale legata a quella sul bordo da $H_R = v/R(L_0 - 1/24)$. Nella notazione introdotta al Cap.(2), Eq.(2.43), il primo livello di Landau completamente pieno $|\Omega\rangle$, definito da

$$\hat{b}_k |\Omega\rangle = 0, \quad k > 0, \quad (3.18)$$

$$\hat{b}_k^\dagger |\Omega\rangle = 0, \quad k \leq 0, \quad (3.19)$$

corrisponde al mare di Dirac per la teoria relativistica delle eccitazioni di bordo. La prescrizione di ordinamento normale è ottenuta posizionando gli operatori di distruzione $\hat{b}_k (k > 0)$ e $\hat{b}_k^\dagger (k \leq 0)$ alla destra degli operatori di creazione $\hat{b}_k (k \leq 0)$ e $\hat{b}_k^\dagger (k > 0)$. Dalle regole di commutazione delle cariche ρ_n e L_n otteniamo l'algebra chirale della teoria conforme

$$\begin{aligned} [\rho_n, \rho_m] &= n\delta_{n+m}, \\ [L_n, \rho_m] &= -m\rho_{n+m}, \\ [L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m} - \frac{1}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Questa contiene l'algebra affine $\widehat{U(1)}$ dei generatori ρ_n delle trasformazioni di gauge locali e l'algebra di Virasoro dei generatori L_n . La carica centrale è $c = 1$, com'è noto per un fermione di Weyl. Le proprietà dello stato fondamentale ottenute dalle (3.20) sono

$$L_n |\Omega, \mu\rangle = 0, \quad \rho_n |\Omega, \mu\rangle = 0, \quad n > 0, \quad (3.21)$$

$$L_0 |\Omega, \mu\rangle = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}(\mu^2 - \mu)\right) |\Omega, \mu\rangle, \quad \rho_0 |\Omega, \mu\rangle = \left(\frac{1}{2} - \mu\right) |\Omega, \mu\rangle, \quad (3.22)$$

da cui vediamo che nel limite termodinamico il livello di Landau completamente pieno è uno stato di massimo peso della teoria chirale $c = 1$, con carica $Q_0 = \frac{1}{2} - \mu$, e dimensione conforme $h_0 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(\mu^2 - \mu)$. Il contenuto operatoriale è determinato dalla funzione di gran partizione del fermione di Weyl sul toro compattificando il tempo euclideo [18]

$$Z(q, w) = \frac{1}{\eta(q)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{(k+1/2-\mu)^2/2} w^{k+1/2-\mu}, \quad (3.23)$$

dove la $\eta(q)$ è la funzione di Dedekind, $q = \exp(-vT/R)$, T è il periodo di tempo euclideo e w è la fugacità. La funzione di partizione contiene due fattori base. Il fattore $1/\eta(q)$ rappresenta il contributo delle eccitazioni neutre particella-lacuna alla superficie di Fermi. Il secondo fattore è una somma su tutti i settori carichi, le eccitazioni di quasi-buca e quasi-particella, che sono in corrispondenza uno a uno con i campi primari V_{h_n, Q_n} . Gli esponenti di q e di w danno rispettivamente le loro dimensioni conformi e cariche

$$h_n = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} - \mu \right)^2, \quad (3.24)$$

$$Q_n = n + \frac{1}{2} - \mu. \quad (3.25)$$

Essendo Q_n la carica elettrica, la neutralità dello stato fondamentale impone

$$\mu = \frac{1}{2}. \quad (3.26)$$

Per il fermione di Weyl della CFT $c = 1$ di bordo scegliamo cioè le condizioni al contorno di Neveu-Schwarz. Lo stato fondamentale $|\Omega\rangle = |\Omega, \mu = 1/2\rangle$ è quindi $SL(2, \mathbb{C})$ invariante poichè è annichilato da tutti e tre i generatori delle trasformazioni conformi globali. Con questa scelta le dimensioni conformi e le cariche dei campi fondamentali diventano

$$h_n = \frac{n^2}{2}, \quad Q_n = n, \quad (3.27)$$

e ogni campo fondamentale può essere ottenuto dall'OPE dei due campi base $V_{1/2, -1} = F$ e $V_{1/2, 1} = F^\dagger$.

3.3 L'anomalia chirale

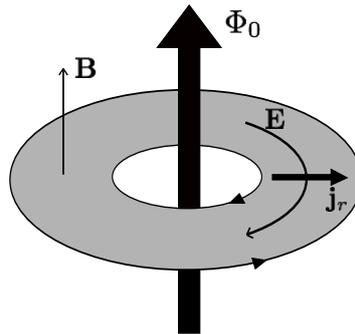


Figura 3.1: Inserzione adiabatica di un quanto di flusso nella geometria anulare. Il flusso variabile nel tempo genera un campo elettrico all'interno dell'anello che causa uno spostamento di carica da un bordo all'altra.

Mostriamo che la CFT chirale riproduce la corrente Hall nella geometria dell'anello. In questa geometria abbiamo una CFT chirale sul bordo esterno e una antichirale su

quello interno Fig.(3.1). Introduciamo nell'anello un tubo di flusso che si aggiunge al campo magnetico B , dato da

$$\delta B = 2\pi\Phi_0\delta^{(2)}(\mathbf{x}), \quad (3.28)$$

e che nella geometria anulare può essere descritto attraverso la gauge

$$\delta A_i = -\epsilon_{ij}\Phi_0\frac{x_j}{|\mathbf{x}|^2}. \quad (3.29)$$

Se il flusso inserito varia nel tempo si genera un campo elettrico trasverso $E_i = -\partial A_i/\partial t$ come in Fig.(3.1), che corrisponde a un campo elettrico uniforme (1 + 1)-dimensionale

$$E = -\frac{\partial\delta A_x}{\partial t} = \frac{\dot{\Phi}_0}{R}, \quad (3.30)$$

che si accoppia [18] al fermione di Weyl ai bordi dell'anello. La teoria presenta un'anomalia chirale, cioè la carica elettrica non è conservata al bordo. Per ottenerla possiamo fare una trasformazione di gauge in modo da eliminare il termine di potenziale vettore, $\delta A_i = 0$, ed introdurre il potenziale scalare $\delta A_0 = -\Phi_0 x/R$ nell'hamiltoniana del bordo esterno, ad esempio,

$$H_R = \frac{v}{2} \int_0^{2\pi R} F_R^\dagger (-i\partial_x) F_R + c.c. + \int_0^{2\pi R} dx e\delta A_0 \rho_R. \quad (3.31)$$

L'equazione di Heisenberg

$$i\frac{d\rho_R}{dt} = [\rho_R, H_R], \quad (3.32)$$

permette di calcolare la variazione della densità di carica ρ_R . Usando l'algebra chirale (3.20) otteniamo l'equazione dell'anomalia

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)\rho_R = -\frac{e}{2\pi}E_x. \quad (3.33)$$

Questa equazione esprime il tasso di produzione di carica che viene pompata fuori dal mare di Dirac, ovvero fuori dalla goccia di fluido quantistico. Una corrispondente espressione, di segno opposto, esprime l'anomalia chirale della teoria conforme sul bordo interno. L'anomalia chirale è quindi l'espressione della corrente Hall nella descrizione della CFT sul bordo trasverso. Notiamo che la teoria globale (2 + 1)-dimensionale non è affetta da anomalie perchè la carica che esce dal bordo esterno dell'anello è uguale a quella che entra in quello interno.

3.4 CFT del bosone chirale e spettro FQHE

E' noto che un fermione di Weyl è equivalente a un bosone chirale [42]: infatti le due teorie danno due rappresentazioni equivalenti dell'algebra chirale (3.20) [18]. La teoria del bosone chirale (3.10) risulta più conveniente perchè rappresenta altre CFT con

$c = 1$, che corrispondono a fermioni interagenti e permette di descrivere il FQHE. Come accennato nel Cap.(2) lo stato fondamentale di Laughlin con $\nu = 1/p$, è incomprimibile e dotato della simmetria $W_{1+\infty}$. La simmetria posseduta dal fluido, formulata nella teoria conforme al bordo, permette di dimostrare che la CFT corrispondente è data dal bosone chirale.

I campi primari della teoria bosonica sono gli operatori di vertice di Fubini-Veneziano

$$V_\beta(\bar{\eta}) =: e^{i\beta\phi(\bar{\eta})} :, \quad (3.34)$$

che hanno dimensioni conformi $h_n = n^2/2p$ e carica $Q_n = n/p$, dove $n \in \mathbb{Z}$ e p è la costante dell'azione bosonica. Nel caso $p = 1$ il contenuto operatoriale della teoria bosonica coincide con quello della teoria fermionica (3.27). In particolare i campi fermionici sono espressi dagli operatori di vertice bosonici $V_{\pm 1}$, con $F = V_{-1}$ e $F^\dagger = V_1$. La densità di carica nel cilindro $\rho_R =: F_R^\dagger F_R$: è espressa attraverso il campo bosonico da

$$\rho_R = -\frac{1}{2\pi}\partial_x\phi. \quad (3.35)$$

In presenza di un campo elettromagnetico esterno, la teoria presenta un'anomalia chirale [18]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-\frac{1}{2\pi}\partial_x\phi\right) = -\frac{e}{2\pi p}E_x. \quad (3.36)$$

Data l'identificazione della corrente Hall con l'anomalia chirale della CFT, otteniamo il filling fraction

$$\nu = \frac{1}{p}. \quad (3.37)$$

Le eccitazioni dello stato incomprimibile, con $\nu = 1/p$, sono associate ai campi primari dati dagli operatori di vertice e hanno carica frazionaria e dimensioni conformi dati dalle seguenti relazioni

$$Q_n = \frac{n}{p}, \quad h_n = \frac{n^2}{2p}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.38)$$

Il valore di aspettazione sul vuoto di due operatori di vertice dà la statistica frazionaria per lo scambio di due eccitazioni nei punti z_1, z_2 del piano

$$\theta_n = \frac{n^2}{p}. \quad (3.39)$$

Poichè p è dispari la teoria contiene l'eccitazione V_p con i numeri quantici $Q = 1$ e $\theta = 1$ di un elettrone. Questi risultati riproducono la teoria di Laughlin confermando la sua origine nelle simmetrie nella teoria di campo effettiva a bassa energia.

3.5 Funzioni di partizione per teorie abeliane $c = 1$ dei plateau di Laughlin

3.5.1 Geometria dell'anello

Nel Cap.(1) abbiamo visto che lo spazio di Hilbert di una RCFT è composto da un numero finito di rappresentazioni dell'algebra di simmetria chirale massimamente estesa, contenente l'algebra di Virasoro [3]; queste rappresentazioni sono elencate nella funzione di partizione della geometria del toro [34] [35].

Nel QHE possiamo considerare la geometria dell'anello spaziale con il tempo euclideo compattificato di periodo β , l'inverso della temperatura, Fig.(3.1): la topologia di questa varietà spazio-temporale è $\mathcal{M} = S^1 \times S^1 \times I$, dove I è l'intervallo finito della coordinata radiale. La funzione di partizione delle eccitazioni di bordo è definita nel bordo $\partial\mathcal{M}$, corrispondendo a due copie del toro spazio-temporale. Le eccitazioni sono onde chirali nel bordo esterno (R) e antichirali in quello interno (L), che nell'approccio RCFT corrispondono a due componenti dell'algebra affine, una olomorfa e l'altra antiolomorfa, il cui spettro CFT per i plateau di Laughlin è dato dalle (3.37)-(3.39). L'autovalore h_n di L_0 dà lo spin frazionario che è la metà della statistica frazionaria θ/π delle eccitazioni. Ogni coppia di valori di (Q, L_0) identifica una rappresentazione di massimo peso dell'algebra affine $\widehat{U(1)}$, che contiene una torre di eccitazioni neutre con numeri quantici $(Q, L_0 + k)$, $k > 0$ intero, cioè le eccitazioni buca-particella.

La funzione di gran-partizione nell'anello di coordinate (φ, t_E, r) con $r \in I = [R_L, R_R]$ e $t_E = t_E + \beta$, $\varphi = \varphi + 2\pi$ è scritta nella notazione del Cap.(1)

$$Z_{\text{anello}} = \mathcal{K} \text{Tr} \left[e^{2\pi i \left(\tau (L_0^R - c/24) - \bar{\tau} (L_0^L - c/24) + \zeta Q^R + \bar{\zeta} Q^L \right)} \right], \quad (3.40)$$

dove la traccia è su tutti gli stati dello spazio di Hilbert, \mathcal{K} una costante di normalizzazione da fissare e $(\tau, \zeta) \in \mathbb{C}$. L'hamiltoniana totale e lo spin delle eccitazioni sono

$$H = \frac{v_R}{R} \left(L_0^R - \frac{c}{24} \right) + \frac{v_L}{R} \left(L_0^L - \frac{c}{24} \right) + V_0 (Q^R - Q^L) + \text{const}, \quad J = L_0^R - L_0^L, \quad (3.41)$$

in particolare consideriamo un'hamiltoniana simmetrica per i due bordi, aggiustando le velocità di propagazione delle eccitazioni, $v_L/R_L = v_R/R_R$. Le parti reali e immaginarie di τ sono rispettivamente date dalla "torsione" η e dall'inverso della temperatura β , moltiplicate per la velocità di Fermi v . Il parametro ζ è proporzionale al potenziale chimico μ e alla differenza di potenziale elettrico tra i due bordi V_0 come segue:

$$2\pi i \tau = -\beta \frac{(v + i\eta)}{R}, \quad 2\pi i \zeta = -\beta (V_0 + i\mu). \quad (3.42)$$

Come usuale nelle RCFT, possiamo dividere la traccia in (3.40) nella somma sulle coppie delle rappresentazioni $\widehat{U(1)}$, una per ogni bordo, e quindi sommare sugli stati

all'interno di ogni rappresentazione. Quest'ultimo dà il carattere $\widehat{U}(1)$

$$Ch(Q, L_0) = \text{Tr}|_{\widehat{U}(1)} \left[e^{2\pi i (\tau(L_0 - c/24) + \zeta Q)} \right] = \frac{q_0^L w^Q}{\eta(q)}, \quad (3.43)$$

dove $\eta(q)$ è la funzione di Dedekind, $q = e^{2\pi i \tau}$ e $w = e^{2\pi i \zeta}$. Ogni CFT con $c \geq 1$ contiene un'infinità di rappresentazioni di Virasoro e $\widehat{U}(1)$, quindi dobbiamo raggruppare i caratteri $\widehat{U}(1)$ in caratteri $K_\lambda(\tau, \zeta)$ di un'algebra estesa ottenendo una decomposizione finito-dimensionale

$$Z_{\text{anello}} = \sum_{\lambda, \mu} \mathcal{N}_{\lambda, \mu} K_\lambda \bar{K}_\mu^c. \quad (3.44)$$

In questa espressione, la barra denota la coniugazione complessa, e c la coniugazione di carica che agisce come: $Q \rightarrow -Q$. Le eccitazioni esterne (interne) sono descritte da $K_\lambda(\bar{K}_\mu^c)$. I coefficienti $\mathcal{N}_{\lambda, \mu}$ sono le molteplicità delle eccitazioni da determinare imponendo l'invarianza modulare.

3.5.2 Condizioni di invarianza modulare

La funzione di partizione descrive i gradi di libertà che vivono ai bordi dell'anello, che contengono eccitazioni cariche (anioniche) e neutre. Queste eccitazioni soddisfano alcune condizioni affinché le eccitazioni globali, accoppiate tra i due bordi, abbiano proprietà fermioniche. La funzione di partizione deve quindi soddisfare quattro simmetrie modulari: S, T^2, U, V . Analizziamole in dettaglio (le prime due sono state già discusse in Sez.(1.3)).

- S : E' uno dei generatori delle trasformazioni modulari. L'invarianza modulare è la richiesta che la teoria non dipenda dallo specifico insieme di coordinate usato per descrivere il toro. Dal punto di vista fisico, corrisponde ad una richiesta di completezza dello spettro della teoria [43]. Abbiamo:

$$S : \quad Z\left(-\frac{1}{\tau}, -\frac{\zeta}{\tau}\right) = Z(\tau, \zeta). \quad (3.45)$$

- T^2 : Le eccitazioni anioniche si devono combinare tra loro per formare stati globali di natura fermionica con spin intero o semintero, $2(L_0^R - L_0^L) \in \mathbb{Z}$. A livello della funzione di partizione questa condizione è realizzata dalla simmetria,

$$T^2 : \quad Z(\tau + 2, \zeta) = \text{Tr}[\dots e^{2\pi i 2(L_0^R - L_0^L)}] = Z(\tau, \zeta). \quad (3.46)$$

Notiamo che l'invarianza sotto l'altro generatore T del gruppo modulare Γ implicherebbe solo eccitazioni con spin intero, quindi in sistemi con eccitazioni elettroniche come il FQHE non può essere imposta. Abbiamo quindi invarianza sotto il sottogruppo $\Gamma_\theta \subset \Gamma$ che è generato da S e T^2 .

- U : Unitamente alla condizione globale sulla statistica, la carica globale delle eccitazioni deve essere un intero, $Q^L + Q^R \in \mathbb{Z}$. Questo corrisponde alla condizione

$$U : \quad Z(\tau, \zeta + 1) = \text{Tr}[\dots e^{2\pi i(Q^R + Q^L)}] = Z(\tau, \zeta). \quad (3.47)$$

Quindi, le eccitazioni di carica frazionaria in un bordo devono accoppiarsi con quelle complementari nell'altro bordo. Consideriamo, per esempio, un sistema con $\nu = 1/3$ e aggiungiamo un elettrone: questo può dividersi in coppie di eccitazioni con $(Q^L, Q^R) = (1/3, 2/3), (0, 1), (2/3, 1/3), (1, 0)$.

- V : Il potenziale ai bordi può essere variato aggiungendo un flusso magnetico localizzato all'interno dell'anello, come osservato da Laughlin [13] [25] e mostrato nel capitolo precedente. L'aggiunta adiabatica di un quanto di flusso è una trasformazione di gauge dell'hamiltoniana e quindi deve corrispondere ad una simmetria dello spettro. Questa trasformazione è chiamata *flusso spettrale*, perchè consiste nel trasformare ogni autostato in un altro all'interno della stessa teoria. L'aggiunta di un flusso corrisponde a $V_0 \rightarrow V_0 + 1/R$, ovvero $\zeta \rightarrow \zeta + \tau$. L'invarianza della funzione di partizione è espressa da

$$V : \quad Z(\tau, \zeta + \tau) = Z(\tau, \zeta). \quad (3.48)$$

Risolviamo queste condizioni per la teoria $c = 1$ [43]. Usando la condizione U possiamo prima raccogliere le rappresentazioni $\widehat{U}(1)$ su un bordo che hanno cariche $Q^R = \lambda/p + \mathbb{Z}$, corrispondente ad aggiungere un numero intero di elettroni ad un'eccitazione anionica, e quindi combinarle con le corrispondenti somme nell'altro bordo. Le dimensioni di Virasoro sono date dall'Eq.(3.38). L'unità di carica $1/p$ è legata alla normalizzazione di ζ . La somma sui caratteri $\widehat{U}(1)$ che hanno cariche spaziate per intero dà il carattere K_λ , una funzione theta di Jacobi con caratteristica razionale $\Theta[\frac{a}{b}]$ [44]:

$$\begin{aligned} K_\lambda(\tau, \zeta) &= \exp\left(-\frac{\pi (Im\zeta)^2}{p Im\tau}\right) \frac{1}{\eta(q)} \Theta\left[\frac{\lambda/p}{0}\right](\zeta|p\tau) \\ &= \exp\left(-\frac{\pi (Im\zeta)^2}{p Im\tau}\right) \frac{1}{\eta(q)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp\left(2\pi i \left[\frac{\tau}{2p}(pk + \lambda)^2 + \frac{\zeta}{p}(pk + \lambda)\right]\right), \end{aligned} \quad (3.49)$$

dove $\lambda = 1, 2, \dots, p$. Il prefattore non analitico sarà spiegato successivamente. Le trasformazioni T^2, S, U, V di questi caratteri generalizzati sono

$$T^2 : K_\lambda(\tau + 2, \zeta) = \exp\left(2\pi i \left(\frac{\lambda^2}{p} - \frac{1}{12}\right)\right) K_\lambda(\tau, \zeta), \quad (3.50)$$

$$S : K_\lambda\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{-\zeta}{\tau}\right) = \frac{\exp\left(\frac{i\pi}{p} \operatorname{Re}\left(\frac{\zeta^2}{\tau}\right)\right)}{\sqrt{p}} \sum_{\lambda'=0}^{p-1} \exp\left(2\pi i \frac{\lambda\lambda'}{p}\right) K_{\lambda'}(\tau, \zeta), \quad (3.51)$$

$$U : K_\lambda(\tau, \zeta + 1) = \exp\left(2\pi i \frac{\lambda}{p}\right) K_\lambda(\tau, \zeta), \quad (3.52)$$

$$V : K_\lambda(\tau, \zeta + \tau) = \exp\left(-2\pi i \frac{1}{p} \left(\operatorname{Re}\frac{\tau}{2} + \operatorname{Re}\zeta\right)\right) K_{\lambda+1}(\tau, \zeta). \quad (3.53)$$

Notiamo che la trasformazione S si dimostra utilizzando la formula di risommazione di Poisson per trasformate di Fourier discrete [3]. Queste trasformazioni mostrano che i caratteri K_λ danno una rappresentazione unitaria finito-dimensionale del gruppo modulare Γ_θ , che è proiettiva per $\zeta \neq 0$.

La stessa somma sulle rappresentazioni $\widehat{U(1)}$ per l'altro bordo è data da \bar{K}_μ^c che contiene le cariche $Q^L = -\mu/p + \mathbb{Z}$. La condizione U applicata a Z nella forma (3.47) richiede che le cariche di destra e sinistra soddisfino la condizione $\lambda = \mu \pmod{p}$. Otteniamo infine la funzione di partizione

$$Z_{\text{anello}} = \sum_{\lambda=0}^{p-1} K_\lambda \bar{K}_\lambda^c, \quad (3.54)$$

che soddisfa anche le condizione (S, T^2, V) e quindi è invariante modulare. Questa è la funzione di partizione per le teorie di bordo $c = 1$: la molteplicità delle rappresentazioni è $\mathcal{N}_{\lambda,\mu} = \delta_{\lambda,\mu}^{(p)}$, e i due parametri liberi p, ζ sono determinati dalle seguenti condizioni fisiche:

- La normalizzazione di ζ , cioè dell'unità di carica, è determinata osservando che tra le trasformazioni, V è l'unica sensibile al riscaldamento $\zeta \rightarrow a\zeta$, con a intero. Fissiamo $a = 1$ richiedendo che il minimo flusso spettrale $\zeta \rightarrow \zeta + \tau$ porti da un bordo all'altro dell'anello la minima quantità di carica frazionaria, $K_\lambda(\zeta + \tau) \rightarrow K_{\lambda+1}(\zeta)$. Poichè la quantità di carica spostata per unità di flusso misura la conducibilità Hall, concludiamo che (3.54) descrive l'effetto Hall a $\nu = 1/p$. All'interno dello spettro descritto dalla (3.54) gli stati elettronici hanno carica e statistica dispari, $2J = 1 \pmod{2}$.
- E' semplice verificare che tutte le eccitazioni hanno monodromia intera rispetto agli elettroni

$$h_p + h_n - h_{p+n} \in \mathbb{Z}, \quad (3.55)$$

utilizzando le dimensioni (3.38) per l'elettrone e per una generica eccitazione.

Infine discutiamo il prefattore non olomorfo del carattere (3.49). Si tratta di un termine costante nell'hamiltoniana (3.41), modulato in modo appropriato per avere lo spettro

$$E_{n_L, n_R} = \frac{1}{R} \frac{1}{2p} [(n_R + RV_0)^2 + (n_L - RV_0)^2], \quad (3.56)$$

il cui minimo è indipendente dal valore di V_0 . Questo è necessario per l'invarianza di Z sotto il flusso spettrale, e corrisponde all'aggiunta di un'energia capacitiva uguale a $E_c = RV_0^2/2p$, [35] [36].

Una forma più esplicita della funzione di partizione (3.54) è

$$Z = \frac{e^{-\frac{2\pi(Im\zeta)^2}{pIm\tau}}}{|\eta|^2} \sum_{\lambda=0}^{p-1} \sum_{k, \bar{k} \in \mathbf{Z}} q^{\frac{(pk+\lambda)^2}{2p}} \bar{q}^{\frac{(p\bar{k}+\lambda)^2}{2p}} w^{\frac{pk+\lambda}{p}} \bar{w}^{\frac{p\bar{k}+\lambda}{p}}. \quad (3.57)$$

Questa espressione (per $w = 1$) non coincide con la funzione di partizione di un campo bosonico reale compattificato in un cerchio razionale di raggio $R_c = r/2s$ [3].

$$Z_B = \frac{1}{|\eta|^2} \sum_{n, m} q^{\frac{1}{2} \left(\frac{n}{2R_c} + mR_c \right)^2} \bar{q}^{\frac{1}{2} \left(\frac{n}{2R_c} - mR_c \right)^2}. \quad (3.58)$$

Infatti Z e Z_B sarebbero uguali per $R_c = 1/p$, che richiederebbe p pari. Quindi, la RCFT dei plateau di Laughlin è una modifica *dispari* del bosone compattificato.

3.6 Funzioni di partizione per gli stati gerarchici

La generalizzazione a più componenti della teoria Abeliana della precedente sezione si ottiene come segue [43]: si assume che il fluido di elettroni abbia m bordi indipendenti, come nel caso della teoria di Chern-Simons discussa in precedenza, ottenendo complessivamente un'algebra affine $\widehat{U(1)}^{\otimes m}$. Le sue rappresentazioni sono etichettate da un vettore $r_a, a = 1, \dots, m$, che genera un reticolo m -dimensionale, $\mathbf{r} = \sum_i \mathbf{v}^{(i)} n_i$, $n_i \in \mathbf{Z}$ come richiesto dalla compatibilità delle regole di fusione abeliane, corrispondenti alla conservazione delle m cariche. La carica è un funzionale lineare di \mathbf{r} e la dimensione di Virasoro è una forma quadratica, entrambe parametrizzate dalla metrica del reticolo, $K_{ij}^{-1} = \mathbf{v}^{(i)} \cdot \mathbf{v}^{(j)}$. Lo spettro più generale della costruzione gerarchica è quindi

$$Q = \sum_{i, j=1}^m t_i K_{ij}^{-1} n_j, \quad L_0 = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^m n_i K_{ij}^{-1} n_j, \quad \nu = \sum_{i, j=1}^m t_i K_{ij} t_j. \quad (3.59)$$

In queste espressioni K è una matrice arbitraria simmetrica con elementi interi, dispari nella diagonale, dovuto alla richiesta che lo spettro contenga m eccitazioni di tipo elettronico, e $t_i = 1, \forall i = 1, \dots, m$ espresse nella base standard [45]. Tra gli stati gerarchici più stabili ci sono quelli di Jain, corrispondenti alla matrice $K_{ij} = \pm \delta_{ij} + sC_{ij}$,

dove $s > 0$ è un intero pari e $C_{ij} = 1, \forall i, j = 1, \dots, m$ [45]. Con queste scelte lo spettro di Jain è

$$Q = \frac{1}{ms \pm 1} \sum_{i=1}^m n_i, \quad L_0 = \pm \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^m n_i^2 - \frac{s}{ms \pm 1} \left(\sum_{i=1}^m n_i \right)^2 \right), \quad \nu = \frac{m}{ms \pm 1}. \quad (3.60)$$

Tralasciamo il segno meno, corrispondente a eccitazioni neutre antichirali [43]. Lo spettro (3.60) è particolare poichè contiene $m(m-1)$ stati neutri con dimensione uno, $(Q, L_0) = (0, 1)$. Utilizzando una costruzione con campi bosonici, è possibile mostrare che queste sono correnti chirali J_β , associate alle radici semplici di $SU(m)$, che generano l'algebra affine $\widehat{U(1)} \otimes \widehat{SU(m)}_1$ con $c = m$ [45] [46].

La funzione di partizione nell'anello per il caso multicomponente è ottenuta in [43]. Rivediamo le loro espressioni, prima per una matrice K generica e poi per il caso di Jain. In conseguenza alla condizione U , si collezionano i settori con cariche spaziate di un intero nello spettro (3.59). Queste sono date da $\mathbf{n} = K\ell + \boldsymbol{\lambda}$, $\ell \in \mathbb{Z}^m$. Poichè K è una matrice di interi c'è un numero finito di valori di $\boldsymbol{\lambda}$, cioè dei settori della RCFT, che appartengono al quoziente tra il reticolo \mathbf{n} e quello ℓ

$$\boldsymbol{\lambda} \in \frac{\mathbf{Z}^m}{K\mathbf{Z}^m}. \quad (3.61)$$

I caratteri $\widehat{U(1)}$ in ogni settore si sommano per dare la generalizzazione m -dimensionale delle funzioni theta (3.49) :

$$K_\lambda(\tau, \zeta) = \exp\left(-\pi t^T K^{-1} t \frac{(Im\zeta)^2}{Im\tau}\right) \frac{1}{\eta(q)^m} \times \sum_{\ell \in \mathbf{Z}^m} \exp\left(2\pi i \left[\frac{\tau}{2} (K\ell + \lambda)^T K^{-1} (K\ell + \lambda) + \zeta t^T (\ell + K^{-1}\lambda) \right]\right). \quad (3.62)$$

Le trasformazioni sotto T^2, S, U, V di questi caratteri sono dirette generalizzazioni delle (3.50). La loro espressione è in [43] e verrà ripresa nella discussione degli isolanti topologici al Cap.(6). I caratteri (3.62) realizzano una rappresentazione finito-dimensionale unitaria e proiettiva del gruppo modulare di dimensione $|\det K|$, che coincide con l'ordine topologico di Wen [37] [38] [43]. L'invarianza sotto U della funzione di partizione nell'anello, scritta come forma sesquilineare dei caratteri (3.62), implica l'equazione $t^T K^{-1}(\lambda - \bar{\lambda}) \in \mathbb{Z}$ per i pesi di destra e sinistra. Considereremo la soluzione diagonale $\boldsymbol{\lambda} = \bar{\boldsymbol{\lambda}}$, che soddisfa anche le altre condizioni T^2, S, V , per cui la funzione di partizione invariante modulare assume la forma

$$Z_{\text{anello}} = \sum_{\lambda \in \mathbf{Z}^m / K\mathbf{Z}^m} K_\lambda \bar{K}_\lambda^c. \quad (3.63)$$

Come nel caso di un solo fluido, la corrente Hall $\nu = t^T K^{-1} t$ è ottenuta dal flusso spettrale corrispondente all'inserzione di una unità di flusso quantistica, che corrisponde alla trasformazione

$$V : \quad K_\lambda(\tau, \zeta + \tau) \rightarrow K_{\lambda+t}(\tau, \zeta). \quad (3.64)$$

Nel caso gerarchico di Jain, è possibile utilizzare la simmetria $\widehat{SU(m)}_1$ per riscrivere la (3.63) in una forma più semplice, infatti la somma dei caratteri K_λ sulle eccitazioni neutre può essere riscritta in termini dei caratteri $\chi_\alpha(\tau) = \chi_\alpha^{\widehat{SU(m)}_1}(\tau)$ di $\widehat{SU(m)}_1$ descritti in [47]. Esistono m rappresentazioni di massimo peso, corrispondenti a rappresentazioni completamente antisimmetriche dell'algebra di Lie di $SU(m)$, che sono caratterizzate da un numero quantico additivo modulo m , detto m -alità, $\alpha = 1, \dots, m$; inoltre, le regole di fusione $\widehat{SU(m)}_1$ sono isomorfe al gruppo \mathbb{Z}_m . Poichè le eccitazioni $\widehat{SU(m)}_1$ sono neutre, i caratteri χ_α non dipendono da ζ . Questi soddisfano le condizioni di periodicità

$$\chi_\alpha(\tau, 0) = \chi_{m+\alpha}(\tau, 0). \quad (3.65)$$

Le dimensioni conformi delle rappresentazioni $\widehat{SU(m)}_1$ sono

$$h_\alpha = \frac{\alpha(m-\alpha)}{2m}, \quad \alpha = 0, \dots, m-1, \quad (3.66)$$

e le trasformazioni modulari dei caratteri $\widehat{SU(m)}_1$ sono [47]

$$T^2 : \chi_\alpha(\tau + 2) = \exp\left(2\pi i \left(\frac{\alpha(m-\alpha)}{m} - \frac{m-1}{12}\right)\right) \chi_\alpha(\tau), \quad (3.67)$$

$$S : \chi_\alpha\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{\alpha'=0}^{m-1} \exp\left(-2\pi i \frac{\alpha\alpha'}{m}\right) \chi_{\alpha'}(\tau), \quad (3.68)$$

mentre U, V non agiscono sugli stati neutri.

Gli stati $\widehat{U(1)}$ nelle teorie $\widehat{U(1)} \otimes \widehat{SU(m)}_1$ continuano a essere descritti dai caratteri \mathbb{Z}_p (3.49), con parametro libero p , $K_\lambda(\tau, \zeta; p)$, con $\lambda = 1, \dots, p$. Utilizzando un'appropriata trasformazione di base, lo spettro di Jain (3.60) può essere scritto in modo da separare il contributo $\widehat{SU(m)}_1$ neutro da quello $\widehat{U(1)}$ carico, così da riformulare il problema dell'invarianza modulare nella base tensoriale dei caratteri $K_\lambda \chi_\alpha$ [43]. L'analisi dello spettro [43] permette di identificare il parametro p del carattere carico in $p = m\hat{p}$, con $\hat{p} = ms + 1$ l'ordine topologico di Wen, e di introdurre un numero di caratteri indipendenti pari a \hat{p} , dati da

$$\Theta_{ma} = \sum_{\alpha=1}^m K_{m\alpha+\alpha\hat{p}}(\tau, m\zeta) \chi_\alpha(\tau), \quad a = 1, \dots, \hat{p}. \quad (3.69)$$

Questi caratteri generalizzati portano una rappresentazione del gruppo modulare di dimensione \hat{p} , con la trasformazione S che agisce come una trasformata di Fourier $\mathbb{Z}_{m\hat{p}} \times \mathbb{Z}_m$. La funzione di partizione invariante modulare dell'anello è quindi l'espressione diagonale nei caratteri:

$$Z_{\text{anello}} = \sum_{a=1}^{\hat{p}} \Theta_{ma} \bar{\Theta}_{ma} = \sum_{a=1}^{\hat{p}} \left(\sum_{\alpha=1}^m K_{m\alpha+\alpha\hat{p}} \chi_\alpha \right) \left(\sum_{\beta=1}^m \bar{K}_{m\alpha+\beta\hat{p}}^c \bar{\chi}_\beta \right). \quad (3.70)$$

La trasformazione V è

$$V : \Theta_{ma}(\tau, \zeta + \tau) = \exp\left(-2\pi i \frac{m}{\hat{p}} \left(\operatorname{Re}\zeta + \operatorname{Re}\frac{\tau}{2}\right)\right) \Theta_{ma+m}(\tau, \zeta). \quad (3.71)$$

Questo mostra che il minimo trasporto di carica tra i due bordi corrisponde alla corretta corrente Hall $\nu = m/\hat{p}$. Le (3.70) sono le funzioni di partizione delle teorie $\widehat{U(1)} \otimes \widehat{SU(m)}_1$ ai plateau di Jain.

Capitolo 4

Isolanti e superconduttori topologici

4.1 Dal QHE agli isolanti e superconduttori topologici

Nei Cap.(2) e (3) abbiamo studiato le principali proprietà del QHE. Abbiamo visto che quando un sistema è sottoposto a intensi campi magnetici e temperature molto basse è in grado di rivelare una fisica del tutto nuova, in particolare di possedere eccitazioni anioniche ed eccitazioni di bordo con caratteristici effetti topologici. Gli stati QHE rompono esplicitamente la simmetria di inversione temporale (*time-reversal*) TR per la presenza del campo magnetico. Sono isolanti nel bulk (assenza di conduzione ohmica ai plateau), ma presentano stati di bordo che trasportano corrente senza dissipare energia. Il QHE rappresenta quindi un esempio di stato quantistico *topologicamente* distinto da altri stati della materia, con la conducibilità Hall quantizzata con precisione estremamente alta indipendentemente dai dettagli del materiale. L'universalità del fenomeno ha infatti permesso la discussione dell'effetto Hall mediante le teorie di campo effettive di bassa energia (grandi distanze), come la teoria topologica di bulk di Chern-Simons, oppure la CFT degli stati di bordo, capaci di cogliere le proprietà intrinseche degli stati a prescindere dai particolari microscopici.

Le ricerche più recenti si sono indirizzate allo studio di sistemi con caratteristiche fisiche analoghe che non necessitano l'uso di campi magnetici esterni. Un primo risultato è stato ottenuto da Haldane [50]. In un modello di elettroni su reticolo con un campo magnetico globalmente nullo e localmente con la periodicità del reticolo, è possibile ottenere stati che, come nel QHE, rompono esplicitamente la simmetria TR , sono isolanti nel bulk e hanno stati di bordo con conducibilità Hall che prende valori interi (in unità e^2/h). E' questo un esempio del cosiddetto isolante di Chern [48] [49].

Recentemente sono stati teorizzati e sperimentalmente osservati nuovi stati topologici della materia in assenza di campo magnetico, che a differenza degli stati QHE sono invarianti per inversione temporale, [53] [54] [55] [56] [59]. Questi nuovi stati, chiamati *isolanti topologici* (*topological insulators* TI) possiedono un bulk isolante e

degli stati conduttori a massa nulla di bordo o di superficie, rispettivamente in 2D e 3D. Mostriamo che questi stati sono topologicamente protetti poichè sono insensibili a interazioni di scattering dovute alle impurità o alle interazioni elettroniche che conservino la simmetria TR . Quando questa simmetria viene meno, gli stati di bordo sono distrutti e il materiale diventa completamente isolante. Per una rassegna generale si veda [51] [52].

Il nostro lavoro si concentrerà sull'analisi degli stati 2D. Questo capitolo intende dare un' introduzione generale al fenomeno, mostrando il ruolo posseduto dalla simmetria TR e dall'accoppiamento spin-orbita (*spin-orbit coupling* SOC). Un semplice esempio di isolante topologico TR -invariante è ottenuto mettendo insieme due copie di sistemi QHE con chiralità e spin opposti. Si parla in questo caso di *quantum-spin Hall effect* (QSHE), poichè sono conservate sia la corrente elettrica che la corrente di spin. Inoltre le singole conducibilità Hall degli spin up e down sono quantizzate. In generale non è possibile ignorare i termini di accoppiamento tra gli spin degli stati di bordo, che rompono la conservazione di J_z e quindi la conducibilità di spin non assume più valori quantizzati. Questo è il caso dell'*isolante topologico*. Sempre in questo capitolo accenneremo alla classificazione mediante una simmetria \mathbb{Z}_2 degli isolanti TR -invarianti composti da elettroni liberi [53] [56] [57]. In particolare vedremo che quando gli stati di bordo sono un numero dispari di coppie, la simmetria TR impedisce termini d'interazione che danno massa alle eccitazioni di bordo. Quando il numero delle coppie è pari gli stati di bordo possono prendere un gap di massa e rendere banale l'isolante.

Lo studio della stabilità degli stati di bordo di un isolante topologico, sia per il caso libero che per quello interagente, è il tema centrale di questo lavoro di tesi. Nei due capitoli successivi approfondiremo in modo dettagliato questo tema, in particolare lo studio recente basato sulla teoria effettiva di Chern-Simons. Nell'ultimo capitolo presenteremo la parte originale di questo lavoro di tesi, dove si determinano le funzioni di partizione degli isolanti topologici e si derivano le condizioni di stabilità degli stati di bordo in questo contesto.

Nell'ultima parte di questo capitolo accenneremo inoltre ai superconduttori topologici (*topological superconductors* TS) TR -invarianti e non invarianti. Anche questi sistemi mostrano stati di bordo descritti da fermioni di Majorana a massa nulla.

4.2 Simmetria di inversione temporale e degenerazione di Kramers

La simmetria fondamentale che caratterizza gli stati QSHE, TI e TS recentemente teorizzati e scoperti, è l'inversione temporale TR . Nel seguito faremo uso delle proprietà dell'operatore antiunitario \mathcal{T} che genera le trasformazioni di inversione temporale. E'

perciò conveniente ricordarle ed estenderle a particolari sistemi a molti corpi di cui parleremo.

Consideriamo la funzione d'onda di una particella massiva $\Psi_{p,s}$ d'impulso p , spin j e proiezione dello spin lungo un asse s , oppure di una particella a massa nulla con elicità σ , $\Psi_{p,\sigma}$. Le componenti della funzione d'onda formano un multipletto o spinore, sul quale \mathcal{T} agisce per coniugazione complessa. Utilizzando le proprietà di simmetria sotto coniugazione delle armoniche sferiche o degli spinori di Dirac, si può mostrare che la forma generale dell'azione di \mathcal{T} è la seguente [64] [65]

$$\mathcal{T} : \Psi_{p,s} \rightarrow \xi(-)^{j-s} \Psi_{\mathcal{P}p,-s}, \quad (4.1)$$

$$\mathcal{T} : \Psi_{p,\sigma} \rightarrow \xi e^{i\pi\sigma} \Psi_{\mathcal{P}p,\sigma}, \quad (4.2)$$

rispettivamente sul caso con o senza massa, dove ξ è una fase e \mathcal{P} è la parità sul quadrimpulso. L'azione del quadrato \mathcal{T}^2 è

$$\mathcal{T}^2 : \Psi_{p,s} \rightarrow (-1)^{2j} \Psi_{p,\sigma}, \quad (4.3)$$

$$\mathcal{T}^2 : \Psi_{p,\sigma} \rightarrow (-1)^{2|\sigma|} \Psi_{p,\sigma}. \quad (4.4)$$

L'azione di \mathcal{T}^2 ha interessanti conseguenze. Notiamo che se intendiamo lo "spin" di una particella a massa nulla come il valore assoluto dell'elicità, allora l'Eq.(4.4) è la stessa dell' Eq.(4.3). Quando \mathcal{T}^2 agisce su un qualunque stato Ψ di un sistema di particelle non interagenti, dà un fattore $(-1)^{2j}$ (oppure $(-1)^{2|\sigma|}$) per ogni particella. Se quindi lo stato contiene un numero dispari di particelle con spin o elicità semintero si ottiene un cambio di segno overall

$$\mathcal{T}^2 : \Psi \rightarrow -\Psi. \quad (4.5)$$

Poichè \mathcal{T} commuta con l'hamiltoniana, se $|\Psi\rangle$ è un autostato dell'hamiltoniana TR -invariante anche $\mathcal{T}|\Psi\rangle$ lo è. Mostriamo che $|\Psi\rangle$ e $\mathcal{T}|\Psi\rangle$ non sono lo stesso stato. Se lo fossero, potrebbero differire per un fattore di fase

$$\mathcal{T}|\Psi\rangle = \zeta |\Psi\rangle. \quad (4.6)$$

Ma ricordando che \mathcal{T} è antiunitario, si avrebbe

$$\mathcal{T}^2|\Psi\rangle = \mathcal{T}(\zeta |\Psi\rangle) = \zeta^* \mathcal{T}|\Psi\rangle = |\zeta|^2 |\Psi\rangle = |\Psi\rangle, \quad (4.7)$$

in contraddizione con la (4.5). Abbiamo quindi ottenuto il teorema di Kramers: ogni autostato dell'energia $|\Psi\rangle$ che contiene un numero dispari di fermioni soddisfa la (4.5) e quindi deve appartenere a un doppietto di stati degeneri e ortogonali, che si scambiano sotto TR (doppietto di Kramers). La degenerazione e l'ortogonalità tra i due autostati del doppietto $|\Psi\rangle, |\Psi'\rangle = \mathcal{T}|\Psi\rangle$ continua a valere se all'hamiltoniana vengono aggiunte interazioni TR -invarianti. Infatti, si dimostra per ogni operatore O hermitiano TR -invariante che:

$$\langle \Psi' | O | \Psi \rangle = 0, \quad \langle \Psi | O | \Psi \rangle = \langle \Psi' | O | \Psi' \rangle. \quad (4.8)$$

Esiste un'estensione *locale* del teorema di Kramers dovuta a Levin e Stern [75], utile per gli argomenti discussi successivamente, relativa uno stato a molti corpi $|\Psi\rangle$ con un numero di elettroni dispari in due regioni dello spazio sufficientemente distanti tra loro e senza correlazione, ma globalmente in numero pari. Possiamo per esempio pensare a un potenziale a doppia buca, con le buche poste in $x = a$ e $x = b$ lontane tra loro, ognuna contenente un elettrone. Globalmente abbiamo un numero pari di elettroni e non sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Kramers. Intuitivamente possiamo trattare le due regioni vicino ad a e b come due sistemi separati, ognuno con un numero dispari di elettroni e una corrispondente “degenerazione locale di Kramers”.

Consideriamo un “operatore locale” scritto come una somma di termini, ognuno dei quali è un prodotto di un numero pari di operatori di creazione e distruzione elettronici che agiscono in una regione finita dello spazio. Supponiamo anche che $|\Psi\rangle$ sia uno stato a molti corpi con un numero pari di elettroni. Diremo che $|\Psi\rangle$ ha correlazioni a corto range se dati due qualunque operatori locali O_a e O_b , definiti nelle regioni spaziali separate tra loro a e b , vale la fattorizzazione

$$\langle \Psi | O_a O_b | \Psi \rangle = \langle \Psi | O_a | \Psi \rangle \langle \Psi | O_b | \Psi \rangle. \quad (4.9)$$

Diremo che lo stato $|\Psi\rangle$ possiede una degenerazione locale di Kramers nelle regioni separate a e b se soddisfa alle due condizioni:

1.

$$\mathcal{T} |\Psi\rangle = S_a S_b |\Psi\rangle, \quad (4.10)$$

per qualche operatore locale S_a e S_b .

2.

$$\mathcal{T}_a^2 |\Psi\rangle = \mathcal{T}_b^2 |\Psi\rangle = -|\Psi\rangle, \quad (4.11)$$

dove $\mathcal{T}_a = \mathcal{T} S_b$, $\mathcal{T}_b = \mathcal{T} S_a$. Questa condizione formalizza la nozione di avere un numero dispari di elettroni localizzati nelle regioni a o b .

Si dimostra che quando uno stato $|\Psi\rangle$ soddisfa alle condizioni (4.10) e (4.11), ovvero ha degenerazione locale di Kramers nelle regioni a e b , dato $|\Psi'\rangle = \mathcal{T}_a |\Psi\rangle$ vale [75]:

$$\langle \Psi' | O | \Psi \rangle = 0, \quad \langle \Psi | O | \Psi \rangle = \langle \Psi' | O | \Psi' \rangle, \quad (4.12)$$

per qualunque operatore O composto dal prodotto di un numero finito di operatori locali, hermitiani e TR -invarianti. Se quindi $|\Psi\rangle$ è lo stato fondamentale di un'hamiltoniana TR -invariante con un gap di energia finito, la (4.12) mostra che $|\Psi'\rangle = \hat{\mathcal{T}}_a |\Psi\rangle$ è ortogonale a $|\Psi\rangle$, degenera in energia, e insieme formano un doppietto di Kramers limitato alla regione a , la cui degenerazione non è rimossa da nessuna perturbazione TR -invariante aggiunta all'hamiltoniana. Un'identica doppia degenerazione è presente anche in b . Globalmente esiste quindi un quadrupletto di quattro stati degeneri.

4.3 Modelli per QSHE 2D

In questa sezione analizzeremo due particolari modelli mostrando come si possono generare stati di bordo negli isolanti topologici TR -invarianti in assenza di campi magnetici esterni. La possibilità di avere stati di bordo che si propagano senza dissipare energia richiede la presenza di un accoppiamento tra gli elettroni che sostituisca quello dato dal campo magnetico esterno del QHE.

4.3.1 Modello del gradiente di sforzo di Bernevig e Zhang

In [54] è stato proposto un modello capace di riprodurre dei livelli energetici analoghi a quelli di Landau in assenza di campo magnetico. Nei livelli di Landau, la forza di Lorentz contribuisce a un termine proporzionale a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$ nell'hamiltoniana. Nel gauge simmetrico $\mathbf{A} = \frac{B}{2}(y, -x, 0)$ è proporzionale a $B(xp_y - yp_x)$. Un termine analogo può essere generato dall'interazione spin-orbita, che contribuisce all'hamiltoniana con un termine proporzionale a $(\mathbf{p} \times \mathbf{E}) \cdot \sigma$, con σ le matrici di Pauli, ed \mathbf{E} il campo elettrico che conserva la simmetria TR . Confinando il sistema nel piano (x, y) e prendendo un campo elettrico non costante nel piano $\mathbf{E} \sim E(x, y, 0)$, il termine di accoppiamento di spin-orbita assume la forma $E\sigma_z(xp_y - yp_x)$. Le particelle interagiscono con un campo magnetico "effettivo" che dipende dallo spin, generando livelli energetici di Landau per ciascuna orientazione dello spin.

Una configurazione per il campo elettrico come questa non è facile da realizzare sperimentalmente. In [54] è stato suggerito che i *gradienti di sforzo* giochino un ruolo simile in semiconduttori come il GaAs. L'hamiltoniana per la banda di conduzione nel bulk di questi semiconduttori con il tensore di sforzo dà un termine analogo all'accoppiamento spin orbita $(\mathbf{v} \times \mathbf{E}) \cdot \sigma$. Nel caso in cui lo sforzo ha un gradiente costante lungo le direzioni x e y , il campo elettrico ha proprio la forma richiesta. L'hamiltoniana del sistema è

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} \frac{C_3}{\hbar} g (yp_x - xp_y) \sigma_z + D(x^2 + y^2), \quad (4.13)$$

dove $\frac{C_3}{\hbar} = 8 \times 10^5 m/s$ per GaAs, e g e D sono costanti. Facciamo la trasformazione di variabili

$$x \rightarrow (2mD)^{-1/4} x, \quad y \rightarrow (2mD)^{-1/4} y, \quad R = \frac{1}{2} \frac{C_3}{\hbar} \sqrt{2m/D} g. \quad (4.14)$$

Quando $R = 2$ ovvero $D = \frac{2mgC_3^2}{16\hbar^2}$, l'hamiltoniana diventa:

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}\sigma_z)^2, \quad \text{con } \mathbf{A} = \frac{mC_3g}{2\hbar e} (y, -x, 0). \quad (4.15)$$

In questo punto l'hamiltoniana è equivalente a quella di una carica in un campo magnetico uniforme, dove le due diverse direzioni dello spin si accoppiano con campi magnetici opposti. Poichè $[H, \sigma_z] = 0$ possiamo caratterizzare gli stati con l'autovalore dello spin lungo z . Passando a variabili complesse $z = x + iy$ e introducendo gli

operatori (a, a^\dagger) (2.9) con $l_B = 1$, l'hamiltoniana si può riscrivere

$$H = \begin{pmatrix} H_\uparrow & 0 \\ 0 & H_\downarrow \end{pmatrix}, \quad H_{\uparrow,\downarrow} = 2\sqrt{\frac{D}{2m}} \left[\left(1 \mp \frac{R}{2}\right) aa^\dagger + \left(1 \pm \frac{R}{2}\right) bb^\dagger + 1 \right]. \quad (4.16)$$

Gli autostati di questo sistema sono oscillatori armonici $|m, n\rangle = (a^\dagger)^m (b^\dagger)^n |0, 0\rangle$ di energia $E_{m,n}^{\uparrow,\downarrow} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D}{2m}} \left[\left(1 \mp \frac{R}{2}\right) m + \left(1 \pm \frac{R}{2}\right) n + 1 \right]$. In vicinanza del punto $R \approx 2$ l'hamiltoniana e la funzione d'onda del LLL degli elettroni con spin up sono

$$H_\uparrow = \frac{1}{2} \frac{C_3}{\hbar} g(2aa^\dagger + 1), \quad \phi_n^\uparrow(z) = \frac{z^n}{\sqrt{\pi n!}} \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right). \quad (4.17)$$

Gli operatori (a, a^\dagger) generano i livelli di Landau, mentre (b, b^\dagger) gli stati degeneri di momento angolare. L'azione dell'operatore di momento angolare $L_z = bb^\dagger - aa^\dagger$ sulle funzioni d'onda del LLL è $L_z \phi_n^\uparrow(z) = n \phi_n^\uparrow(z)$, queste sono olomorfe in z , e generano al bordo del sistema un fermione di Weyl chirale con conducibilità Hall quantizzata in unità e^2/h .

Per gli elettroni con spin down la situazione è opposta. Vicino al punto $R = 2$, l'hamiltoniana e la funzione d'onda del LLL sono

$$H_\downarrow = \frac{1}{2} \frac{C_3}{\hbar} g(2bb^\dagger + 1), \quad \phi_m^\downarrow(\bar{z}) = \frac{\bar{z}^m}{\sqrt{\pi m!}} \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right). \quad (4.18)$$

In questo caso gli operatori (b, b^\dagger) creano i livelli di Landau, mentre (a, a^\dagger) gli stati degeneri del momento angolare. Il momento angolare $L_z = bb^\dagger - aa^\dagger$ agisce come $L_z \phi_m^\downarrow(\bar{z}) = -m \phi_m^\downarrow(\bar{z})$. Queste sono funzioni d'onda antiolomorfe in z , e descrivono al bordo del sistema dei fermioni di Weyl antichirali con spin down e conducibilità Hall quantizzata in unità $-e^2/h$. Se ignoriamo i termini di accoppiamento tra gli spin up e

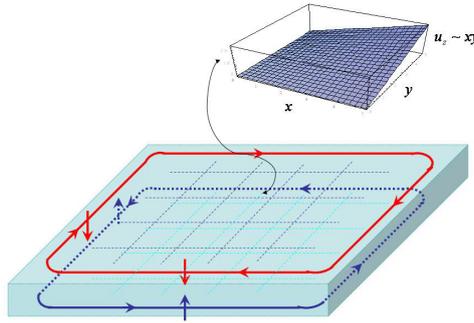


Figura 4.1: Stati elettronici di bordo nel modello del gradiente di sforzo. Gli elettroni con spin up e down hanno chiralità opposte poichè avvertono accoppiamenti di spin orbita opposti. La conducibilità di carica Hall totale è nulla mentre quella di spin è quantizzata. L'inserto mostra il gradiente del tensore di sforzo.

down, il sistema è equivalente a un prodotto diretto di due sistemi QH indipendenti. I due sistemi hanno conducibilità Hall opposte date rispettivamente da

$$\sigma_H^\uparrow = \nu \frac{e^2}{h}, \quad \sigma_H^\downarrow = -\nu \frac{e^2}{h}. \quad (4.19)$$

Il sistema complessivo è TR -invariante, poichè sotto la trasformazione TR si invertono i campi magnetici “effettivi” e al tempo stesso si invertono gli spin. La conducibilità di carica Hall del sistema globale è nulla,

$$\sigma_H^\uparrow + \sigma_H^\downarrow = 0, \quad (4.20)$$

ma la conducibilità di spin Hall, data dalla differenza delle conducibilità di carica, è finita e quantizzata in unità $e/2\pi$

$$\sigma_{SH} = \sigma_H^\uparrow - \sigma_H^\downarrow = 2\frac{e^2}{h} \rightarrow 2\frac{e^2}{h} \frac{\hbar}{2e} = \frac{e}{2\pi}. \quad (4.21)$$

Nell’ultimo passaggio il fattore $\hbar/2e$ è utilizzato per convertire la conducibilità di carica in quella di spin. Chiamiamo la coppia di stati di bordo con spin opposto e contropropaganti stati *Quantum Spin Hall Effect* (QSHE) Fig.(4.1). Questo effetto è un caso particolare di isolante topologico 2D. La possibilità di ignorare i termini di accoppiamento tra gli spin up e spin down dei due stati di bordo permette la conservazione dello spin J_z . In questo caso la conducibilità di spin è quantizzata. In generale lo spin non si conserva e non possiamo avere una conducibilità di spin quantizzata come quella della carica. Gli stati di bordo continuano comunque a esistere e la simmetria TR è preservata. Si parla in questi casi di *isolante topologico*.

4.3.2 Modello in pozzi quantici di HgTe/CdTe

Il precedente modello permette di capire il funzionamento dell’interazione di spin-orbita per la formazione di stati QSHE. Gli stati QSHE, o isolanti topologici 2D, sono stati osservati sperimentalmente per la prima volta in pozzi quantici di HgTe/CdTe seguendo la proposta di Bernevig, Hughes e Zhang [55] di sfruttare la forte interazione spin-orbita che caratterizza alcuni metalli pesanti. Il modello predice una transizione di fase nel pozzo quantico (QW) di HgTe/CdTe in funzione dello spessore d_{QW} del pozzo, da comune isolante per $d_{QW} < d_c$, a isolante topologico con una coppia di stati di bordo contropropaganti con spin opposto per $d_{QW} > d_c$, dove d_c è lo spessore critico.

Sia il HgTe che il CdTe hanno le seguenti bande vicino al livello di Fermi in prossimità del punto Γ ($k = 0$) nella zona di Brillouin. La banda in onda-s è la Γ_6 , mentre la banda in onda-p è splittata dall’interazione spin-orbita nelle due bande Γ_8 e Γ_7 con, rispettivamente, $J = 3/2$ e $J = 1/2$.

L’ordinamento delle bande nel CdTe presenta la banda Γ_6 come di conduzione, e le bande di valenza sono Γ_7 e Γ_8 separate dalla banda di conduzione da un gap di energia

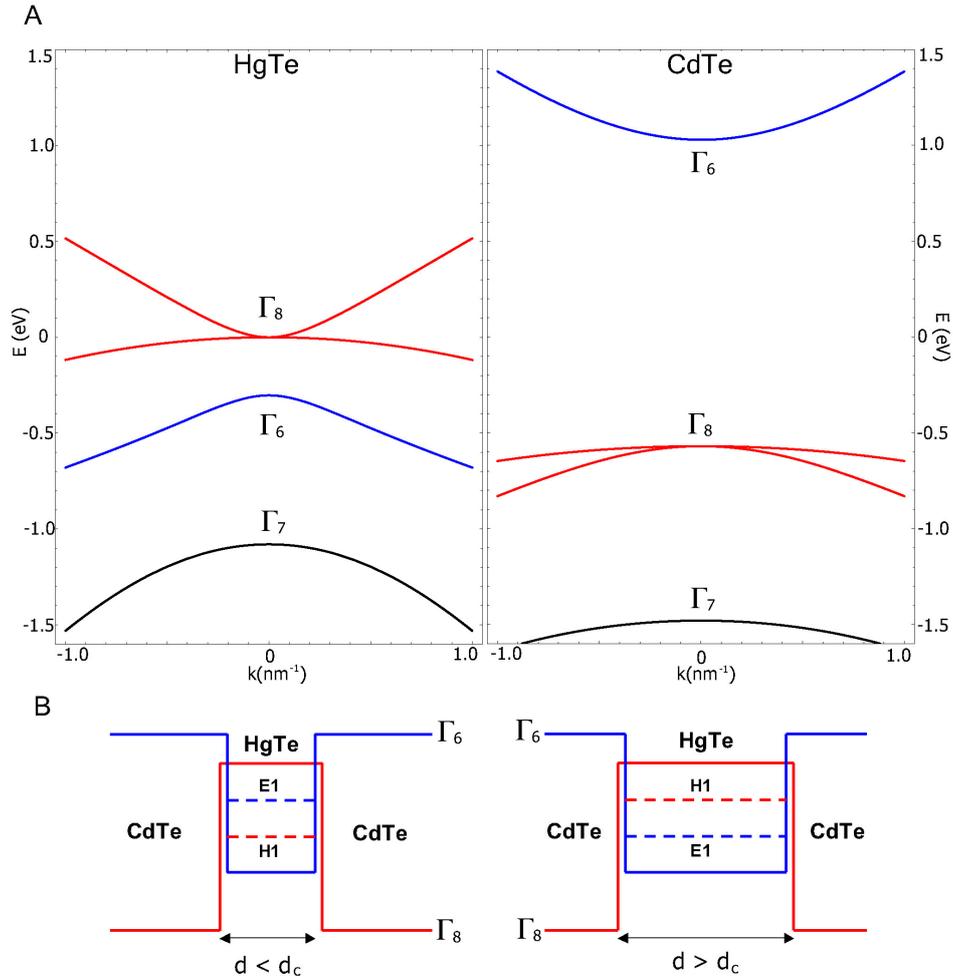


Figura 4.2: (A) Struttura a bande nel bulk di HgTe e CdTe; (B) pittura schematica della geometria del pozzo quantico e delle sottobande minori per spessori $d_{QW} < d_c$ e $d_{QW} > d_c$ [60].

dell'ordine di 1,6 eV. Nel caso del HgTe il forte accoppiamento di spin-orbita causa un'inversione delle bande: la banda Γ_8 , detta *light-hole* (con $J_z = \pm 1/2$), diventa la nuova banda di conduzione poichè è sopra la banda Γ_6 . Al tempo stesso la Γ_8 *heavy-hole* (con $J_z = \pm 3/2$) diventa la prima banda di valenza, e la banda Γ_6 è spinta sotto il livello di Fermi. A causa della degenerazione tra le bande heavy-hole e light-hole al punto Γ , HgTe è un semiconduttore con gap nullo, Fig.(4.2)A.

La struttura delle bande energetiche nel pozzo quantico (QW) di HgTe/CdTe può essere modulata variandone lo spessore. Per strutture poco spesse l'ordinamento delle bande è più simile a quello normale del CdTe, cioè le bande Γ_6 sono di conduzione mentre quelle Γ_8 di valenza. Per maggiori spessori ci si aspetta che l'intera struttura si comporti più come l'HgTe con le bande invertite. Esisterà perciò uno spessore critico d_c per il quale le bande Γ_8 e Γ_6 si attraversano e si invertono, Fig.(4.2)B, [55], [58]. Lo shift dell'energia dei livelli per un certo spessore d_{QW} è riportato in Fig.(4.3). Gli

stati nel pozzo quantico derivati dalla banda Γ_8 heavy-hole sono denotati con H_n , con $n = 1, 2, 3, \dots$ indicano stati con crescente numero di nodi nella direzione z . Con E_n si indicano invece gli stati derivati dalla banda Γ_6 . L'inversione tra le bande E_1 e H_1 avviene allo spessore critico $d_{QW} \sim 6.3$ nm Fig.(4.3).

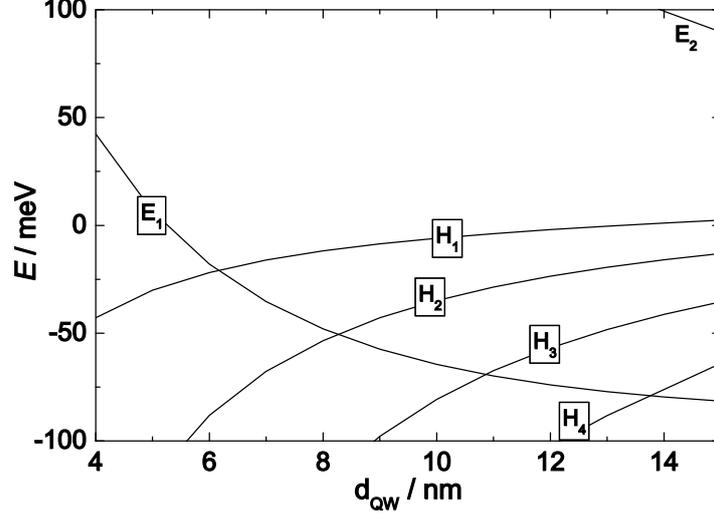


Figura 4.3: Livelli energetici nel QW in funzione dello spessore del d_{QW} [60]

Il modello proposto da Bernevig, Hughes e Zhang [55] considera solo le sottobande rilevanti E_1 e H_1 che, se il sistema è TR -invariante, devono essere doppiamente degeneri. Esprimiamo perciò questi stati nella base $\{|E_1+\rangle, |H_1+\rangle, |E_1-\rangle, |H_1-\rangle\}$, dove $|E_1\pm\rangle$ e $|H_1\pm\rangle$ sono due doppietti di Kramers. L'analisi delle ulteriori simmetrie del problema permette di capire qual è la forma dell'hamiltoniana [55] [51]. Ad esempio gli stati $|E_1\pm\rangle$ e $|H_1\pm\rangle$ hanno parità opposta, e possono essere connessi da un'elemento di matrice dispari sotto parità. Inoltre se ci fossero elementi di matrice non nulli tra $|E_1+\rangle$ e $|H_1-\rangle$ oppure tra $|E_1-\rangle$ e $|H_1+\rangle$, sarebbe generato un processo di ordine superiore che accoppierebbe gli stati \pm della stessa banda che rimuoverebbe la degenerazione di Kramers. La simmetria TR vieta tali elementi di matrice. Infine si ottiene l'hamiltoniana con termini tipici dell'accoppiamento spin-orbita del precedente paragrafo

$$H = \begin{pmatrix} h(\mathbf{k}) & 0 \\ 0 & h^*(-\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

$$h(\mathbf{k}) = \epsilon(\mathbf{k})\mathbb{I}_{2\times 2} + d_a(\mathbf{k})\sigma^a, \quad (4.23)$$

dove $\mathbb{I}_{2\times 2}$ è la matrice identità 2×2 , σ^a le matrici di Pauli, e

$$\epsilon(\mathbf{k}) = C - D(k_x^2 + k_y^2), \quad (4.24)$$

$$d_a(\mathbf{k}) = (Ak_x, -Ak_y, M(\mathbf{k})), \quad (4.25)$$

$$M(\mathbf{k}) = M - B(k_x^2 + k_y^2), \quad (4.26)$$

dove A, B, C, D, M sono parametri che dipendono dalla geometria del QW. In particolare $B < 0$, e $M > 0$ se $d_{QW} < d_c$, mentre $M < 0$ se $d_{QW} > d_c$. Lo spettro del bulk del modello è dato da

$$E_{\pm} = \epsilon(k) \pm \sqrt{d_a d_a} = \epsilon(k) \pm \sqrt{A^2(k_x^2 + k_y^2) + M^2(k)}, \quad (4.27)$$

dove la massa M corrisponde alla differenza di energia tra i livelli E_1 e H_1 al punto Γ . Il punto fondamentale è che per $M > 0$ la banda E_1 sta sopra H_1 , altrimenti E_1 sta sotto H_1 . Ovvero le bande si invertono se $d_{QW} > d_c$.

Gli stati di bordo sono ottenuti risolvendo l'hamiltoniana (4.22) nel piano (x, y) , per $x > 0$ e con condizioni al bordo aperte [55] [60] [61]. Essendo l'hamiltoniana diagonale a blocchi, gli autostati hanno la forma:

$$\Psi_{\uparrow}(x) = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \Psi_{\downarrow}(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \psi_0 \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

con $\mathbf{0}$ il vettore nullo a due componenti, e $\Psi_{\uparrow}(x)$ legato a $\Psi_{\downarrow}(x)$ dal TR . La soluzione mostra che la funzione d'onda $\psi_0(x)$ che descrive gli stati localizzati al bordo del campione esiste solo nel caso $M < 0$, ovvero se $d_{QW} > d_c$, ovvero se le bande sono invertite.

La proiezione dell'hamiltoniana di bulk sugli stati di bordo $\Psi_{\uparrow}(x)$ e $\Psi_{\downarrow}(x)$ determina un'hamiltoniana effettiva degli stati di bordo

$$H_{edge} = Ak_y \sigma^z, \quad (4.29)$$

rendendo manifesto come la propagazione lungo la direzione y dipenda dalla direzione dello spin lungo z . Per questo motivo gli stati di bordo vengono anche detti *stati elicali*. Notiamo che questa relazione tra spin e impulso è diversa dalla elicità (chiralità) delle particelle a massa nulla in $3D$. L'esatta diagonalizzazione mediante metodi numerico dell'hamiltoniana (4.22) su una striscia di spessore finito conferma il risultato che per $d_{QW} > d_c$ ci sono stati di bordo a massa nulla contropropaganti con spin opposto sia sul bordo destro che su quello sinistro della striscia, Fig.(4.4).

Modelli di Isolanti Topologici 3D

L'hamiltoniana (4.22) del modello 2D di isolante topologico di HgTe/CdTe è il punto di partenza per la generalizzazione al caso 3D. Sono state ottenute hamiltoniane analoghe per una classe di modelli come Bi_2Se_3 , Bi_2Te_3 ed Sb_2Te_3 [66]. Come nel caso 2D, anche in questi materiali la SOC permette un'inversione delle bande, risultando nella fase topologica non banale con un bulk completamente isolante, e con stati di bordo topologicamente protetti che corrispondono a un fermione a massa nulla definito in $(2 + 1)$ -dimensioni. Anche questo fermione è "elicale" nel senso che lo spin dell'elettrone è diretto perpendicolarmente all'impulso, circolando attorno alla superficie di

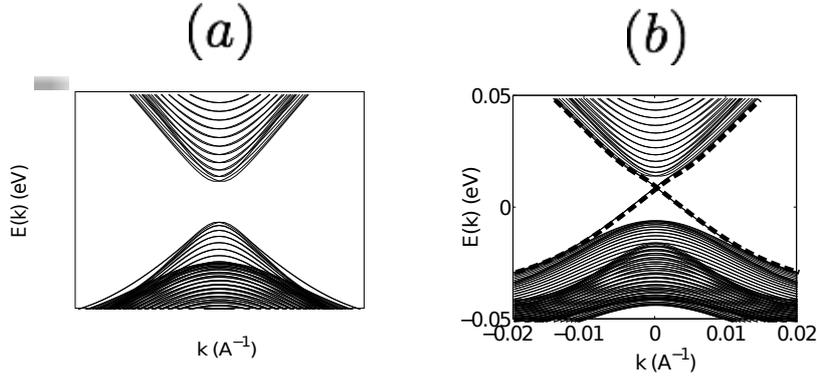


Figura 4.4: Spettro energetico dell’hamiltoniana effettiva (4.22) diagonalizzata numericamente in una geometria cilindrica. (a): Il gap tra la banda di valenza e quella di conduzione in un pozzo quantico con $d_{QW} < d_c$. (b) Le linee a tratti evidenziano gli stati di edge gapless contropropaganti per spessori $d_{QW} > d_c$ [61].

Fermi nello spazio dei momenti. Come nel caso 2D l’introduzione di una perturbazione TR -invariante non è in grado di dare massa a questi stati, mentre una che rompe la simmetria crea un gap di energia e rende il sistema un isolante semplice. La tecnica sperimentale di *angle-resolved photoemission spectroscopy* (ARPES) [67] ha verificato l’esistenza di stati di superficie con un singolo cono di Dirac. Inoltre misure ARPES capaci di “risolvere” lo spin hanno osservato la rotazione dello spin ortogonale all’impulso sulla superficie del campione.

4.3.3 Topologia \mathbb{Z}_2 per stati QSHE

Nel QHE la chiralità degli stati di bordo è fissata dalla direzione del campo magnetico. Se un fermione chirale incontra un’impurezza, non può subire *backscattering* per l’impossibilità di un termine d’interazione reale nell’hamiltoniana. Ci chiediamo quando gli stati di bordo nel QSHE 2D possono subire backscattering. Un’impurezza non magnetica al bordo potrebbe interagire con uno stato di bordo attraverso SOC e causarne una diffusione all’indietro. D’altra parte i possibili cammini dell’elettrone attorno all’impurezza interferiscono quantisticamente. Un elettrone che si muove in avanti con spin up può compiere un giro attorno all’impurezza in senso orario oppure antiorario. Nel primo caso lo spin ruota di $\theta = -\pi$, nel secondo caso di $\theta = \pi$. Complessivamente la rotazione dello spin nei due cammini differisce di 2π . Poichè la funzione d’onda di una particella di spin $1/2$ prende un segno meno per una rotazione di 2π , i due possibili cammini interferiscono distruttivamente dando una perfetta trasmissione. Se invece l’impurezza porta un momento magnetico la simmetria TR è esplicitamente rotta, e le due onde riflesse non interferiscono più distruttivamente.

Questa semplice pittura fisica è valida per una sola coppia di stati di bordo. Se abbiamo due coppie, cioè due stati propaganti in avanti con spin up e due indietro

con spin down, un elettrone può essere diffuso da un canale in avanti a uno indietro senza rovesciare lo spin. Quest'interferenza costruttiva corrisponde ad una interazione rilevante nella teoria del bordo. Questi argomenti suggeriscono che gli stati di bordo QSHE sono robusti solo se possiedono un numero dispari di coppie. In generale si mostra che esiste una classificazione topologica \mathbb{Z}_2 che distingue un isolante banale da un isolante QSHE [53] [56] [57] [62] [63].

La topologia \mathbb{Z}_2 è associata alla presenza di degenerazione di Kramers per gli stati di bordo. Lo spettro ottenuto dalla diagonalizzazione numerica del modello [55] in Fig.(4.4) mostra, per un dato bordo, le due branche di dispersione che si attraversano al punto TR -invariante $k = 0$. In questo punto gli stati di bordo soddisfano le ipotesi del teorema di Kramers e formano un doppietto di stati degeneri. Se aggiungiamo perturbazioni TR -invarianti all'hamiltoniana, possiamo aumentare o diminuire l'energia del punto degenere, ma non possiamo rimuovere la degenerazione.

Se la simmetria TR non è presente, un semplice termine di massa può essere aggiunto all'hamiltoniana in modo da distruggere gli stati di bordo con gap di massa nullo:

$$H_{\text{massa}} = m \int \frac{dk}{2\pi} \left(\psi_{k+}^\dagger \psi_{k-} + \text{h.c.} \right), \quad (4.30)$$

dove $\psi_{k\pm}^\dagger, \psi_{k\pm}$ sono gli operatori di creazione e annichilazione per un elettrone di edge di impulso k , e spin \pm . L'azione dell'operatore \mathcal{T} sugli operatori elettronici è data da

$$\mathcal{T} \psi_{k+} \mathcal{T}^{-1} = \psi_{-k,-}, \quad \mathcal{T} \psi_{k-} \mathcal{T}^{-1} = -\psi_{-k,+}, \quad (4.31)$$

che implica

$$\mathcal{T} H_{\text{massa}} \mathcal{T}^{-1} = -H_{\text{massa}}. \quad (4.32)$$

H_{massa} è una perturbazione che rompe la simmetria TR , non ammissibile perciò per il sistema QSHE. Consideriamo invece il caso di due coppie di stati di bordo, $\psi_{k1,\pm}, \psi_{k2,\pm}$. Date le trasformazioni degli operatori elettronici (4.31), un termine di massa

$$\tilde{m} \int \frac{dk}{2\pi} \left(\psi_{k1+}^\dagger \psi_{k2-} - \psi_{k1-}^\dagger \psi_{k2+} + \text{h.c.} \right), \quad (4.33)$$

è compatibile con la simmetria TR , distruggendo così gli stati di bordo. Anche questo argomento mostra che gli stati di bordo possono acquistare massa a coppie preservando l'invarianza TR .

Abbiamo esposto semplici argomenti che permettono di vedere come la topologia di un sistema QSHE è caratterizzata da un numero quantico topologico \mathbb{Z}_2 . Riprenderemo in dettaglio questo argomento nei prossimi due capitoli. In particolare lo estenderemo al caso in cui i fluidi elettronici che formano gli stati elicali di bordo sono interagenti. Come nel caso dell'effetto Hall frazionario, l'universalità del fenomeno permette di sviluppare una teoria effettiva di Chern-Simons per gli stati di bulk, e la CFT per gli stati di bordo, in grado di analizzare la stabilità dell'effetto topologico indipendentemente dai particolari microscopici.

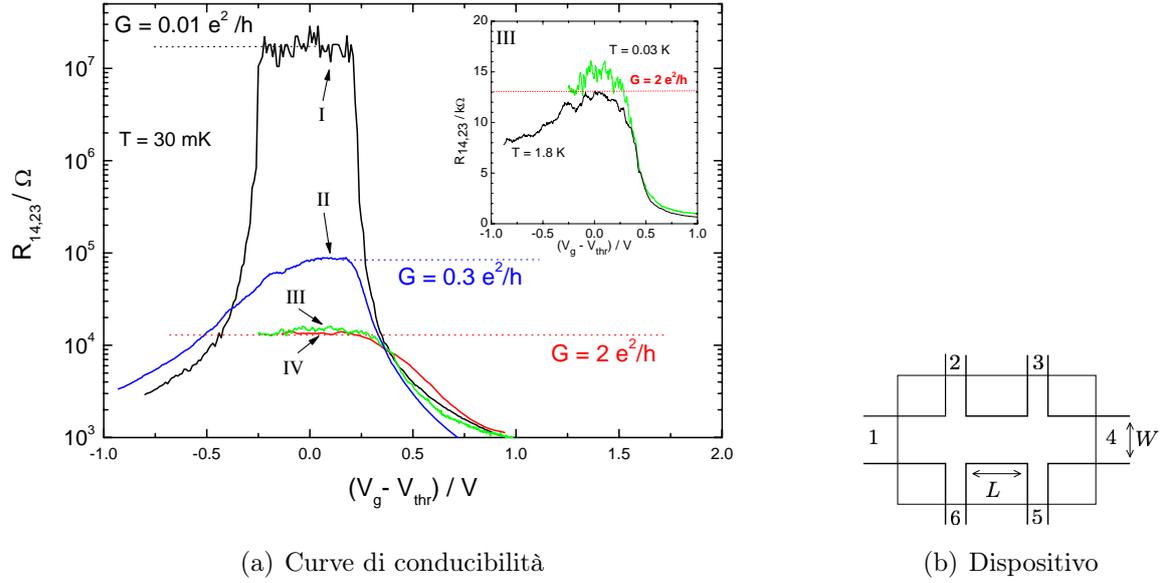


Figura 4.5: Resistenza longitudinale a quattro terminali $R_{14,23} = V_{23}/I_{14}$, in pozzi quantici HgTe/CdTe con bande in regime normale I ($d_{QW} = 5.5$ nm), e invertito II,III,IV ($d_{QW} = 7.3$ nm), in funzione del voltaggio di gate. Le misure sono fatte a $B = 0$ e $T = 30$ mK. I dispositivi I e II hanno dimensioni $(W \times L) = (20.0 \times 13.3) \mu\text{m}^2$, mentre quelle di III e IV sono rispettivamente $(1.0 \times 1.0) \mu\text{m}^2$ e IV $(1.0 \times 0.5) \mu\text{m}^2$. L'inserto mostra $R_{14,23}$ di due campioni delle stesse dimensioni di III per $T = 30$ mK (verde) e $T = 1.8$ K (nera) in scala lineare. [59]

4.4 Misure di conducibilità per QSHE

In un pozzo quantico di HgTe/CdTe, con lo spessore $d_{QW} > d_c$, le bande si invertono e l'isolante banale diventa QSHE, con stati a massa nulla ai bordi del campione. Grazie a questi stati il sistema ha una conducibilità finita anche quando l'energia di Fermi sta nel gap del bulk isolante. Lo stato QSHE può quindi essere rivelato misurando il plateau di conducibilità residua in funzione del voltaggio di gate in un regime nominalmente isolante. La serie di esperimenti [59] testa le previsioni teoriche del modello [55] misurando la conducibilità longitudinale dei pozzi quantici HgTe/CdTe in funzione dello spessore del campione, del voltaggio di gate, e di un campo magnetico esterno.

I dati riportati in Fig.(4.5) riportano la resistenza a quattro terminali $R_{14,23} = V_{23}/I_{14}$ in funzione del voltaggio di gate normalizzato per dispositivi con diversi spessori. La curva indicata con I è ottenuta per uno spessore $d_{QW} = 5.5$ nm, e mostra un comportamento tipico dei dispositivi con le bande disposte normalmente. Quando il livello di Fermi è nel gap, $R_{14,23}$ aumenta repentinamente e raggiunge valori di alcune decine di $\text{M}\Omega$. Questo è il comportamento di un isolante convenzionale. Nel caso dei

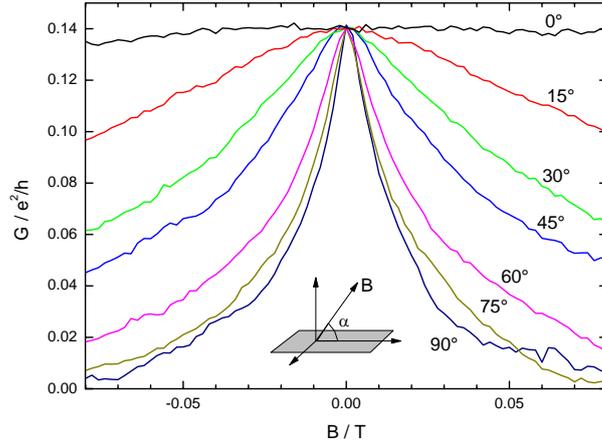


Figura 4.6: Magnetoconduttanza a quattroterminali $G_{14,23}$ nel regime QSH in funzione dell'angolo tra il piano del dispositivo 2D e il campo magnetico applicato. $d_{QW} = 7.3$ nm, $(L \times W) = (20 \times 13.3)$ μm^2 , $T = 1.4\text{K}$. [59]

dispositivi con bande invertite, la resistenza nel regime isolante rimane finita: $R_{14,23}$ mostra dei plateaux con valori ben al di sotto dei $100\text{k}\Omega$. La curva indicata con II dà una conducibilità $G_{14,23} = 0.3 e^2/h$ per un campione di spessore $d_{QW} = 7.3$ nm. Per dimensioni ridotte e stesso spessore $d_{QW} = 7.3$ nm, le curve indicate con III e IV mostrano il raggiungimento del valore predetto della conducibilità $G_{14,23} = 2 e^2/h$, dimostrando l'esistenza dello stato QSHE nella fase di bande invertite.

L'effetto distruttivo del campo magnetico esterno sugli stati QSH è mostrato dall'andamento anisotropo della magnetoresistenza in funzione dell'intensità e dell'inclinazione del campo magnetico B in Fig.(4.6). Per campi magnetici ortogonali al campione, la magnetoconduttanza è centrata in $G_{14,23} = 0.14e^2/h$ quando $B = 0$, e decresce rapidamente al crescere dell'intensità di B . Quando il campo magnetico ha inclinazione nulla, la magnetoconduttanza rimane costante. Queste misure mostrano come la robustezza degli stati di bordo sia assicurata dalla simmetria TR , che è distrutta con l'inserzione di un campo magnetico.

4.5 Cenni ai superconduttori topologici

Poco dopo la loro scoperta, lo studio degli isolanti topologici TR -invarianti è stato generalizzato ai superconduttori topologici [68] [69] [70]. Una breve introduzione del fenomeno nel caso 2D, anche se non direttamente legato a questo lavoro di tesi, è necessaria perchè, come vedremo nell'ultimo capitolo, gli studi della stabilità dei superconduttori topologici e isolanti topologici hanno molti punti in comune.

Nella letteratura recente è stato mostrato che i superconduttori che rompono la simmetria TR sono classificati con un numero intero, come il QHE [71], mentre quelli TR -invarianti sono classificati da un invariante \mathbb{Z}_2 , come per gli isolanti topologici [69] [70].

Il modo più semplice per comprendere i superconduttori topologici è attraverso la loro analogia con gli isolanti topologici, infatti l'hamiltoniana di Bogoliubov-de Gennes (BdG) per le quasiparticelle di un superconduttore è analoga all'hamiltoniana di un isolante di banda discussa in Sez.(4.3.2), con il gap superconduttore corrispondente al gap dell'isolante.

Nel caso di rottura della simmetria TR , si trova che lo stato chirale superconduttore è l'analogo dello stato chirale QHE. Uno stato QHE con conducibilità N (in unità e^2/h) ha N stati chirali di bordo, corrispondenti a N fermioni di Weyl. Anche un superconduttore chirale con numero quantico topologico \mathcal{N} possiede \mathcal{N} stati di bordo, ma sono fermioni di Majorana. L'hamiltoniana più semplice per fermioni senza spin nella fase superconduttrice ($p_x + ip_y$) è [71]

$$H = \frac{1}{2} \sum_p (c_{\mathbf{p}}^\dagger, c_{-\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} \epsilon_{\mathbf{p}} & \Delta p_+ \\ \Delta^* p_- & -\epsilon_{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\mathbf{p}} \\ c_{-\mathbf{p}}^\dagger \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

con $\epsilon_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/2m - \mu$ e $p_\pm = p_x \pm ip_y$. Nella fase di debole accoppiamento con $\mu > 0$, il superconduttore chirale $p_x + ip_y$ possiede fermioni di Majorana chirali che si propagano al bordo, descritti dall'hamiltoniana di bordo

$$H_{\text{edge}} = \sum_{k_y \geq 0} v_F k_y \psi_{-k_y} \psi_{k_y}, \quad (4.35)$$

dove $\psi_{-k_y} = \psi_{k_y}^\dagger$ è l'operatore di creazione dell'eccitazione e il bordo è preso parallelo alla direzione dell'asse y . Poichè gli stati di energia positiva e negativa dell'hamiltoniana di BdG di un superconduttore descrivono lo stesso grado di libertà fisico, ogni modo chirale di Majorana ha metà dei gradi di libertà rispetto al fermione di Weyl nei modi chirali del QHE. La fase di forte accoppiamento $\mu < 0$ è invece banale. Nonostante questo sia un modello di superconduttore topologico TR non invariante, è ritenuto particolarmente interessante a causa della statistica non Abeliiana mostrata dai modi nulli dei fermioni di Majorana quando il numero topologico \mathcal{N} è dispari.

Nel modello per lo stato QSHE in HgTe [55], se ignoriamo i termini di accoppiamento tra lo spin up e down degli elettroni, il sistema è il prodotto diretto di due sistemi indipendenti QHE in cui gli elettroni con spin up e down hanno conducibilità Hall opposte. Allo stesso modo, il modello più semplice per un superconduttore topologico TR -invariante è dato dall'hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} \sum_p \tilde{\Psi}^\dagger \begin{pmatrix} \epsilon_{\mathbf{p}} & \Delta p_+ & 0 & 0 \\ \Delta^* p_- & -\epsilon_{\mathbf{p}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\mathbf{p}} & -\Delta^* p_- \\ 0 & 0 & -\Delta p_+ & -\epsilon_{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \tilde{\Psi}, \quad (4.36)$$

con $\tilde{\Psi}(\mathbf{p}) \equiv (c_{\uparrow\mathbf{p}}, c_{\uparrow-\mathbf{p}}^\dagger, c_{\downarrow\mathbf{p}}, c_{\downarrow-\mathbf{p}}^\dagger)^T$. Da questa si osserva che gli elettroni con spin up (down) formano rispettivamente le coppie di Cooper $p_x + ip_y$ ($p_x - ip_y$). Comparando questo modello col modello [55] per QSHE, osserviamo che in questo caso non è presente il termine proporzionale alla matrice identità a causa della simmetria lacuna-particella dell'hamiltoniana BdG per i superconduttori, ma i termini proporzionali alle matrici di Pauli sono identici in entrambe i casi. Quindi un superconduttore topologico può essere visto come un isolante topologico con simmetria lacuna-particella. In modo analogo al QSHE, sappiamo che gli stati di bordo del sistema TR -invariante descritti dall'hamiltoniana (4.36) sono eccitazioni con spin up e down con opposta chiralità, la cui hamiltoniana di edge è

$$H_{\text{edge}} = \sum_{k_y \geq 0} v_F k_y (\psi_{-k_y \uparrow} \psi_{k_y \uparrow} - \psi_{-k_y \downarrow} \psi_{k_y \downarrow}). \quad (4.37)$$

Possiamo esprimere gli operatori di creazione e distruzione delle eccitazioni $\psi_{k_y \uparrow}$, $\psi_{k_y \downarrow}$ in termini degli autostati $u_{k_y}(x)$, $v_{k_y}(x)$ dell'hamiltoniana di BdG

$$\begin{aligned} \psi_{k_y \uparrow} &= \int d^2x \left(u_{k_y}(x) c_{\uparrow}(x) + v_{k_y}(x) c_{\uparrow}^\dagger(x) \right), \\ \psi_{k_y \downarrow} &= \int d^2x \left(u_{-k_y}^*(x) c_{\downarrow}(x) + v_{-k_y}^*(x) c_{\downarrow}^\dagger(x) \right), \end{aligned}$$

da cui l'azione della trasformazione TR sugli operatori delle eccitazioni di edge è

$$\mathcal{T} \psi_{k_y \uparrow} \mathcal{T}^{-1} = \psi_{-k_y \downarrow}, \quad \mathcal{T} \psi_{k_y \downarrow} \mathcal{T}^{-1} = -\psi_{-k_y \uparrow}. \quad (4.38)$$

Queste ci dicono che $(\psi_{k_y \uparrow}, \psi_{-k_y \downarrow})$ trasforma sotto TR come un doppietto di Kramers, proteggendo gli stati di bordo da termini di massa che rompono la simmetria TR come nel caso degli stati QSHE. Per esempio, l'unico termine indipendente da k_y che potrebbe essere aggiunto all'hamiltoniana di bordo è $im \sum_{k_y} \psi_{-k_y \uparrow} \psi_{k_y \downarrow}$, con m reale. Ma tale termine è dispari sotto TR , quindi ogni termine che causi backscattering tra le eccitazioni è vietato dalla simmetria TR . Ritroviamo gli elementi della classificazione topologica \mathbb{Z}_2 dei sistemi QSHE. Gli stati di bordo di un isolante QSHE consistono di un numero dispari di coppie di fermioni di Weyl contropropaganti con spin opposto, e che mantengono massa nulla per ogni perturbazione TR -invariante grazie al teorema di Kramers. In modo analogo, la teoria di bordo di un superconduttore topologico ha una simmetria topologica \mathbb{Z}_2 , poichè consiste di un numero dispari di coppie di Kramers di fermioni di Majorana con spin opposto contropropaganti.

I risultati esposti in questo capitolo hanno messo in evidenza dei sistemi di fermioni non interagenti o debolmente interagenti che presentano delle caratteristiche del QHE, come le eccitazioni di bordo a massa nulla, in assenza di campo magnetico esterno e con simmetria TR . La stabilità di questi sistemi è caratterizzata da un numero topologico \mathbb{Z}_2 corrispondente alla parità del numero di coppie di fermioni al bordo. Nel prossimo capitolo introdurremo delle nuove tecniche che affrontano il problema della stabilità delle eccitazioni di bordo in presenza di eccitazioni che rispettano la simmetria TR .

Capitolo 5

Isolanti topologici interagenti in 2D

Nei capitoli precedenti abbiamo visto che la fisica degli isolanti topologici è basata su quella del QHE, che è caratterizzata da un bulk isolante e modi chirali di bordo corrispondenti a fermioni di Weyl Cap.(2). Nel caso frazionario l'interazione tra gli elettroni introduce eccitazioni con carica e statistica frazionaria, ma si mantiene la struttura chirale. Lo studio dei sistemi interagenti attraverso l'uso della CFT effettiva di bordo nel Cap(3), ha messo in luce l'anomalia chirale della teoria di bordo. Per mezzo del flusso spettrale, l'anomalia consente il passaggio di carica da un bordo all'altro nella geometria dell'anello corrispondente alla corrente Hall.

A differenza degli stati QHE, gli isolanti topologici introdotti nel Cap(4) sono sistemi non chirali che rispettano la simmetria di inversione temporale. Anche per questi sistemi la fase topologica consiste nell'avere un bulk isolante e stati di bordo a massa nulla. L'esempio più semplice è il QSHE, formato da due sistemi Hall interi con spin e chiralità opposte. Le eccitazioni al bordo di questo sistema possono diventare massive se non sono protette da ulteriori simmetrie, come la simmetria TR . In particolare nel precedente capitolo è stato mostrato che un numero di coppie pari (dispari) non è (è) stabile.

In questo capitolo approfondiremo in modo più dettagliato la stabilità degli stati di bordo per un isolante topologico TR invariante in presenza di interazioni, in una classe di sistemi introdotti in [72] [73] [74] [75] e non ancora confermati sperimentalmente. Nel caso interagente, l'analisi di stabilità basata sulle proprietà delle bande elettroniche discussa nel precedente capitolo non è più applicabile, mentre lo studio della teoria di bordo può essere esteso. Presenteremo la teoria effettiva di Chern-Simons che descrive il più generico isolante topologico interagente abeliano TR -invariante e discuteremo la stabilità degli stati di bordo usando la corrispondenza bulk-boundary della teoria. In particolare ritroveremo che il criterio \mathbb{Z}_2 [53] [56] [57] si estende al caso interagente. Nel corso dell'analisi definiremo la quantità di "parità di spin" P_s . Questa risulterà di fondamentale importanza nel prossimo capitolo, nel quale ritroveremo il criterio di stabilità attraverso lo studio delle funzioni di partizione degli stati di bordo nella CFT.

5.1 Teoria di Chern-Simons per isolanti topologici frazionari abeliani

Nel Cap.(3) abbiamo mostrato che un generico stato FQHE con statistica abeliana delle eccitazioni è descritto da una teoria di Chern-Simons a m -componenti $U(1)$ con azione

$$S_{bulk} = \int d^2x dt \left(\frac{1}{4\pi} K_{IJ} a_{I\mu} \partial_\nu a_{J\lambda} \epsilon^{\mu\nu\lambda} - \frac{1}{2\pi} A_\mu t_I \partial_\nu a_{I\lambda} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \right), \quad (5.1)$$

dove K è una matrice di interi $m \times m$ simmetrica non degenere, $A_\mu(t, \mathbf{x})$ è il campo elettromagnetico esterno, $a_{I\mu}(t, \mathbf{x})$ sono gli m campi statistici, e il vettore t delle cariche ha m componenti intere. Ricordiamo che la carica e la statistica delle eccitazioni frazionarie sono date da

$$= \sum_{I,J=1}^m t_I K_{IJ}^{-1} n_J, \quad \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2} \sum_{I,J=1}^m n_I K_{IJ}^{-1} n_J, \quad (5.2)$$

dove n è un vettore di m interi che individua l'eccitazione anionica nel fluido elettronico a più strati. La richiesta che lo spettro contenga m eccitazioni di tipo elettronico vincola la matrice K ad avere componenti intere e, in un'opportuna base, le K_{II} sono dispari e $t_I = 1, \forall I = 1 \dots m$ [45]. Le eccitazioni elettroniche si ottengono ponendo

$$n = K\Lambda, \quad (5.3)$$

con Λ un vettore m -dimensionale di interi. Il filling fraction è

$$\nu = \sum_{I,J=1}^m t_I K_{IJ}^{-1} t_J. \quad (5.4)$$

Questo sistema non è chiaramente invariante per inversione temporale. Data l'azione dell'operatore \mathcal{T} sui campi

$$a_\mu(t, \mathbf{x}) \rightarrow \pm a_\mu(-t, \mathbf{x}), \quad (5.5)$$

$$A_\mu(t, \mathbf{x}) \rightarrow \pm A_\mu(-t, \mathbf{x}), \quad (5.6)$$

dove il segno (+) vale per $\mu = 0$ mentre (-) per $\mu = 1, 2$, si verifica facilmente che l'azione (5.1) rompe esplicitamente la simmetria TR .

Una estensione della teoria che rispetti la simmetria TR è ottenibile raddoppiando il numero di campi come segue. Consideriamo i campi di gauge $a_{I\mu}(t, \mathbf{x})$, con $I = 1, \dots, 2N$. L'azione del sistema analoga alla (5.1) è:

$$S_{bulk} = \int d^2x dt \left(\frac{1}{4\pi} \mathcal{K}_{IJ} a_{I\mu} \partial_\nu a_{J\lambda} \epsilon^{\mu\nu\lambda} - \frac{1}{2\pi} A_\mu Q_I \partial_\nu a_{I\lambda} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \right), \quad (5.7)$$

dove adesso \mathcal{K} è una matrice di interi $2N \times 2N$ simmetrica e invertibile, e Q è il vettore delle cariche di $2N$ componenti. Anche in questo caso la richiesta che la teoria contenga

eccitazioni di tipo elettronico lega la parità degli elementi di Q agli elementi diagonali della matrice \mathcal{K}

$$(-1)^{Q_I} = (-1)^{\mathcal{K}_{II}}, \quad I = 1, \dots, 2N. \quad (5.8)$$

Determiniamo i vincoli imposti dalla TR -invarianza nella teoria (5.7). Assumiamo che l'azione dell'inversione temporale \mathcal{T} su i $2N$ campi $U(1)$ sia

$$\mathcal{T} : \quad a_{I\mu}(t, \mathbf{x}) \rightarrow \pm \Sigma_{IJ} a_{J\mu}(-t, \mathbf{x}), \quad (5.9)$$

in questa equazione prendiamo il segno (+) se $\mu = 1, 2$ e il segno (-) se $\mu = 0$, e Σ è una matrice $2N \times 2N$ di interi che permuta N campi in N campi. Eseguendo il cambio di base $a_{I\lambda}^{(+)} = (a_{I,\lambda} + a_{I+N,\lambda})/2$, $I = 1, \dots, N$, la trasformazione (5.9) permette alle correnti

$$j_I^{\mu(+)} \sim \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu a_{I\lambda}^{(+)}, \quad I = 1, \dots, N, \quad (5.10)$$

di essere interpretate come densità di correnti elettriche, poichè trasformano come vettori sotto TR e quindi il termine di accoppiamento con il campo elettromagnetico esterno è TR -invariante [74]. Perchè l'azione (5.7) sia invariante sotto TR (5.9) dobbiamo avere

$$\Sigma^T \mathcal{K} \Sigma = -\mathcal{K}, \quad (5.11)$$

$$\Sigma Q = Q. \quad (5.12)$$

Inoltre la richiesta che $\mathcal{T}^2 = (-1)^{N_e}$, dove N_e è il numero totale di elettroni nel sistema, implica che

$$\Sigma^2 = \mathbb{I}_{2N \times 2N}. \quad (5.13)$$

Notiamo che la matrice simmetrica \mathcal{K} non è definita positiva ma corrisponde ad una forma quadratica Lorentziana con segnatura (N, N) . La trasformazione dei campi (5.9) non specifica completamente l'azione dell'inversione temporale sull'intero sistema, poichè gli operatori come $\epsilon^{\lambda\mu\nu} \partial_\mu a_{I\nu}$ sono tutti elettricamente neutri. Per completare la descrizione dobbiamo specificare le proprietà di trasformazione degli operatori carichi. Questa può essere discussa nella corrispondente CFT di bordo, anche ai fini dell'analisi della stabilità. Usando la corrispondenza bulk-boundary per le teorie di Chern-Simons vista nel Cap.(3), possiamo introdurre $2N$ campi scalari reali $\Phi_I(t, x)$ con $I = 1, \dots, 2N$, che sono le componenti di un vettore $\Phi(t, x)$ definito sul bordo del sistema. L'azione per la teoria bosonica di bordo in (1+1) dimensioni è

$$S_{bordo} = \int dx dt \left(\frac{1}{4\pi} \mathcal{K}_{IJ} \partial_x \Phi_I \partial_t \Phi_J - \mathcal{V}_{IJ} \partial_x \Phi_I \partial_x \Phi_J + \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} Q_I \partial_\mu \Phi_I A_\nu \right), \quad (5.14)$$

dove \mathcal{V} è la matrice definita positiva (non universale) delle velocità. La quantizzazione della teoria del bosone chirale segue dalle regole di commutazione a tempi uguali [41]

$$[\Phi_I(t, x), \Phi_J(t, x')] = -i\pi \mathcal{K}_{IJ} \epsilon(x - x'), \quad (5.15)$$

generalizzazione del caso del campo bosonico ad una componente [19]. Le eccitazioni fermioniche sono rappresentate dagli operatori di vertice

$$\Psi_\Lambda(t, x) =: e^{i\Lambda_I \mathcal{K}_{IJ} \Phi_J(t, x)} :=: e^{i\Theta(\Lambda)} :, \quad (5.16)$$

dove $\Theta(\Lambda) = \Lambda^T \mathcal{K} \Phi$, e Λ è un vettore di $2N$ interi che determina la carica e la statistica dell'operatore, estensione del vettore (5.3). L'operatore che misura la densità di carica totale è

$$\rho = \frac{1}{2\pi} Q_I \partial_x \Phi_I, \quad (5.17)$$

e dalla commutazione dell'operatore (5.16) con la densità di carica, troviamo la carica trasportata dall'operatore di vertice:

$$q(\Lambda) = \Lambda^T Q. \quad (5.18)$$

Le trasformazioni (5.9) si traducono nella teoria di bordo come

$$\mathcal{T}^{-1}(\partial_\mu \Phi_I(t, x)) \mathcal{T} = \Sigma_{IJ} \partial_\mu \Phi_J(-t, x), \quad (5.19)$$

con $\mu = 0, 1$. Integrando la (5.19) otteniamo come trasformano per inversione temporale le componenti del campo scalare

$$\mathcal{T}^{-1} \Phi_I(t, x) \mathcal{T} = \Sigma_{IJ} \Phi_J(-t, x) + \pi \mathcal{K}_{IJ}^{-1} \chi_J, \quad (5.20)$$

dove χ è un vettore di $2N$ componenti reali. Dalla (5.20), ricordando l'antiunitarietà di \mathcal{T} , determiniamo la trasformazione degli operatori di vertice (5.16) per inversione temporale

$$\mathcal{T}^{-1} \Psi_\Lambda(t, x) \mathcal{T} = \Psi_{-\Sigma \Lambda}(-t, x) e^{-i\pi \Lambda^T \chi}. \quad (5.21)$$

Infine, la richiesta che gli operatori di vertice elettronici siano dispari sotto \mathcal{T}^2 quando è presente un numero dispari di fermioni è

$$\hat{\mathcal{T}}^{-2} \Psi_\Lambda(t, x) \hat{\mathcal{T}}^2 = \Psi_\Lambda(t, x) (-1)^{\Lambda^T Q}, \quad (5.22)$$

da cui segue che il vettore χ deve soddisfare al vincolo

$$(1 - T)^T \chi = Q \pmod{2}. \quad (5.23)$$

In conclusione, un generico isolante abeliano TR invariante è descritto dai parametri $(\mathcal{K}, Q, \Sigma, \chi)$. La matrice \mathcal{K} e il vettore delle cariche Q specificano la carica e la statistica delle quasiparticelle, mentre la matrice Σ e il vettore χ descrivono l'azione dell'inversione temporale. Osserviamo che i valori di $(\mathcal{K}, Q, \Sigma, \chi)$ legati da trasformazioni di similitudine corrispondono allo stesso sistema fisico. Se infatti facciamo le

trasformazioni $a' = Ua$ e $\Phi' = U\Phi$ nelle teorie di bulk/edge (5.7) (5.14), i parametri $(\mathcal{K}, Q, \Sigma, \chi)$ sono equivalenti a

$$\begin{aligned}\mathcal{K}' &= (U^{-1})^T \mathcal{K} U^{-1}, \\ Q' &= (U^{-1})^T Q, \\ \Sigma' &= U \Sigma U^{-1}, \\ \chi' &= (U^{-1})^T \chi.\end{aligned}\tag{5.24}$$

Dalla ridefinizione del campo $\Phi' = \Phi + \xi$, con ξ generico vettore reale, χ è equivalente a $\chi' = \chi + \frac{1}{\pi} \mathcal{K}(1 - \Sigma)\xi$. Infine dalle trasformazioni (5.21), se v è un vettore di interi, allora χ è equivalente a $\chi' = \chi + 2v$.

A meno di di equivalenze (5.24) si può mostrare che, usando i vincoli (5.11) (5.12) (5.13) (5.23) imposti sui parametri $(\mathcal{K}, Q, \Sigma, \chi)$, la forma generale dell'isolante abeliano TR -invariante è data dalle espressioni [73] [75]:

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} K & W \\ W^T & -K \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix},\tag{5.25}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix},$$

dove \mathbf{I} è l'identità $N \times N$, $K^T = K$ e $W^T = -W$ sono matrici $N \times N$ e t un vettore di N interi nella stessa notazione del caso chirale.

5.1.1 Esempi di isolanti topologici frazionari abeliani

Stati di Laughlin e QSHE frazionari con 2 stati di bordo

Il modello più semplice di isolante topologico frazionario si può formare unendo due fluidi elettronici con chiralità opposte per spin up e down, ognuno dei quali è in uno stato di Laughlin con filling fraction $\nu = 1/p$, con $p = 1, 3, 5 \dots$. Il modello si ottiene dalla (5.25) per $2N = 2$, dove necessariamente $W^T = -W = 0$

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & -p \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\tag{5.26}$$

La forma della matrice \mathcal{K} mostra che gli elettroni con spin up e down formano una coppia di stati Hall frazionari disaccoppiati, generando globalmente uno stato frazionario QSHE. Per $p = 1$ ritroviamo il modello QSHE con elettroni liberi studiato in Sez.(4.3). La conducibilità di spin Hall è ottenuta dalla differenza delle conducibilità Hall di ogni singolo fluido ed è, in unità di spin

$$\sigma_{SH} = \nu \frac{e}{2\pi} = \frac{1}{p} \frac{e}{2\pi} = -Q^T \mathcal{K}^{-1} \chi \frac{e}{2\pi}.\tag{5.27}$$

Osserviamo che nell'ultimo passaggio abbiamo riscritto la conducibilità utilizzando i parametri $(\mathcal{K}, Q, \Sigma, \chi)$ della teoria. Vedremo nel seguito l'importanza di questa scrittura. La teoria di bordo è descritta da un vettore di campi scalari di due componenti, una per lo spin up e l'altra per quello down, $\Phi(t, x) = \begin{pmatrix} \Phi_{\uparrow} \\ \Phi_{\downarrow} \end{pmatrix}$. Scegliendo $\Lambda_1 = (1, 0)$ o $\Lambda_2 = (0, 1)$, dalla (5.16) otteniamo gli operatori di creazione e distruzione per un elettrone bosonizzato nei due fluidi di edge, e applicando le (5.21) ne troviamo la trasformazione sotto l'inversione temporale

$$\mathcal{T} : \psi_{\uparrow}(t, x) = e^{ip\Phi_{\uparrow}(t, x)} \rightarrow \psi_{\downarrow}(-t, x) = e^{-ip\Phi_{\downarrow}(-t, x)}, \quad (5.28)$$

$$\mathcal{T} : \psi_{\downarrow}(t, x) = e^{-ip\Phi_{\downarrow}(t, x)} \rightarrow -\psi_{\uparrow}(-t, x) = -e^{ip\Phi_{\uparrow}(-t, x)}, \quad (5.29)$$

che riproduce quanto discusso nel precedente capitolo.

Stati gerarchici abeliani e QSHE frazionari con $2m$ stati di bordo

Il FQHE di m fluidi elettronici descritti da una generica matrice K , Sez.(3.6) corrisponde all'isolante topologico (5.25) con $W = 0$

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & -K \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

In questo caso la teoria descrive m coppie di stati di bordo chirali (antichirali) per spin up (down). Ciascun fluido di una data chiralità e proiezione dello spin è in uno stato gerarchico FQHE che dipende dalla forma della matrice K . Globalmente la teoria descrive stati QSHE frazionari gerarchici. Anche in questo esempio è conservato lo spin J_z lungo un certo asse di quantizzazione poichè non ci sono correlazioni tra gli spin up e down. La conducibilità di spin Hall è quindi quantizzata e data dalla differenza delle conducibilità Hall dei due opposti sistemi di spin

$$\sigma_{SH} = \nu \frac{e}{2\pi} = t^T K^{-1} t \frac{e}{2\pi} = -Q^T \mathcal{K}^{-1} \chi \frac{e}{2\pi}, \quad (5.31)$$

dove nel secondo passaggio abbiamo usato la (5.4) per il filling fraction.

Stati gerarchici abeliani generali

Il caso generale $2N$ dimensionale (5.25) con $W \neq 0$ ha la seguente interpretazione [73] [74]. Mentre la decomposizione a blocchi (5.30) implica la presenza di N modi chirali e N antichirali fra loro disaccoppiati, il termine $W \neq 0$ implica la presenza di eccitazioni correlate chirali-antichirali nello spettro. Questa possibilità di eccitazioni di bordo miste è già presente nel FQHE, ad esempio negli stati di Jain $\nu = m/(mp - 1)$ contenenti un modo carico chirale ed $(m - 1)$ modi neutri contropropaganti antichirali tra loro accoppiati. L'estensione speculare di questo sistema FQHE determina il caso generale $W \neq 0$.

5.2 Stabilità degli stati di bordo: analisi microscopica

La forma generale della teoria di Chern-Simons (5.7) e sul bordo (5.14) parametrizzata dalle matrici (5.25) descrive sistemi QSHE ottenuti unendo stati FQHE di chiralità opposta. Questa teoria non descrive sempre dei sistemi di isolanti topologici perchè gli stati di bordo possono interagire tra chiralità opposte mediante termini di interazioni reali nell'hamiltoniana, acquistare massa e non partecipare alla teoria di bassa energia. Nel limite estremo che tutte le coppie di stati di bordo possano diventare massivi, il sistema diventa un isolante topologico banale. Abbiamo già visto esempi di questo meccanismo nel capitolo precedente. Osserviamo quindi che la teoria di Chern-Simons e la CFT permettono di affrontare sistemi interagenti ma richiedono un'analisi di stabilità per essere significative. Il nostro scopo è determinare le condizioni per cui i modi di bordo a massa nulla sono robusti, ovvero non possono acquistare massa senza rompere esplicitamente o spontaneamente le due simmetrie del problema, cioè l'invarianza per inversione temporale e la conservazione della carica.

Il problema della stabilità degli stati di bordo per un isolante TR -invariante è iniziato con [53] [56] [57] utilizzando il formalismo delle bande, riferendosi quindi a sistemi composti da elettroni liberi. L'uso della teoria effettiva, indipendente dai particolari microscopici di ogni singolo problema, permette di trattare anche il caso interagente. Lo studio [72] [73] [74] [75] mostra infatti che gli isolanti (5.25) possiedono una classificazione \mathbb{Z}_2 .

Dimostriamo che l'isolante TR -invariante descritto nel precedente paragrafo è topologico *se e solo se* l'“indice”

$$\mathcal{R} = p Q^T \mathcal{K}^{-1} \chi = \text{dispari}, \quad (5.32)$$

dove p è l'ordine topologico di Wen per il sistema FQHE [37] [38] e $Q^T \mathcal{K}^{-1} \chi$ è la conducibilità di spin.

In questa sezione mostreremo attraverso un'analisi “microscopica” che la condizione (5.32) è necessaria perchè gli stati di bordo non siano distrutti. Infatti quando l'indice \mathcal{R} è pari è possibile trovare N perturbazioni nella CFT capaci di rendere massivi gli stati di bordo rendendo banale l'isolante, conservando la carica elettrica e non rompendo esplicitamente o spontaneamente la simmetria TR . Questo argomento non è però sufficiente a garantire l'esistenza degli stati di bordo quando l'indice \mathcal{R} è dispari. Questa parte è dimostrata nella prossima sezione per mezzo di argomenti generali che prescindono dalla forma dell'interazione.

I $2N$ modi di bordo sono resi massivi da N termini di interazione reali nell'hamiltoniana della CFT che rispettino la conservazione della carica e l'inversione temporale. Costruiamo un tale termine usando gli operatori locali elettronici (5.16), contraddistinti dal vettore Λ ,

$$U(\Lambda) = U \cos(\Theta(\Lambda) - \alpha). \quad (5.33)$$

U è la costante di accoppiamento e α una fase che possono dipendere da x in presenza di disordine [73] [75]. Poichè l'Eq.(5.20) implica che $\Theta(\Lambda) = \Lambda^T \mathcal{K} \Phi$ trasforma sotto TR come

$$\mathcal{T}\Theta(\Lambda)\mathcal{T}^{-1} = \Theta(-\Sigma\Lambda) + \pi\Lambda^T\chi, \quad (5.34)$$

possiamo costruire termini di interazione che sono pari (+) o dispari (-) sotto l'inversione temporale

$$U_{\pm}(\Lambda) = U[\cos(\Theta(\Lambda) - \alpha) \pm (-1)^{\Lambda^T\chi} \cos(\Theta(-\Sigma\Lambda) - \alpha)]. \quad (5.35)$$

Per dare massa ai modi di bordo consideriamo solo i termini col segno (+), poichè non rompono *esplicitamente* la simmetria TR . Richiediamo inoltre che gli operatori di vertice $\exp(i\Theta(\Lambda_i))$ delle perturbazione abbiano $Q^T\Lambda_i$ nulla, per conservare la carica del sistema, e soddisfino alle seguenti condizioni di “vettore nullo” di Haldane [76]

$$Q^T\Lambda_i = 0, \quad (5.36)$$

$$\Lambda_i^T \mathcal{K} \Lambda_j = 0, \quad \forall i, j = 1 \dots, N. \quad (5.37)$$

Le condizioni di Haldane garantiscono che gli operatori di vertice costruiti con il set dei $\{\Lambda_i\}$ siano quantità scalari che commutano fra loro. In questo caso il sistema accoppiato può essere riscritto come N fluidi non chirali disaccoppiati, ciascuno con una perturbazione massiva [75].

Isolanti topologici frazionari con una coppia di stati di bordo

Consideriamo per prima il modello con una coppia di stati di bordo introdotto nella Sez.(5.1.1), dove $Q^T\mathcal{K}^{-1}\chi = 1/p$. L'indice \mathcal{R} è dato da

$$\mathcal{R} = p Q^T\mathcal{K}^{-1}\chi = 1, \quad \forall p. \quad (5.38)$$

Secondo il criterio dobbiamo trovare che questo sistema ha stati di bordo protetti. Consideriamo quindi il termine di scattering

$$U(\Lambda) = U \cos(\Theta(\Lambda) - \alpha). \quad (5.39)$$

La richiesta di carica nulla impone che Λ sia della forma $\Lambda = (n, -n)$, $n \in \mathbb{Z}$, che soddisfa automaticamente la condizione di Haldane (5.37). La perturbazione è quindi

$$U(\Lambda) = U \cos(np\Phi_{\uparrow} + np\Phi_{\downarrow} - \alpha). \quad (5.40)$$

Usando la (5.20) si verifica che l'interazione è pari sotto TR quando n è pari, mentre è dispari se n è dispari. Dobbiamo perciò prendere n pari. Aggiungendo una perturbazione di questo tipo possiamo dare massa senza rompere esplicitamente TR . Quando però si accende questa perturbazione tutti gli operatori $U(\Lambda)$ per gli altri valori di

n , anche dispari, acquistano un valore di aspettazione che rompono *spontaneamente* la simmetria TR . Concludiamo che nel caso di una coppia di stati di bordo, tutte le perturbazioni possibili rompono esplicitamente o spontaneamente la simmetria TR ; quindi la fase topologica TR -invariante è stabile in accordo con il criterio (5.32).

Isolanti topologici frazionari con due coppie di stati di edge

Consideriamo il modello a m coppie di fluidi analizzato in Sez.(5.1.1) ponendo $m = 2$ e K matrice 2×2 . In questo caso ci sono due coppie di stati di bordo, quindi dobbiamo trovare due perturbazioni (5.33) per poter dare loro massa. E' conveniente parametrizzare la matrice \mathcal{K} come

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} b + us & b & 0 & 0 \\ b & b + vs & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b - us & -b \\ 0 & 0 & -b & -b - vs \end{pmatrix}, \quad (5.41)$$

dove b, u, v, s sono interi e u e v non hanno fattori in comune. In termini di questi parametri l'ordine topologico del sistema è

$$p = (u + v)b + uvs, \quad (5.42)$$

mentre la conducibilità di spin si trova dalla (5.31)

$$Q^T \mathcal{K}^{-1} \chi = -\frac{u + v}{(u + v)b + uvs}. \quad (5.43)$$

L'indice \mathcal{R} assume il valore

$$\mathcal{R} = p Q^T \mathcal{K}^{-1} \chi = -(u + v), \quad (5.44)$$

quindi la parità di $(u + v)$ deve determinare quando gli stati di bordo possono essere resi massivi o no.

Consideriamo il caso in cui $\mathcal{R} = -(u + v)$ è dispari, e supponiamo di aver trovato i due vettori Λ_1 e Λ_2 linearmente indipendenti delle perturbazioni (5.33) con carica nulla che soddisfano le condizioni di Haldane. Se definiamo $\Lambda_{\pm} = \Lambda_1 \pm \Lambda_2$, questi soddisfano le condizioni

$$\begin{aligned} \Sigma \Lambda_- &= \Lambda_-, \\ \Sigma \Lambda_+ &= -\Lambda_+, \\ \Lambda_-^T \mathcal{K} \Lambda_+ &= 0. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Segue che $\Lambda_- \propto (1, -1, 1, -1)$, mentre $\Lambda_+ \propto (v, u, -v, -u)$, da cui

$$\Lambda_-^T \chi = 0, \quad \Lambda_+^T \chi = -(u + v) = \mathcal{R}. \quad (5.46)$$

I vettori Λ_{\pm} soddisfano a loro volta le condizione di carica nulla e di Haldane e possono dar luogo a interazioni tra i modi di bordo. Usando la (5.34) e le (5.45), (5.46) si verifica che l'interazione che coinvolge il vettore Λ_- è invariante sotto TR

$$\mathcal{T} : U(\Lambda_-) = \cos(\Theta(\Lambda_-) - \alpha) \rightarrow \cos(\Theta(\Lambda_-) - \alpha), \quad (5.47)$$

mentre l'interazione dovuta al vettore Λ_+ è invariante solo quando \mathcal{R} è pari

$$\mathcal{T} : U(\Lambda_+) = \cos(\Theta(\Lambda_+) - \alpha) \rightarrow (-)^{\mathcal{R}} \cos(\Theta(\Lambda_+) - \alpha). \quad (5.48)$$

Nel caso \mathcal{R} dispari quindi disponiamo di una sola perturbazione TR -invariante. Al più potremmo considerare la perturbazione invariante determinata dal vettore $2\Lambda_+$ ma questa corrisponderebbe a rompere spontaneamente la simmetria TR come nel caso $c = 1$ precedente.

Quando invece $\mathcal{R} = -(u + v)$ è pari, singolarmente u e v sono dispari poichè non hanno nessun fattore in comune. I vettori Λ_1 e Λ_2 che danno massa senza rompere esplicitamente la simmetria TR si ricavano dall'analisi di prima

$$\begin{aligned} \Lambda_1^T &= \frac{1}{2}(\Lambda_+ + \Lambda_-) = \frac{1}{2}(1 + v, -1 + u, 1 - v, -1 - u), \\ \Lambda_2^T &= \frac{1}{2}(\Lambda_+ - \Lambda_-) = \frac{1}{2}(-1 + v, 1 + u, -1 - v, 1 - u). \end{aligned} \quad (5.49)$$

Per completare l'analisi dobbiamo verificare che la perturbazioni corrispondenti a Λ_1 e Λ_2 non rompano spontaneamente l'inversione temporale. A tal fine introduciamo il concetto di vettori primitivi. Due vettori Λ_1 e Λ_2 sono detti

- primitivi, se non è possibile determinare (a_1, a_2, k, Λ) , con $a_1, a_2, k \in \mathbb{Z}$, $k > 1$, e Λ vettore di interi tali che $a_1\Lambda_1 + a_2\Lambda_2 = k\Lambda$. In questo caso i due vettori Λ_1 e Λ_2 generano un sottoreticolo del reticolo Lorentziano dalla matrice \mathcal{K} [2] [3] [77].
- non primitivi, se esiste il set di parametri (a_1, a_2, k, Λ) tali che $a_1\Lambda_1 + a_2\Lambda_2 = k\Lambda$. In questo casi i due vettori Λ_1 e Λ_2 non generano nessun sottoreticolo.

La rottura spontanea della simmetria TR avviene quando i due vettori non sono primitivi. Infatti, durante l'apertura del gap da parte della perturbazione (5.47), si congelano i valori di $\Theta(\Lambda_1)$, $\Theta(\Lambda_2)$ e anche quello di $\Theta(k\Lambda) = \Theta(a_1\Lambda_1) + \Theta(a_2\Lambda_2)$ che, come nel caso dispari, porta a una rottura spontanea dell'inversione temporale. Si dimostra che i due vettori (5.49) sono primitivi e quindi la perturbazione (5.47) non rompe l'inversione temporale nè direttamente nè spontaneamente distruggendo gli stati di bordo [75].

Abbiamo verificato che nel caso di due coppie di stati di bordo è sufficiente che l'indice \mathcal{R} (5.32) sia pari per poter trovare un'interazione capace di dare massa agli stati di bordo senza violare le simmetrie del problema. In questo caso abbiamo perciò un isolante banale.

Isolanti topologici frazionari con N coppie di stati di edge

Nel caso di N coppie, per poter distruggere gli stati di bordo del generico isolante descritto dalle (5.25), dobbiamo trovare N vettori $\{\Lambda_i\}$ che soddisfano le condizioni di carica nulla e Haldane (5.36) e (5.37). Si dimostra [73] [75] che è sempre possibile trovare $N-1$ vettori Λ_i , che soddisfano $\Lambda_i^T \mathcal{K} \Lambda_j = 0$ e $Q^T \Lambda_i = 0$, corrispondenti a perturbazioni massive che non violano la simmetria TR esplicitamente o spontaneamente. L' N -esimo vettore Λ determina una perturbazione TR invariante se e solo se $\mathcal{R} = p Q^T \mathcal{K}^{-1} \chi$ è pari. Questo completa la prova dell'argomento di stabilità (5.32) per la parte necessaria.

5.3 Stabilità degli stati di bordo: argomento del flusso

Il precedente argomento ha dimostrato che quando $\mathcal{R} = p Q^T \mathcal{K}^{-1} \chi$ è dispari non è possibile introdurre un numero sufficiente di perturbazioni massive al bordo. L'argomento però è limitato allo studio delle hamiltoniane. Potrebbero esistere altri meccanismi per distruggere gli stati di bordo senza violare le simmetrie del problema. Quindi la condizione \mathcal{R} dispari non è sufficiente ad assicurare stati di bordo robusti.

La sufficienza della condizione si dimostra con argomenti generali come l'inserzione di flussi elettromagnetici e le proprietà della simmetria TR che riprendono la classificazione \mathbb{Z}_2 nel caso libero. In particolare è introdotto il concetto di “pompa di spin”, ovvero la possibilità di generare ed eventualmente prelevare un valore non nullo dello spin al bordo del sistema. La pompa di spin implica l'esistenza degli stati a massa nulla di bordo, e quindi la presenza di una fase topologica di bulk. L'argomento è stato formulato per la classificazione \mathbb{Z}_2 degli isolanti topologici liberi [53] [56] [57] e generalizzato al caso interagente, mostrando che la pompa di spin esiste se l'indice \mathcal{R} (5.32) è dispari.

Pompa di spin per elettroni non interagenti: argomento di Fu-Kane

Esponiamo l'argomento [53] [56] [57] nel caso più semplice di elettroni con spin up e down che formano ognuno stati QHE con chiralità opposte e $\nu = 1$, corrispondente a un modello QSHE in cui la matrice $\mathcal{K} = \mathbb{I}_{2 \times 2}$ e $\mathcal{R} = p Q^T \mathcal{K}^{-1} \chi = -1$. Intendiamo dimostrare che devono esistere stati a massa nulla robusti.

Consideriamo questo sistema posto in una geometria anulare come quella di Fig.(3.1). Poiché lo spin J_z è conservato, possiamo ripetere l'argomento di Laughlin del flusso spettrale separatamente per le due diverse proiezioni dello spin. Quando un quanto di flusso Φ_0 è inserito adiabaticamente al centro dell'anello, il sistema Hall con spin up trasla verso il bordo esterno (R) di una lunghezza pari a un orbitale di Landau, mentre il sistema Hall con spin down trasla della stessa quantità verso il bordo interno (L), Fig.(5.1).

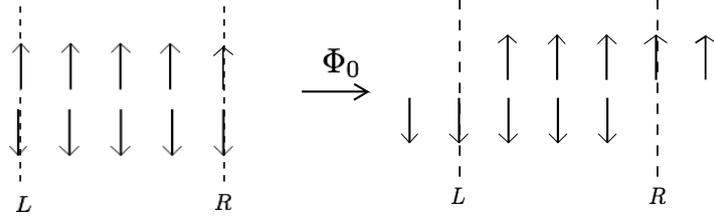


Figura 5.1: Nel QSHE l'inserzione di un flusso Φ_0 attraverso l'anello causa uno shift degli spin up e down verso il bordo (R) e (L) rispettivamente. L'eccitazione prodotta al bordo ha carica complessivamente nulla, mentre uno spin $\Delta J_z^{(R)} = 1$ e $\Delta J_z^L = -1$ si è accumulato ai bordi (R) e (L) rispettivamente. Le linee tratteggiate indicano la posizione dell'energia di Fermi dei sistemi di bordo.

Il flusso spettrale in ogni sistema QHE è garantito dalla conservazione della carica $U(1)_{em}$. Data l'invarianza sotto l'inversione temporale la carica che complessivamente è pompata a ogni bordo è nulla

$$Q_R^\uparrow + Q_R^\downarrow = 1 - 1 = 0, \quad Q_L^\uparrow + Q_L^\downarrow = -1 + 1 = 0. \quad (5.50)$$

Poichè J_z è conservato possiamo definire una pompa di spin dalla differenza tra le conducibilità Hall (4.21)

$$\sigma_{SH} = \sigma_H^\uparrow - \sigma_H^\downarrow = 2\frac{e^2}{h}, \quad (5.51)$$

che evidenzia il trasferimento di spin dal bordo interno a quello esterno di una quantità (in unità \hbar)

$$\Delta J_z = \frac{1}{2}(Q_R^\uparrow - Q_R^\downarrow) = 1. \quad (5.52)$$

L'hamiltoniana di bulk di un isolante topologico è una funzione del flusso magnetico Φ attraverso l'anello, e soddisfa alle due proprietà di periodicità (gauge invarianza) e di trasformazione sotto TR

$$H[\Phi + \Phi_0] = H[\Phi], \quad (5.53)$$

$$H[-\Phi] = \mathcal{T}H[\Phi]\mathcal{T}^{-1}. \quad (5.54)$$

Nel corso dell'inserzione adiabatica di un flusso la simmetria TR è rotta. Intuitivamente si può capire dalla Fig.(5.1), poichè durante l'inserzione del flusso ogni spin up non ha più il partner TR spin down. Le condizioni (5.53) ed (5.54) assicurano che l'hamiltoniana del sistema è TR -invariante ai due distinti valori $\Phi = 0$ e $\Phi = \Phi_0/2$, ovvero

$$H[0] = \mathcal{T}H[0]\mathcal{T}^{-1}, \quad H[\Phi_0/2] = \mathcal{T}H[\Phi_0/2]\mathcal{T}^{-1}. \quad (5.55)$$

Consideriamo adesso la pompa di spin per l'inserzione di mezzo flusso $\Phi = \Phi_0/2$. L'hamiltoniana $H[\Phi_0/2] \neq H[0]$ e quindi lo stato fondamentale $|\Omega\rangle$ si evolve in uno stato eccitato $|\frac{1}{2}, +\rangle$ corrispondente ad un'eccitazione al bordo neutra con spin $\Delta J = \frac{1}{2}$

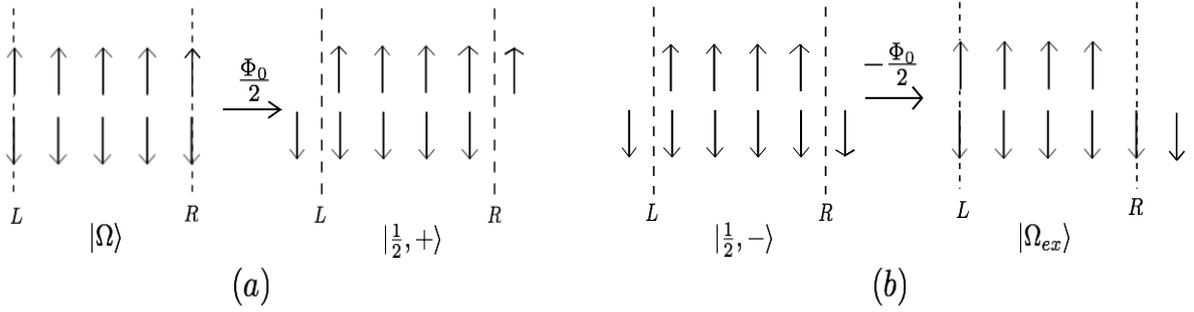


Figura 5.2: (a): Nel QSHE l'inserzione adiabatica di un flusso $\Phi_0/2$ crea ai bordi (R) e (L) lo stato $|\frac{1}{2}, +\rangle$, un'eccitazione complessivamente neutra con spin $\Delta J_z^{(R)} = 1/2$ e $\Delta J_z^{(L)} = -1/2$. (b): Lo stato $|\frac{1}{2}, -\rangle$ è ottenuto ribaltando lo spin up in uno down e, inserendo un flusso $-\Phi_0/2$, si ottiene lo stato eccitato $|\Omega_{ex}\rangle$.

Fig.(5.2)(a).

Poichè l'hamiltoniana a $\Phi_0/2$ è TR -invariante, possiamo applicare il teorema locale di Kramers al bordo (R) e concludere che lo stato eccitato fermionico così ottenuto deve appartenere ad un doppietto degenere $|\frac{1}{2}, \pm\rangle$. L'altro stato $|\frac{1}{2}, -\rangle$ del doppietto, quello con spin ribaltato (al bordo (R)) come in Fig.(5.2)(b), deve necessariamente essere un'eccitazione di bordo con energia $O(1/R)$ poichè il lavoro fatto per inserire il flusso $\Phi_0/2$ si deve annullare nel limite termodinamico. Riportando lo stato $|\frac{1}{2}, -\rangle$ adiabaticamente a flusso nullo ci permette di concludere che $H[0]$ possiede uno stato eccitato $|\Omega_{ex}\rangle$ con $E \simeq O(1/R)$ ortogonale allo stato fondamentale $|\Omega\rangle$ (sempre dal teorema di Kramers), Fig.(5.2)(b). Abbiamo quindi dimostrato l'esistenza di un'eccitazione di bordo in $H[0]$ quando la pompa di spin crea un'eccitazione $\Delta J = 1/2$ in $H[\Phi_0/2]$.

L'argomento di Fu-Kane può essere generalizzato al sistema con N modi fermionici al bordo: nel caso di N dispari otteniamo un doppietto degenere di Kramers a $\Phi_0/2$ e quindi eccitazioni con energia $E \simeq O(1/R)$ a $\Phi = 0$. Nel caso di N pari invece, il teorema di Kramers non può essere invocato e quindi l'argomento non si applica. Abbiamo quindi trovato la parte sufficiente del criterio di stabilità (5.32) delle eccitazioni di bordo del QSHE. Nel seguito vogliamo spiegare che l'argomento della pompa di spin per l'esistenza di eccitazioni al bordo resta valido in presenza di interazioni spin-orbita (SOC) e quindi per ogni sistema isolante topologico.

Negli isolanti topologici non è possibile ignorare un termine di accoppiamento spin-orbita che introduce spin flip tra i due sistemi QHE. In questo caso la simmetria $U(1)_s$ di spin è persa, e i due sistemi di spin up e down non definiscono più due conducibilità Hall separatamente conservate e quantizzate. I lavori [53] [56] [57] mostrano che la simmetria TR dell'hamiltoniana di bulk e il numero di coppie di stati di bordo permettono di continuare a definire una pompa di spin. Possiamo schematizzare l'isolante topologico con il modello precedente QSHE con due fluidi Hall contropropaganti e filling $\nu = 1$, in cui gli stati al bordo destro (R) sono scorrelati rispetto a quelli del

bordo sinistro (L). Nonostante questo, il flusso $\Phi = \Phi_0/2$ causa una polarizzazione dei bordi Fig.(5.3). Concentrandosi sul bordo (R), gli spin up si muovono verso l'esterno di

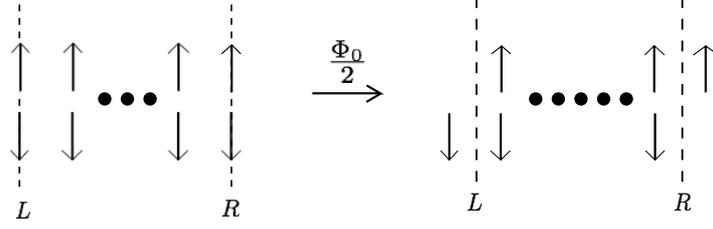


Figura 5.3: Inserzione di un flusso $\Phi = \Phi_0/2$ attraverso l'anello nell'isolante topologico. I bordi del sistema sono scorrelati a causa della SOC, ma l'inserzione di flusso ne causa una polarizzazione. Ai bordi non c'è eccesso di carica, mentre quello di spin è $\Delta J_z^{(R)} = \frac{1}{2}(Q_R^\uparrow - Q_R^\downarrow) = \frac{1}{2}$, e $\Delta J_z^{(L)} = \frac{1}{2}(Q_L^\uparrow - Q_L^\downarrow) = -\frac{1}{2}$.

mezzo orbitale di Landau, mentre gli spin down si muovono verso l'interno della stessa quantità. Rispetto alla configurazione dello stato fondamentale, al bordo la carica rimane complessivamente nulla. Lo spin è invece cambiato di $\Delta J_z^{(R)} = 1/2$. Poiché l'hamiltoniana a $\Phi_0/2$ è TR -invariante e l'interazione SOC rispetta questa simmetria, il teorema locale di Kramers (4.12) implica l'esistenza al bordo (R) di un doppietto di stati degeneri e ortogonali.

Facciamo l'importante osservazione riguardante la *parità di spin* [56]:

$$P_s = (-1)^{2J_R^z} = (-1)^{Q_R^\uparrow - Q_R^\downarrow}, \quad (5.56)$$

definita in questo caso per il bordo (R) (la stessa osservazione vale anche per quello (L)). In ultima analisi, la possibilità di definire una pompa di spin non banale dipende se c'è stata una variazione di P_s tra lo stato fondamentale a flusso nullo $\Phi = 0$ e lo stato a flusso $\Phi_0/2$. Partendo infatti dallo stato fondamentale a $\Phi = 0$, abbiamo $P_s = (-1)^{2J_R^z} = 1$, ovvero in ogni bordo il numero di fermioni è $N_f = 0 \pmod{2}$. Quando raggiungiamo lo stato a flusso $\Phi_0/2$, punto in cui l'hamiltoniana è TR -invariante, la parità di spin è cambiata in $P_s = (-1)^{2J_R^z} = -1$, poiché a ogni bordo si è accumulato un numero dispari di spin in unità $\hbar/2$. Questo permette l'applicazione del teorema locale di Kramers, concludendo che a ogni bordo esiste un doppietto di Kramers di stati degeneri e ortogonali.

Nel caso di un numero pari di fermioni la parità di spin a $\Phi = \Phi_0/2$ non cambia rispetto allo stato fondamentale a flusso nullo. Non essendo soddisfatte le ipotesi del teorema locale di Kramers, non esistono doppietti di Kramers degeneri. Gli stati che otteniamo a $\Phi_0/2$ non sono protetti, infatti con l'analisi microscopica abbiamo visto che possono prendere massa. Non esiste in questo caso nessuna eccitazione di bordo, ovvero nessuna pompa di spin che permette di trasmettere o prelevare lo spin dal sistema, il quale si riduce a un banale isolante.

Abbiamo in definitiva ritrovato il criterio \mathbb{Z}_2 nel caso libero, esprimibile in termini della variazione di una quantità \mathbb{Z}_2 come la parità di spin P_s (5.56), e riconducibile al numero delle coppie di stati di bordo come accennato nella Sez.(4.3.3).

Analisi numeriche [53] [56] di modelli TR -invarianti, con un hamiltoniana di bulk che rispetta le (5.53) e (5.54) e in cui è presente un termine di SOC che viola esplicitamente la conservazione dello spin, mostrano che lo spettro energetico di singola particella, in funzione del flusso inserito e associato a un bordo del sistema, è analogo a quello della Fig.(4.4). La banda di valenza e quella di conduzione, separate da un gap di energia finito, sono connesse da due livelli di chiralità opposta, incontrandosi e assumendo la stessa energia quando $\Phi \sim \Phi_0/2$. Questi sono gli stati con chiralità opposte presenti a un dato bordo.

Pompa di spin nel caso interagente: argomento di Levin-Stern

La modifica principale per l'estensione dell'argomento di flusso al caso interagente è l'esistenza dell'ordine topologico di Wen, ovvero l'esistenza di quasiparticelle con carica e statistica frazionaria. Prendiamo per esempio il modello QSHE in cui gli elettroni con spin up e down sono in stati di Laughlin con chiralità opposte e $\nu = 1/3$. Questo coincide col modello (5.26) in cui $p = 3$. Abbiamo visto al Cap.(3) che la funzione di partizione dell'anello coinvolge un numero $p = 3$ di termini, che corrispondono ai settori con carica frazionaria $Q_R = -Q_L = 0, 1/3, 2/3$. In ciascuno di questi settori esiste uno stato fondamentale $|\Omega_1\rangle$ e $|\Omega_2\rangle$ raggiungibili da $|\Omega\rangle$ inserendo un flusso Φ_0 e $2\Phi_0$ rispettivamente. I tre stati sono quasi degeneri poichè l'aumento di energia Δ del sistema a molti corpi per l'inserzione di un flusso è $O(1/R)$, andando a zero nel limite termodinamico. Allo stesso tempo i tre settori sono ortogonali. Nello studio della funzione di partizione l'inserzione di un flusso Φ_0 trasforma i caratteri K_λ , con $\lambda = 0, 1, 2$, come (trasformazione V (3.50))

$$K_0 \rightarrow K_1 \rightarrow K_2 \rightarrow K_0. \quad (5.57)$$

Nel caso del QSHE questa trasformazione si traduce nel trasferimento di un'eccitazione con carica $1/3$ e spin up dal bordo (L) al bordo (R), e di un'eccitazione con carica $1/3$ e spin down dal bordo (R) a quello (L).

Questa degenerazione uguale all'ordine topologico p è diversa da quella considerata nell'argomento di flusso del paragrafo precedente. La degenerazione di Kramers infatti riguarda le eccitazioni elettroniche in ogni settore di carica frazionaria fissata. Il flusso che dobbiamo inserire per poter ripetere i ragionamenti della pompa di spin ammonta a $p\Phi_0/2$, con p l'ordine topologico del sistema. Osserviamo che l'hamiltoniana a tale flusso è TR -invariante:

$$H\left[\frac{p\Phi_0}{2}\right] = \mathcal{T}H\left[\frac{p\Phi_0}{2}\right]\mathcal{T}^{-1}. \quad (5.58)$$

Procedendo come nel caso libero, dimostriamo che lo stato $|\frac{1}{2}, +\rangle$, ottenuto inserendo il flusso $p\Phi_0/2$, forma con lo stato $|\frac{1}{2}, -\rangle$ un doppietto degenero di Kramers (locale) quando l'indice $\mathcal{R} = pQ^T\mathcal{K}^{-1}\chi$ è dispari. Sotto queste ipotesi è quindi sufficiente verificare che sono soddisfatte le condizioni (4.10) (4.11) a entrambe i bordi. Osserviamo che lo stato $|\frac{1}{2}, -\rangle$ si ottiene da $|\frac{1}{2}, +\rangle$ inserendo un flusso $\Phi = -p\Phi_0$. Consideriamo a tal fine la teoria di bordo (5.14) e concentriamoci sul bordo sinistro.

L'inserzione adiabatica di un flusso $\Phi = -p\Phi_0$ può essere implementata applicando nel piano (x, y) dell'anello un potenziale vettore lentamente variabile nel tempo $(A_x, A_y) = (0, f(t)/L)$, dove $f(-\infty) = 0$ e $f(+\infty) = -2\pi p$ in unità $\hbar = c = e = 1$. Integrando in x le equazioni del moto ottenute dall'azione di bordo e definendo $\rho_I \equiv \frac{1}{2\pi} \int dx \partial_x \Phi_I$, per $I = 1, \dots, 2N$, la forma del potenziale vettore dà la relazione

$$\frac{d\rho}{dt} = -\mathcal{K}^{-1} \frac{Q}{2\pi} \frac{df}{dt}. \quad (5.59)$$

L'effetto dell'inserzione adiabatica del flusso è perciò

$$\rho \rightarrow \rho + p \cdot \mathcal{K}^{-1} Q. \quad (5.60)$$

Definendo la quantità

$$S_L(\Lambda) = \int \frac{dx}{\sqrt{L}} e^{i\Theta(\Lambda)}, \quad \text{con } \Theta(\Lambda) = \Lambda^T \mathcal{K} \Phi, \quad (5.61)$$

e utilizzando le regole di commutazione (5.15) per la teoria di bordo, deriviamo la seguente relazione di commutazione

$$[\rho, S_L(\Lambda)] = \Lambda \cdot S_L(\Lambda). \quad (5.62)$$

Comparando la (5.60) con la (5.62) concludiamo che l'inserzione adiabatica del flusso è implementata dall'operatore $S_L(p \cdot \mathcal{K}^{-1} Q) = S_L(\Lambda_c)$. Includendo anche l'effetto sul bordo destro, il legame tra i due stati $|\frac{1}{2}, +\rangle$ e $|\frac{1}{2}, -\rangle$ è dato dalla relazione

$$|\frac{1}{2}, -\rangle = S_L(\Lambda_c) S_R(-\Lambda_c) |\frac{1}{2}, +\rangle. \quad (5.63)$$

Poichè S_L agisce in prossimità del bordo sinistro e S_R di quello destro, l'Eq.(5.63) coincide con la condizione (4.10). La trasformazione dell'operatore $S_L(\Lambda_c)$ sotto \mathcal{T} è ottenuta usando la (5.34),

$$\mathcal{T}^{-1} S_L(\Lambda_c) \mathcal{T} = S_L(-\Lambda_c) e^{i\pi\mathcal{R}} = -S_L(-\Lambda_c), \quad (5.64)$$

essendo \mathcal{R} dispari. Otteniamo perciò la seguente trasformazione

$$\mathcal{T} S_L \mathcal{T} S_L |\frac{1}{2}, +\rangle = -S_L(-\Lambda_c) S_L(\Lambda_c) |\frac{1}{2}, +\rangle = -|\frac{1}{2}, +\rangle, \quad (5.65)$$

che coincide con la condizione (4.11) per il bordo sinistro. Una condizione analoga vale per quello destro. Abbiamo perciò dimostrato che quando \mathcal{R} è dispari sono verificate le condizioni (4.10) e (4.11), e lo stato $|\frac{1}{2}, +\rangle$ possiede degenerazione locale di

Kramers in corrispondenza dei bordi dell'anello, che non può essere rotta da nessuna perturbazione TR -invariante. Possiamo quindi definire una pompa di spin che permette l'esistenza a flusso nullo degli stati di bordo che appartengono allo stesso settore topologico dello stato fondamentale $|\Omega\rangle$. Questi manifestano anche nel caso interagente la fase topologica non banale del bulk.

In conclusione abbiamo dimostrato, con analisi microscopiche e inserzioni di flusso, che un generico isolante abeliano TR -invariante (5.25) possiede stati di bordo robusti contro qualunque perturbazione TR -invariante *se e solo se* l'indice \mathcal{R} è dispari. La classificazione \mathbb{Z}_2 è quindi estesa anche al caso di isolanti topologici interagenti di tipo abeliano.

Capitolo 6

Funzioni di partizione negli isolanti topologici abeliani e criteri di stabilità

Nello studio del QHE al Cap.(3), abbiamo mostrato che la funzione di partizione della CFT delle eccitazioni di bordo ha un ruolo fondamentale nel descrivere gli stati presenti nello spazio di Hilbert del sistema. Nella geometria dell'anello, questa funzione contiene una somma di caratteri chirali e antichirali delle rappresentazioni conformi per ciascun bordo ed è invariante per trasformazioni del gruppo modulare Γ_θ . Abbiamo visto che l'anomalia chirale $U(1)$ della carica elettrica si manifesta nel flusso spettrale di ciascun carattere $\Theta_\lambda \rightarrow \Theta_{\lambda+t}$, che trasporta una carica da un bordo all'altro corrispondente alla conducibilità Hall.

Unendo due sistemi QHE con opposte chiralità possiamo modellizzare il QSHE e discutere la corrispondente funzione di partizione degli stati di bordo, contenente due copie della CFT. Inoltre possiamo descrivere un isolante topologico TR -invariante immaginando di aggiungere interazioni di spin-orbita (SOC). Queste distruggono gli stati estesi nel bulk del sistema e rompono la simmetria $U(1)_{em} \times U(1)_s$ di carica e spin del QSHE a $U(1)_{em} \times \mathbb{Z}_2$, dove \mathbb{Z}_2 è la parità di spin.

Un'ulteriore fase topologica, il superconduttore topologico, può essere modellizzata da CFT di eccitazioni di bordo con spin up e down che sono fermioni di Majorana con simmetria $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, corrispondente alla rottura della simmetria di carica e di spin [78].

La stabilità di isolanti e superconduttori topologici è stata affrontata nella letteratura recente in termini della robustezza degli stati di bordo in due modi diversi. Nel caso dell'isolante topologico (Cap.(5)) il criterio di Fu-Kane [56] (esteso al caso interagente da Levin-Stern [75]) si basa nella risposta della teoria quando si aggiunge un numero semintero di flussi di campo magnetico, realizzando la cosiddetta pompa di spin. Nel caso in cui si crei al bordo uno stato di spin semintero, il teorema di Kramers implica una degenerazione che assicura l'esistenza di stati di bordo a massa nulla e quindi la stabilità della fase topologica. Questo criterio è associato a una carica topologica \mathbb{Z}_2 corrispondente alla parità dello spin pompato.

Nel caso dei superconduttori topologici interagenti, Ryu-Zhang [78] hanno formulato un altro criterio di stabilità basato sulla presenza di anomalia gravitazionale. Riprendendo lo studio delle funzioni di partizione del QHE, hanno mostrato che l'assenza di questa anomalia, ovvero l'invarianza modulare della funzione di partizione, è raggiunta nel caso di $N = 8$ fermioni di Majorana. L'invarianza modulare della CFT di bordo corrisponde ad una instabilità del superconduttore topologico interagente $N = 8$, in accordo col risultato ottenuto da Kitaev ed altri autori [79].

In questo capitolo, attraverso lo studio delle funzioni di partizione della CFT al bordo mostreremo che questi due criteri proposti in letteratura sono equivalenti e riconducibili alla proprietà di invarianza modulare. Nell'isolante topologico, troveremo che la pompa di spin corrisponde ad un'anomalia \mathbb{Z}_2 della CFT di bordo, residuo dell'anomalia di spin del QSHE. Questa anomalia impedisce la costruzione di una funzione di partizione invariante modulare sotto l'intero gruppo Γ . Partendo dal QSHE introdurremo due settori della teoria, di Neveu-Schwarz e Ramond, collegati dalla pompa di spin e caratterizzati da un numero topologico \mathbb{Z}_2 . Nel caso che i vuoti della teoria nei due settori hanno parità di spin opposta troveremo un'ostruzione all'invarianza modulare. Mostreremo quindi che l'invarianza modulare, soggetta ad altre richieste di simmetria del sistema, caratterizza la stabilità (instabilità) delle fasi topologiche di isolanti e superconduttori.

6.1 Funzioni di partizione per teorie $c=1$

6.1.1 Settori di Neveu-Schwarz e Ramond

Consideriamo ancora l'esempio più semplice di un isolante topologico ottenuto dall'unione di due stati FQHE di Laughlin con $\nu = 1/p$, con p dispari, Sez.(5.1.1). Consideriamo tale sistema nella geometria dell'anello, analogamente per quanto fatto nel caso Hall nel Cap.(3) e studiamo il problema della stabilità degli stati di bordo dal punto di vista della CFT. Nel caso del FQHE, per ogni bordo dell'anello possiamo introdurre i caratteri chirali dell'algebra di Virasoro $c = 1$ estesa dalla corrente $\widehat{U(1)}$, ottenuti a partire dallo spettro CFT con condizioni al contorno di Neveu-Schwarz (3.26). Questi hanno l'espressione (3.49):

$$K_\lambda(\tau, \zeta) = \exp\left(-\frac{\pi}{p} \frac{(Im\zeta)^2}{Im\tau}\right) \frac{1}{\eta(q)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp\left(2\pi i \left[\frac{\tau}{2p} (pk + \lambda)^2 + \frac{\zeta}{p} (pk + \lambda) \right]\right), \quad (6.1)$$

corrispondenti a carica frazionaria $Q = \lambda/p + \mathbb{Z}$. La funzione di partizione invariante modulare è ottenuta accoppiando i settori del bordo chirale esterno con quelli antichirali del bordo interno nel seguente modo, Eq.(3.54):

$$Z_{\text{anello}}^{\text{QHE}} = \sum_{\lambda=0}^{p-1} K_\lambda \bar{K}_\lambda^c. \quad (6.2)$$

In un isolante topologico i termini di interazione di spin-orbita consentono spin-flip tra i due sistemi QHE con opposte chiralità, come visto nei Cap.(4) e (5). La simmetria $U(1)_s$ di spin è rotta a \mathbb{Z}_2 e non esiste una conducibilità Hall di spin quantizzata. All'interno dell'anello non ci sono stati estesi e possiamo considerare indipendenti i due bordi. D'altra parte l'introduzione di flusso di campo magnetico non comporta uno spostamento di carica tra i bordi, perchè la conducibilità Hall è nulla. Lo studio della stabilità dei modi di bordo può quindi essere fatta concentrandosi su un solo bordo, ad esempio quello esterno.

Esaminiamo le simmetrie del problema. La teoria di bordo di un isolante topologico è formata da due fluidi Hall con chiralità opposta ed è invariante per inversione temporale TR . La simmetria $U(1)_{em}$ impone la conservazione della carica che deve assumere valori interi ad ogni bordo indipendentemente, ovvero:

$$Q^\uparrow + Q^\downarrow \in \mathbb{Z}. \quad (6.3)$$

Questa condizione equivale alla condizione U (3.47) del QHE. La rottura della simmetria $U(1)_s$ di spin alla simmetria discreta \mathbb{Z}_2 implica che gli stati elettronici hanno associato una parità di spin, definita nel Cap. (5) come

$$P_s = (-1)^{Q^\uparrow - Q^\downarrow} = (-1)^{2J}. \quad (6.4)$$

Possiamo quindi associare i caratteri chirali carichi $\widehat{U(1)}$ nell'Eq. (6.1) alle eccitazioni di singolo bordo nel seguente modo

- $K_\lambda(\tau, \zeta) \rightarrow$ carattere chirale per i modi di bordo con spin up \uparrow ,
- $\bar{K}_\lambda(\bar{\tau}, \bar{\zeta}) \rightarrow$ carattere antichirale per i modi con spin down \downarrow ,

Ne segue che la funzione di partizione per un solo bordo dell'isolante topologico ha ancora la forma (6.2), che è formalmente uguale a quella del QHE sui due bordi dell'anello. Questa funzione di partizione è invariante sotto T^2 e S . La trasformazione V (3.48) descrive ancora l'introduzione di un quanto di flusso Φ_0 ed il flusso spettrale

$$V : K_\lambda(\tau, \zeta) \rightarrow K_\lambda(\tau, \zeta + \tau) \sim K_{\lambda+1}(\tau, \zeta). \quad (6.5)$$

La funzione di partizione dell'isolante topologico è invariante sotto V . Infatti la teoria di bordo dell'isolante topologico non ha anomalie chirali di carica $U(1)_{em}$ da cui segue l'azzeramento della conducibilità Hall. Questo è una conseguenza dell'invarianza TR .

La teoria manifesta però l'anomalia \mathbb{Z}_2 legata alla variazione della parità di spin del vuoto (stato fondamentale). Cominciamo col determinare la parità di spin del vuoto della (6.2), che chiameremo nel seguito settore di Neveu-Schwarz. A tal fine è utile riscrivere la (6.2) introducendo $q = \exp(2\pi i\tau)$ e $w = \exp(2\pi i\zeta)$ come segue:

$$Z^{NS} = \frac{e^{-\frac{2\pi(I m \zeta)^2}{p I m \tau}}}{|\eta|^2} \sum_{\lambda=0}^{p-1} \sum_{k, \bar{k} \in \mathbb{Z}} q^{\frac{(pk+\lambda)^2}{2p}} \bar{q}^{\frac{(p\bar{k}+\lambda)^2}{2p}} w^{\frac{pk+\lambda}{p}} \bar{w}^{\frac{p\bar{k}+\lambda}{p}}. \quad (6.6)$$

Le proprietà del vuoto sono descritte dal settore $\lambda = 0$, e si ottengono sviluppando la (6.6) nei primi valori di (k, \bar{k}) attorno a $(0, 0)$, corrispondenti ai valori più piccoli dei pesi conformi. Otteniamo

$$Z^{NS} \propto \frac{1}{|\eta(q)|^2} \left\{ 1 + q^{p/2}w + q^{p/2}w^{-1} + \bar{q}^{p/2}\bar{w} + \bar{q}^{p/2}\bar{w}^{-1} + \dots \right\}. \quad (6.7)$$

I termini della (6.7) descrivono il vuoto e gli stati corrispondenti all'aggiungere o togliere elettroni con spin up o down al bordo. Lo stato fondamentale è ottenuto prendendo $k = \bar{k} = 0$. Graficamente è rappresentato in Fig.(6.1)(a). Poichè al bordo non c'è eccesso o difetto di carica, ovvero $Q^\uparrow + Q^\downarrow = 0$, lo stato di vuoto del settore $|\Omega\rangle_{NS}$ ha parità di spin positiva (bosonico)

$$(-1)^{Q_R^\uparrow - Q_R^\downarrow} |\Omega\rangle_{NS} = |\Omega\rangle_{NS}. \quad (6.8)$$

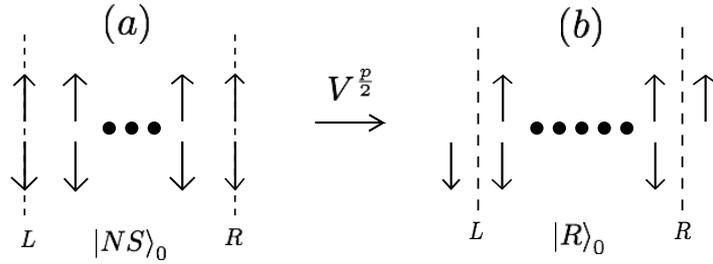


Figura 6.1: (a): Stato fondamentale nel settore Neveu-Schwarz per teorie $c=1$. (b): La trasformazione $V^{\frac{p}{2}}$ connette lo stato fondamentale nel settore di Neveu-Schwarz con quello nel settore di Ramond.

Abbiamo osservato nel Cap.(5) che possiamo definire una pompa di spin per l'isolante topologico TR -invariante che consiste nell'inserzione di un flusso $\Phi = p\Phi_0/2$, con p l'ordine topologico di Wen, poichè per questo valore del flusso l'hamiltoniana di bulk è invariante per inversione temporale

$$H\left[\frac{p\Phi_0}{2}\right] = \mathcal{T}H\left[\frac{p\Phi_0}{2}\right]\mathcal{T}^{-1}. \quad (6.9)$$

Nel caso dell'isolante topologico con un modo di bordo ($c = 1$) abbiamo dimostrato che in corrispondenza di questo flusso si ha degenerazione locale di Kramers (4.12). Ad ogni bordo esistono due stati degeneri in energia, che sono uno il partner TR dell'altro. Poichè entrambe contengono un numero dispari di fermioni formano un doppietto di Kramers locale la cui degenerazione non può essere distrutta da nessuna perturbazione TR -invariante.

Possiamo ritrovare questo risultato nello studio della funzione di partizione, osservando che l'inserzione di un flusso $\Phi = p\Phi_0/2$ consiste nel fare la trasformazione $V^{\frac{p}{2}}$ sui caratteri definita come segue

$$V^{\frac{p}{2}} : K_\lambda^{NS}(\tau, \zeta) \rightarrow K_\lambda^{NS}(\tau, \zeta + \tau\frac{p}{2}) \propto K_{\lambda+\frac{p}{2}}^{NS}(\tau, \zeta). \quad (6.10)$$

Definiamo quindi il carattere chirale nel settore di Ramond come la quantità:

$$\begin{aligned} K_\lambda^R(\tau, \zeta) &= K_{\lambda+\frac{p}{2}}^{NS}(\tau, \zeta) \\ &= \exp\left(-\frac{\pi}{p} \frac{(Im\zeta)^2}{Im\tau}\right) \frac{1}{\eta(q)} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \exp\left(2\pi i \left[\frac{\tau}{2p} (pk + \lambda + \frac{p}{2})^2 + \frac{\zeta}{p} (pk + \lambda + \frac{p}{2}) \right]\right). \end{aligned} \quad (6.11)$$

La trasformazione $V^{\frac{p}{2}}$ trasforma quindi il carattere chirale del settore di Neveu-Schwarz in quello di Ramond e viceversa

$$V^{\frac{p}{2}} : K_\lambda^{NS}(\tau, \zeta) \rightarrow K_\lambda^R(\tau, \zeta) \rightarrow K_{\lambda+p}^{NS}(\tau, \zeta), \quad (6.12)$$

come descritto in maggior dettaglio in App.(A.1). Possiamo quindi definire la funzione di partizione del settore di Ramond accoppiando i caratteri chirali e antichirali per gli spin up e down

$$Z^R = \sum_{\lambda=0}^{p-1} K_\lambda^R \bar{K}_\lambda^{Rc}. \quad (6.13)$$

Determiniamo adesso la parità di spin del vuoto di Ramond. Come nel caso precedente consideriamo i primi termini nel settore $\lambda = 0$. Sviluppando in (k, \bar{k}) otteniamo

$$\begin{aligned} Z^R &= \frac{e^{-\frac{2\pi(Im\zeta)^2}{pIm\tau}}}{|\eta|^2} \sum_{k, \bar{k} \in \mathbf{Z}} q^{\frac{1}{2p}(pk+\lambda+\frac{p}{2})^2} w^{\frac{1}{p}(pk+\lambda+\frac{p}{2})} \bar{q}^{\frac{1}{2p}(p\bar{k}+\lambda+\frac{p}{2})^2} \bar{w}^{\frac{1}{p}(p\bar{k}+\lambda+\frac{p}{2})} \\ &\propto \frac{1}{|\eta(q)|^2} \left\{ q^{p/8} w^{1/2} \bar{q}^{p/8} \bar{w}^{1/2} + q^{p/8} w^{1/2} \bar{q}^{p/8} \bar{w}^{-1/2} \right. \\ &\quad \left. + q^{p/8} w^{-1/2} \bar{q}^{p/8} \bar{w}^{1/2} + q^{p/8} w^{-1/2} \bar{q}^{p/8} \bar{w}^{-1/2} \dots \right\}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Prendendo i valori ($k = \bar{k} = 0$) troviamo lo stato fondamentale $|\Omega\rangle_R$ nel settore di Ramond corrispondente all'evoluzione dello stato fondamentale $|\Omega\rangle_{NS}$ del settore di Neveu-Schwarz:

$$|\Omega\rangle_R \Leftrightarrow q^{p/8} w^{1/2} \bar{q}^{p/8} \bar{w}^{1/2}. \quad (6.15)$$

Rappresentiamo questo stato in Fig.(6.1)(b), osservando che la trasformazione $V^{\frac{p}{2}}$ polarizza il bordo spostando le cariche con spin up verso l'esterno di $p/2$ orbitali di Landau, e quelle con spin down verso l'interno della stessa quantità. La carica spostata nel settore chirale a seguito della trasformazione $V^{\frac{p}{2}}$ è $\Delta Q = \frac{1}{2}$, indipendente dal valore di p . La carica del vuoto di Ramond è quindi nulla

$$Q = Q^\uparrow + Q^\downarrow = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0, \quad (6.16)$$

mentre lo spin accumulato è

$$2J = Q^\uparrow - Q^\downarrow = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \quad (6.17)$$

La parità di spin dello stato fondamentale nel settore di Ramond è dunque

$$(-1)^{Q^\dagger - Q^\downarrow} |\Omega\rangle_R = -|\Omega\rangle_R, \quad (6.18)$$

che corrisponde ad un'eccitazione neutra fermionica. Abbiamo quindi ottenuto che lo stato fondamentale $|\Omega\rangle_R$ ha parità di spin opposta rispetto a quella dello stato $|\Omega\rangle_{NS}$.

Possiamo interpretare questa proprietà come la presenza di una anomalia \mathbb{Z}_2 nella teoria $c = 1$, in quanto la simmetria del vuoto sotto l'inversione temporale è cambiata tra $H[0]$ e $H[\Phi_0/2]$ senza che un corrispondente termine di rottura della simmetria sia stato introdotto nell'hamiltoniana. Abbiamo quindi riprodotto nel linguaggio della CFT di bordo i risultati di Fu-Kane sulla pompa di spin e la caratterizzazione \mathbb{Z}_2 degli isolanti topologici, detta "polarizzazione TR ", ottenuta nello studio delle bande elettroniche. Il nostro studio ha mostrato che si tratta di una caratterizzazione del settore di Ramond della CFT del bordo.

Analizzando le funzioni di partizione ((6.7), (6.14)) possiamo ritrovare gli altri passi dell'argomento di Fu-Kane che dimostrano l'esistenza di stati di bordo robusti, quando il vuoto $|\Omega\rangle_R$ ha parità \mathbb{Z}_2 negativa (fermionico).

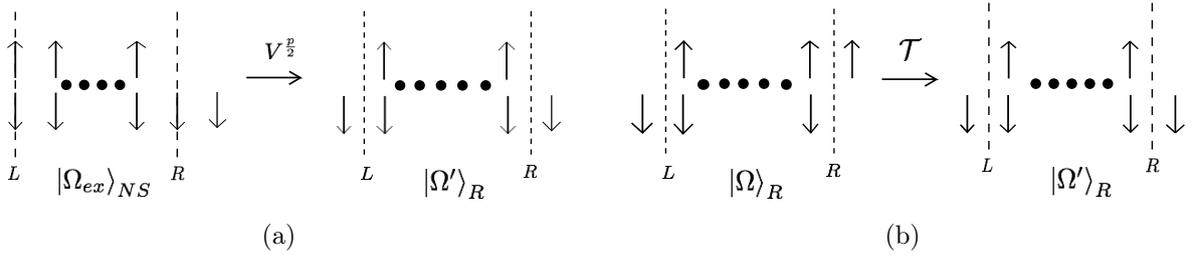


Figura 6.2: (a): Dallo stato eccitato $|\Omega_{ex}\rangle_{NS}$ otteniamo lo stato $|\Omega'\rangle_R$ inserendo un flusso $\Phi = p\Phi_0/2$ corrispondente alla trasformazione $V^{p/2}$. (b): Gli stati $|\Omega\rangle_R$ e $|\Omega'\rangle_R$ sono legati dalla trasformazione TR che inverte lo spin al bordo destro.

Infatti lo stato $|\Omega\rangle_R$ è degenero in energia con lo stato $|\Omega'\rangle_R \Leftrightarrow q^{p/8}\bar{q}^{p/8}w^{-1/2}\bar{w}^{-1/2}$, corrispondente alla scelta $(k = \bar{k} = -1)$ nella (6.14) e ottenuto dal flusso spettrale dello stato eccitato $|\Omega_{ex}\rangle_{NS} \Leftrightarrow q^{p/2}\bar{q}^{p/2}w^{-1}\bar{w}^{-1}$ nel settore Neveu-Schwarz come mostrato in Fig.(6.2)(a). Poichè da $|\Omega\rangle_R$ possiamo trovare $|\Omega'\rangle_R$ invertendo lo spin up in uno down al bordo destro come mostrato in Fig.(6.2)(b), segue che i due stati sono legati dall'inversione temporale. Vale cioè la seguente relazione

$$|\Omega'\rangle_R = \mathcal{T} |\Omega\rangle_R. \quad (6.19)$$

Combinando quest'osservazione con l'invarianza per inversione temporale dell'hamiltoniana al flusso $\Phi = p\Phi_0/2$ Eq.(6.9) e con la parità fermionica di entrambe gli stati $(|\Omega'\rangle_R, |\Omega\rangle_R)$, ne concludiamo che questi formano un doppietto degenero di Kramers locale. Osserviamo l'evoluzione degli stati di minor energia in funzione del flusso inserito

nell'intervallo $\Phi \in [0, p\Phi_0/2]$, rappresentata in Fig.(6.3). Dal settore di Neveu-Schwarz passiamo a quello di Ramond e gli stati corrispondenti all'evoluzione di $|\Omega\rangle_{NS}$ e di $|\Omega_{ex}\rangle_{NS}$ si incontrano al flusso $p\Phi_0/2$ degenerando nei due stati del doppietto di Kramers ($|\Omega'\rangle_R, |\Omega\rangle_R$).

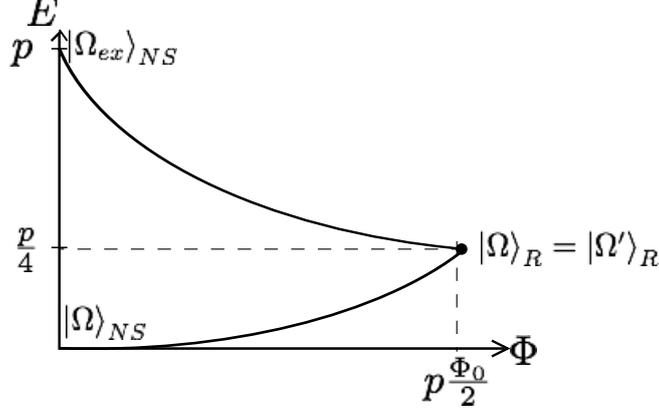


Figura 6.3: Evoluzione degli stati di minima energia dal settore di Neveu-Schwarz a quello di Ramond per teorie $c = 1$.

Questa degenerazione di Kramers locale non può essere rotta da nessuna perturbazione TR -invariante. Le evoluzioni degli stati $|\Omega\rangle_{NS}$ e $|\Omega_{ex}\rangle_{NS}$ devono comunque incontrarsi a $p\Phi_0/2$. A flusso nullo è perciò garantita l'esistenza dello stato eccitato $|\Omega_{ex}\rangle_{NS}$, la cui differenza di energia rispetto allo stato fondamentale si annulla nel limite termodinamico. Abbiamo quindi dimostrato che esiste una eccitazione di bordo che è protetta dall'invarianza TR . In conclusione, la CFT di bordo $c = 1$ possiede una pompa di spin e stati di bordo a massa nulla robusti, la cui origine è nell'anomalia \mathbb{Z}_2 tra i settori di Neveu-Schwarz e Ramond.

Confrontiamo questo risultato col criterio di stabilità di Levin-Stern in Cap.(5), che mostra l'esistenza di stati di bordo robusti quando l'indice

$$\mathcal{R} = p Q^T \mathcal{K}^{-1} \chi = \text{dispari}. \quad (6.20)$$

Nel caso $c = 1$ questa quantità è uguale a $p\nu = 1 = 2\Delta Q$, dove $\Delta Q = 1/2$ è la carica spostata per ogni chiralità dalla trasformazione $V^{\frac{p}{2}}$. Come visto nel Cap.(5) tale criterio predice stati di bordo stabili, in accordo con la nostra analisi.

Abbiamo quindi completamente riderivato il criterio di stabilità \mathbb{Z}_2 degli isolanti topologici TR -invarianti come la proprietà del vuoto di Ramond della teoria conforme. Nel prossimo paragrafo metteremo in relazione il criterio di stabilità con le proprietà di invarianza modulare della funzione di partizione.

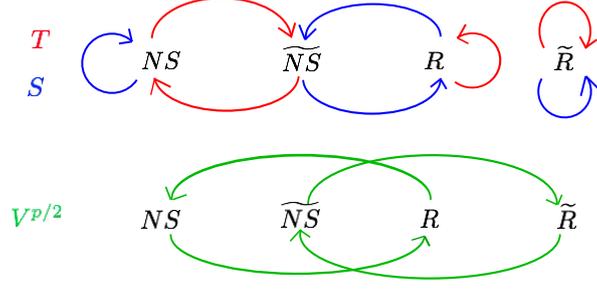


Figura 6.4: Azione delle trasformazioni modulari non banali $(S, T, V^{\frac{p}{2}})$ sulle funzioni di partizione di bordo dei settori $NS, \widetilde{NS}, R, \widetilde{R}$.

6.1.2 Invarianza modulare per teorie $c=1$

Per la costruzione di una funzione di partizione invariante modulare degli isolanti topologici dobbiamo includere nel set di trasformazioni del gruppo modulare anche la trasformazione $V^{\frac{p}{2}}$. Questa trasformazione è importante poichè introduce dei nuovi stati che non sono contenuti nel settore di Neveu-Schwarz, la cui presenza è fondamentale per l'argomento della pompa di spin. Dall'azione delle trasformazioni $(S, T, V^{\frac{p}{2}})$ sui caratteri NS e R risulta che per avere una struttura chiusa sotto l'intero gruppo modulare Γ , ovvero una rappresentazione lineare, sono necessari due ulteriori settori, \widetilde{NS} e \widetilde{R} , Fig.(6.4). I caratteri dei quattro settori sono:

$$K_{\lambda}^{NS}(\tau, \zeta) = \exp\left(-\frac{\pi (Im\zeta)^2}{p Im\tau}\right) \frac{1}{\eta(q)} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \exp\left(2\pi i \left[\frac{\tau}{2p}(pk + \lambda)^2 + \frac{\zeta}{p}(pk + \lambda)\right]\right), \quad (6.21)$$

$$K_{\lambda}^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta) = \exp\left(-\frac{\pi (Im\zeta)^2}{p Im\tau}\right) \frac{1}{\eta(q)} \sum_{k \in \mathbf{Z}} (-1)^{pk} \exp\left(2\pi i \left[\frac{\tau}{2p}(pk + \lambda)^2 + \frac{\zeta}{p}(pk + \lambda) + \frac{\lambda}{2}\right]\right),$$

mentre quelli di tipo Ramond si ottengono da questi nel seguente modo:

$$K_{\lambda}^R = K_{\lambda + \frac{p}{2}}^{NS}, \quad K_{\lambda}^{\widetilde{R}} = K_{\lambda + \frac{p}{2}}^{\widetilde{NS}}. \quad (6.22)$$

In App.(A.1) sono elencate le trasformazioni modulari $(S, T, V^{\frac{p}{2}})$ dei caratteri chirali della teoria $c = 1$ che sono riassunte graficamente in Fig.(6.4). Ad esempio, abbiamo

$$T : \quad K_{\lambda}^{NS}(\tau, \zeta) \rightarrow K_{\lambda}^{NS}(\tau + 1) \propto K_{\lambda}^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta), \quad (6.23)$$

$$S : \quad K_{\lambda}^R(\tau, \zeta) \rightarrow K_{\lambda}^R(-1/\tau, -\zeta/\tau) \propto \sum_{\lambda'} S_{\lambda, \lambda'} K_{\lambda'}^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta). \quad (6.24)$$

Notiamo inoltre che ogni carattere è lasciato invariante a meno di una fase dalle trasformazioni T^2 e U , mentre V realizza il flusso spettrale $K_{\lambda} \rightarrow K_{\lambda+1}$ in ogni settore.

Accoppiando i caratteri chirali con i rispettivi antichirali definiamo quattro funzioni di partizione per un bordo dell'isolante topologico, ognuna corrispondente al relativo

settore:

$$Z^i(\tau, \zeta) = \sum_{\lambda=0}^{p-1} K_{\lambda}^i \bar{K}_{\lambda}^i, \quad i = NS, \widetilde{NS}, R, \widetilde{R}. \quad (6.25)$$

In App.(A.4) sono elencate le trasformazioni delle funzioni di partizione di bordo di ogni settore, le cui trasformazioni non banali $(S, T, V^{\frac{p}{2}})$ sono ancora evidenziate in Fig.(6.4). Notiamo in particolare che il settore $Z^{\widetilde{R}}$ è un singoletto del gruppo modulare e non è banale per $p \neq 1$. Osserviamo inoltre che tutte le funzioni di partizione di bordo (6.25) sono invarianti sotto la trasformazione T^2 e U (elettroni di carica intera e spin semintero) e la trasformazione V (assenza di anomalia legata alla carica elettrica).

La seguente funzione di partizione è invariante sotto l'intero gruppo modulare Γ esteso dall'azione di $V^{\frac{p}{2}}$:

$$Z = Z^{NS} + Z^{\widetilde{NS}} + Z^R + Z^{\widetilde{R}}. \quad (6.26)$$

Questa funzione di partizione è detta “proiezione di Ising” nella letteratura dei modelli statistici e della teoria della stringa in presenza di supersimmetria [42] [77] [78]. Dobbiamo però chiederci se questa funzione di partizione è compatibile con la fisica dell'isolante topologico TR -invariante.

Abbiamo visto nel precedente paragrafo che nella teoria $c = 1$ la trasformazione $V^{\frac{p}{2}}$ non è una trasformazione di simmetria, perchè causa una variazione della parità di spin tra il vuoto del settore di Neveu-Schwarz e quello di Ramond, manifestando l'anomalia \mathbb{Z}_2 . Quindi la funzione di partizione (6.26) corrisponderebbe a una teoria con violazione della simmetria di inversione temporale. Notiamo che la funzione di partizione può contenere eccitazioni sia pari che dispari rispetto alla parità di spin P_s , ma il vuoto deve avere le simmetrie del sistema. L'anomalia \mathbb{Z}_2 corrisponde a due vuoti con parità opposta, $|\Omega\rangle_{NS}$ e $|\Omega\rangle_R$, che possono essere connessi solo attraverso perturbazioni che violano la simmetria di inversione temporale, come per esempio un campo magnetico. Poichè il sistema deve rispettare tale simmetria, quando è presente l'anomalia \mathbb{Z}_2 non possiamo sommare i settori di tipo Neveu-Schwarz con quelli di tipo Ramond.

Non potendo costruire altri invarianti modulari compatibili con le simmetrie del problema, i quattro settori della funzione di partizione formano il vettore

$$(Z^{NS}, Z^{\widetilde{NS}}, Z^R, Z^{\widetilde{R}}), \quad (6.27)$$

che trasforma con una rappresentazione quadridimensionale sotto il gruppo modulare, App.(A.4). In conclusione, non esiste una funzione di partizione completamente invariante modulare che rispetti la simmetria TR .

6.2 Funzione di partizione per teorie $c=2$

Analizziamo la stabilità dell'isolante topologico con due coppie di stati di bordo descritti dal modello (5.30) con K matrice 2×2 . Consideriamo in particolare il caso della matrice di Jain con $K = I + sC$, con I l'identità, s pari e $C_{IJ} = 1 \forall I, J = 1, 2$. Come visto in Sez.(3.6) in questo caso gli stati Hall possiedono la simmetria $\widehat{U(1)} \otimes \widehat{SU(2)}_1$, corrispondente ad un modo carico $\widehat{U(1)}$ e uno neutro con simmetria $\widehat{SU(2)}_1$. In questo caso l'indice \mathcal{R} di Levin-Stern (5.32) assume valore pari e predice una instabilità degli stati di bordo.

6.2.1 Settori di Neveu-Schwarz e Ramond

Abbiamo visto in Sez.(3.6) che per un sistema FQHE dotato della simmetria $\widehat{U(1)} \otimes \widehat{SU(2)}_1$ possiamo introdurre \hat{p} caratteri indipendenti dove $\hat{p} = 2s + 1$, (s pari) è l'ordine topologico. La loro espressione è

$$\Theta_{2a} = \sum_{\alpha=1}^2 K_{2a+\alpha\hat{p}}(\tau, 2\zeta) \chi_{\alpha}(\tau, 0), \quad a = 1, \dots, \hat{p}, \quad \alpha = 0, 1, \quad (6.28)$$

dove K_{λ} sono i caratteri dell'algebra estesa $\widehat{U(1)}$ e χ_{α} i caratteri neutri relativi alla simmetria $\widehat{SU(2)}_1$. Le relative espressioni sono

$$K_{2a+\alpha\hat{p}}(\tau, 2\zeta) = \frac{e^{-\frac{\pi}{2\hat{p}} \frac{(Im(2\zeta))^2}{Im(\tau)}}}{\eta(\tau)} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \exp \left[2\pi i \left(\frac{\tau}{4\hat{p}} \left(2\hat{p}k + 2a + \alpha\hat{p} \right)^2 + \frac{\zeta}{\hat{p}} \left(2\hat{p}k + 2a + \alpha\hat{p} \right) \right) \right], \quad (6.29)$$

$$\chi_{\alpha=0} = \frac{1}{\eta(q)} \sum_{n \in \mathbf{Z}} q^{n^2}, \quad \chi_{\alpha=1} = \frac{1}{\eta(q)} \sum_{n \in \mathbf{Z}} q^{(2n+1)^2/4}. \quad (6.30)$$

Nel QHE la funzione invariante modulare dell'anello è data dall'espressione Eq.(3.70)

$$Z_{\text{anello}}^{QH} = \sum_{a=1}^{\hat{p}} \Theta_{2a} \bar{\Theta}_{2a} = \sum_{a=1}^{\hat{p}} \left(\sum_{\alpha=1}^2 K_{2a+\alpha\hat{p}} \chi_{\alpha} \right) \left(\sum_{\beta=1}^2 \bar{K}_{2a+\beta\hat{p}} \bar{\chi}_{\beta} \right). \quad (6.31)$$

In questa teoria la corrente Hall (ottenuta con la trasformazione V), è $\nu = 2/\hat{p}$, mentre la carica frazionaria elementare è $Q = 1/\hat{p}$. L'indice di Levin-Stern è perciò $\mathcal{R} = \hat{p}\nu = 2$ pari.

Come nel caso $c = 1$ l'isolante topologico possiede bordi dell'anello indipendenti e possiamo concentrarci su uno di essi. Identifichiamo i caratteri (6.28) come i caratteri chirali per i modi con spin up, e i corrispondenti complessi coniugati come i caratteri antichirali per i modi con spin down, entrambe nel settore di Neveu-Schwarz. La funzione di partizione dell'intero anello del QHE (6.31) è quindi uguale alla funzione di partizione di singolo bordo dell'isolante topologico nel settore di Neveu-Schwarz.

Per valutare la parità di spin del vuoto di Neveu-Schwarz delle teorie $c = 2$ riscriviamo ancora la (6.31) coi parametri q e w , e poniamo $a = 0$ per il contributo di vuoto. Usando l'espressione dei caratteri carichi (6.29) e neutri (6.30) e sviluppando per piccoli valori dell'indici di somma otteniamo gli stati con pesi conformi minori

$$Z^{NS} = (K_0\chi_0 + K_{\hat{p}}\chi_1)(\bar{K}_0\bar{\chi}_0 + \bar{K}_{\hat{p}}\bar{\chi}_1) \propto \left\{ 1 + 2q + 2\bar{q} + 2q^{\hat{p}/4}q^{1/4}w + 2q^{\hat{p}/4}q^{1/4}w^{-1} + 2\bar{q}^{\hat{p}/4}\bar{q}^{1/4}\bar{w} + 2\bar{q}^{\hat{p}/4}\bar{q}^{1/4}\bar{w}^{-1} + \dots \right\}. \quad (6.32)$$

Lo stato fondamentale è neutro e con energia nulla, ed è ottenuto prendendo in $(K_0, \bar{K}_0, \chi_0, \bar{\chi}_0)$ gli indici di somma tutti nulli. Graficamente è rappresentato in Fig.(6.5)(a). Anche

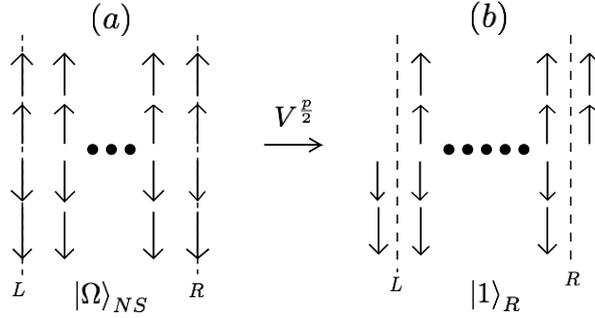


Figura 6.5: (a): Stato fondamentale nel settore Neveu-Schwarz per teorie $c = 2$. (b): In queste teorie la trasformazione $V^{\frac{\hat{p}}{2}}$ connette lo stato fondamentale nel settore di Neveu-Schwarz con uno stato eccitato nel settore di Ramond.

per le teorie $c = 2$ il vuoto di Neveu-Schwarz è bosonico

$$(-1)^{Q^\uparrow - Q^\downarrow} |\Omega\rangle_{NS} = |\Omega\rangle_{NS}. \quad (6.33)$$

Il settore di Ramond è definito inserendo un flusso $\hat{p}\Phi_0/2$ come nel caso $c = 1$. A questo corrisponde la trasformazione $V^{\frac{\hat{p}}{2}} : \Theta_{2a}(\tau, \zeta) \rightarrow \Theta_{2a}(\tau, \zeta + \tau\frac{\hat{p}}{2})$, sotto la quale i caratteri neutri non trasformano, mentre quelli carichi trasformano come segue

$$K_{2a+\alpha\hat{p}}(\tau, 2(\zeta + \tau\frac{\hat{p}}{2})) \propto K_{2a+(\alpha+1)\hat{p}}(\tau, \zeta). \quad (6.34)$$

Otteniamo quindi la seguente espressione dei caratteri di Ramond

$$\Theta_{2a}^R = \sum_{\alpha=0}^1 \chi_{2a+\alpha\hat{p}}(\tau, 2\zeta) \chi_{\alpha+1}(\tau) = K_{2a} \chi_1 + K_{2a+\hat{p}} \chi_0, \quad (6.35)$$

come mostrato in App.(A.2). Possiamo quindi definire la funzione di partizione nel settore di Ramond accoppiando i caratteri chirali e antichirali (6.35) ottenendo

$$Z^R = \sum_{a=1}^{\hat{p}} \Theta_{2a}^R \bar{\Theta}_{2a}^R = \sum_{a=1}^{\hat{p}} |K_{2a} \chi_1 + K_{2a+\hat{p}} \chi_0|^2. \quad (6.36)$$

Per determinare la parità di spin del vuoto di Ramond riscriviamo la (6.36) introducendo i parametri q e w e ponendo $a = 0$. Usando l'espressione dei caratteri carichi e neutri (6.29) e (6.30) e sviluppando per piccoli valori dei vari indici di somma otteniamo i seguenti stati in ordine crescente dei pesi conformi :

$$\begin{aligned}
Z^R &\simeq (K_0\chi_1 + K_{\hat{p}}\chi_0)(\bar{K}_0\bar{\chi}_1 + \bar{K}_{\hat{p}}\bar{\chi}_0) \\
&\propto \left\{ 4q^{1/4}\bar{q}^{1/4} + 2q^{\hat{p}/4}\bar{q}^{1/4}w + 2q^{\hat{p}/4}\bar{q}^{1/4}w^{-1} + 2\bar{q}^{\hat{p}/4}q^{1/4}\bar{w} + 2\bar{q}^{\hat{p}/4}q^{1/4}\bar{w}^{-1} \right. \\
&\quad \left. + q^{\hat{p}/4}\bar{q}^{\hat{p}/4}w\bar{w} + q^{\hat{p}/4}\bar{q}^{\hat{p}/4}w\bar{w}^{-1} + q^{\hat{p}/4}\bar{q}^{\hat{p}/4}w^{-1}\bar{w} + q^{\hat{p}/4}\bar{q}^{\hat{p}/4}w^{-1}\bar{w}^{-1} \dots \right\} :
\end{aligned} \tag{6.37}$$

In questo settore lo stato corrispondente all'evoluzione di $|\Omega\rangle_{NS}$ è lo stato $|1\rangle_R \Leftrightarrow q^{\hat{p}/4}\bar{q}^{\hat{p}/4}w\bar{w}$, graficamente rappresentato nella Fig.(6.5)(b). Questo non è lo stato di minima energia del settore di Ramond, che invece corrisponde a $|\Omega\rangle_R \Leftrightarrow 4q^{1/4}\bar{q}^{1/4}$, dove il fattore 4 ne indica la degenerazione. Questi quattro stati sono neutri sia nella parte chirale che in quella antichirale, e sono rappresentati in Fig.(6.6). Poichè tali

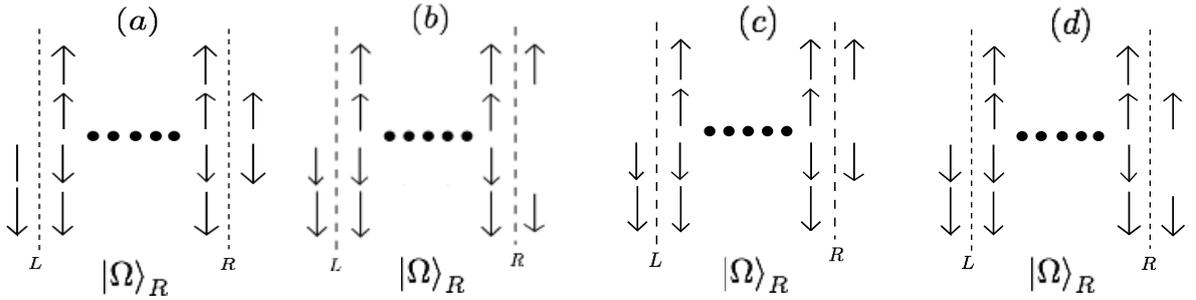


Figura 6.6: Stati fondamentali degeneri in energia nel settore di Ramond al bordo destro.

stati hanno $Q^\uparrow = Q^\downarrow = 0$, oltre a essere complessivamente neutri hanno parità di spin uguale a quella di $|\Omega\rangle_{NS}$, ovvero il vuoto di Ramond è bosonico

$$(-1)^{Q^\uparrow - Q^\downarrow} |\Omega\rangle_R = |\Omega\rangle_R. \tag{6.38}$$

Ne concludiamo che la teoria $c = 2$ non soffre dell'anomalia \mathbb{Z}_2 . Da questo segue l'assenza della degenerazione di Kramers. La degenerazione in energia dei quattro stati fondamentali è solamente valida nella teoria non interagente, e non segue dal teorema di Kramers, poichè lo spin dello stato $|\Omega\rangle_R$ è nullo. Ogni stato è un singoletto, invariante per inversione temporale. Osserviamo in Fig.(6.7) l'evoluzione degli stati con minor energia in funzione del flusso inserito nell'intervallo $\Phi \in [0, \hat{p}\Phi_0/2]$. Al flusso $\hat{p}\Phi_0/2$ lo stato $|\Omega\rangle_{NS}$ diventa degenero con l'evoluto dello stato $|2\rangle_{NS} \Leftrightarrow q^{\hat{p}}\bar{q}^{\hat{p}}w^{-2}\bar{w}^{-2}$. Lo stato $|\Omega\rangle_R$ è invece ottenuto dall'evoluzione dello stato $|1\rangle_{NS} \Leftrightarrow q^{\hat{p}/4}\bar{q}^{\hat{p}/4}q^{1/2}\bar{q}^{1/2}w^{-1}\bar{w}^{-1}$. La degenerazione tra i vari stati al flusso $\Phi = \hat{p}\Phi_0/2$ non è protetta da nessuna simmetria, e gli stati a flusso nullo possono essere distrutti dalle interazioni che rispettano le simmetrie del problema com'è stato dimostrato nel Cap.(5). Poichè la CFT $c = 2$ non

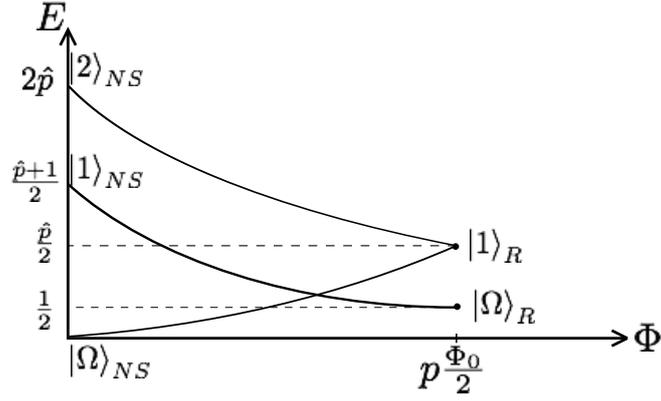


Figura 6.7: Evoluzione degli stati di minima energia della teoria $c = 2$ dal settore di Neveu-Schwarz a quello di Ramond per l'inserzione di un flusso $\hat{p}\Phi_0/2$.

ha il vuoto di Ramond con parità fermionica, non è possibile formulare l'argomento di stabilità degli stati di bordo. L'anomalia è assente nel settore di Ramond perchè la carica di ciascuna eccitazione chirale è intera $\Delta Q = n$ e l'indice di Levin-Stern $\mathcal{R} = pQ^T \mathcal{K}^{-1} \chi = 2\Delta Q$ è pari, corrispondente ad instabilità per i modi di bordo. Il nostro risultato è perciò in accordo con quanto trovato nel Cap.(5).

6.2.2 Invarianza modulare per teorie $c=2$

Come nel caso $c = 1$ le trasformazioni dell'intero gruppo modulare Γ richiedono l'introduzione di quattro settori $NS, \widetilde{NS}, R, \widetilde{R}$. Elenchiamo i corrispondenti caratteri:

$$\Theta_{2a}^{NS}(\tau, \zeta) = K_{2a} \chi_0 + K_{2a+\hat{p}} \chi_1, \quad (6.39)$$

$$\Theta_{2a}^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta) = K_{2a} \chi_0 - K_{2a+\hat{p}} \chi_1, \quad (6.40)$$

$$\Theta_{2a}^R(\tau, \zeta) = K_{2a} \chi_1 + K_{2a+\hat{p}} \chi_0, \quad (6.41)$$

$$\Theta_{2a}^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta) = -K_{2a} \chi_1 + K_{2a+\hat{p}} \chi_0. \quad (6.42)$$

Per ognuno di questi settori possiamo definire una funzione di partizione del bordo che accoppia il carattere chirale (spin up) con quello antichirale (spin down)

$$Z^i = \sum_{a=1}^{\hat{p}} \Theta_{2a}^i \bar{\Theta}_{2a}^i, \quad i = NS, \widetilde{NS}, R, \widetilde{R}. \quad (6.43)$$

Le trasformazioni sotto il gruppo modulare dei caratteri (6.39) e delle funzioni di partizione (6.43) sono date in App.(A.2) e App.(A.4) rispettivamente e sono le stesse del caso $c = 1$ riportate in Fig.(6.4).

Se dal punto di vista della CFT, le trasformazioni modulari $(S, T, V^{\frac{\hat{p}}{2}})$ delle quattro Z^i sono le stesse della teoria $c = 1$, l'interpretazione fisica è completamente diversa.

Infatti, la trasformazione $V^{\frac{\hat{p}}{2}}$ per le teorie $c = 2$ è una trasformazione di simmetria, poichè connette due settori i cui vuoti hanno la stessa parità di spin ovvero la teoria non

possiede l'anomalia di vuoto \mathbb{Z}_2 . In questo caso è perciò possibile sommare le funzioni di partizione di bordo nei vari settori senza violare la simmetria TR ed ottenere la seguente funzione di partizione per il bordo dell'isolante topologico

$$Z_{\text{bordo}}^{TI} = Z^{NS} + Z^{\widetilde{NS}} + Z^R + Z^{\widetilde{R}}, \quad (6.44)$$

invariante sotto l'intero gruppo modulare Γ .

6.2.3 Invarianza modulare e criteri di stabilità

Nei due paragrafi precedenti abbiamo ottenuto funzioni di partizione invarianti (non invarianti) modulari in corrispondenza con isolanti topologici instabili (stabili), in accordo col criterio di stabilità di Levin-Stern.

La forma vettoriale della funzione di partizione $c = 1$ (6.27) e la sua anomalia \mathbb{Z}_2 possono essere comparate con quelle del FQHE per un singolo bordo, dove i p settori $\{K_\lambda\}$ con carica anionica $Q = \lambda/p + \mathbb{Z}$ trasformano tra di loro essendo contraddistinti da una anomalia di carica \mathbb{Z}_p .

La differenza tra i due casi risiede nel fatto che una combinazione lineare dei settori $\{Z^i\}$, $i = NS, \widetilde{NS}, R, \widetilde{R}$ può essere resa invariante modulare, mentre quella dei $\{K_\lambda\}$ non lo può essere, salvo introdurre le quantità antichirali \bar{K}_λ . Infatti nel primo caso, la richiesta di invarianza (non invarianza) sotto la simmetria di inversione temporale non è dettata dalla consistenza interna della CFT, ma deriva dalle proprietà degli stati fermionici in $(2 + 1)$ -dimensioni. Nel secondo caso, l'anomalia chirale è invece un'inconsistenza interna alla CFT bidimensionale.

Questo risultato ci porta a due conclusioni importanti. La prima è che la nostra analisi conferma la relazione proposta da Ryu-Zhang [78] fra fasi topologiche di bulk e non invarianza modulare della funzione di partizione delle eccitazioni di bordo. Questi autori hanno suggerito che la risposta a deformazioni della geometria di bulk, in presenza di una fase topologica, si manifesti in un'anomalia gravitazionale (discreta) nella teoria di bordo. Questa sarebbe la trasposizione gravitazionale del ben noto trasporto di carica tra i bordi del QHE in presenza di anomalia chirale. Il criterio di non invarianza modulare è stato formulato da Ryu-Zhang per la stabilità di superconduttori topologici, per i quali l'assenza di simmetria $U(1)$ di carica non permette l'uso del criterio della pompa di spin di Fu-Kane. I nostri risultati sono quindi in accordo con quelli di Ryu-Zhang e li estendono al caso degli isolanti topologici: in ambedue i casi si incontra la struttura dei quattro settori fermionici $NS, \widetilde{NS}, R, \widetilde{R}$ che possono (non possono) essere combinati in una funzione di partizione invariante modulare rispettando la simmetria TR .

La seconda considerazione riguarda l'invariante modulare della teoria $c = 1$ (6.26). Questo descrive un sistema in cui la simmetria TR è rotta per la presenza di vuoti con parità \mathbb{Z}_2 negativa. La funzione di partizione $c = 1$ è uguale a quella della CFT abeliana

chirale-antichirale compattificata sul cerchio (3.58), che può essere resa completamente massiva dalla perturbazione TR -non invariante $m\bar{\psi}_\uparrow\psi_\downarrow$. Questo esempio illustra il concetto di fase topologica protetta dalla simmetria (*symmetry protected topological phase*)[80]: l'isolante descritto dalla teoria $c = 1$ è topologico se la simmetria TR è preservata, mentre diventa un isolante banale quando questa simmetria viene meno. Questi sistemi vanno distinti da quelli chirali come il FQHE, o l'isolante di Chern, che sono topologicamente robusti senza la necessità di simmetrie (discrete) aggiuntive.

6.2.4 Relazione spin-statistica

Completiamo l'analisi delle proprietà della funzione di partizione invariante modulare $c = 2$ (6.44). Questa realizza la proiezione di Ising sulle eccitazioni elettroniche

$$Z^{TI} = \text{Tr}((1 + (-1)^{N_\uparrow + N_\downarrow})e^{-\beta H}), \quad (6.45)$$

dove la traccia Tr è effettuata sia sul settore di Neveu-Schwarz che di Ramond. Ne segue che le eccitazioni elettroniche permesse sono a coppie bosoniche con spin intero. Questo risultato è l'unico consistente col fatto che i settori R e \tilde{R} sono indipendentemente invarianti sotto la trasformazione modulare T , Fig.(6.4) e quindi in ogni caso richiedono eccitazioni di spin conforme $h - \bar{h}$ intero, corrispondente a statistica bosonica delle eccitazioni elettroniche. In conclusione la funzione di partizione $c = 2$ (6.44) rispetta la relazione spin-statistica sia nel settore di Neveu-Schwarz che in quello di Ramond.

Notiamo che, al contrario, la funzione di partizione invariante modulare della teoria $c = 1$ (6.26) non rispetta la relazione spin-statistica. Infatti, $Z^R + Z^{\tilde{R}}$ proietta ancora su eccitazioni con spin e statistica intera, mentre le sue eccitazioni sono di natura fermionica e spin semintero, tenendo conto del carattere fermionico del vuoto di Ramond. Questa è un'altra manifestazione dell'anomalia \mathbb{Z}_2 di questa teoria.

Altre funzioni di partizione invarianti modulari a $c = 2$

Discutiamo brevemente la forma della funzione di partizione nel caso QSHE in cui l'interazione spin-orbita è soppressa e sono presenti gli stati estesi nel bulk con simmetria $U(1)_{em} \times U(1)_s$. In questo caso è possibile compensare un eccesso di carica a un bordo dell'anello con quello dell'altro bordo come nel caso del QHE.

Possiamo considerare la funzione di partizione completamente invariante modulare dei due fluidi QHE di spin up e down indipendenti, indicata come $Z_{\text{anello}}^{(\text{QHE})^2}$,

$$Z_{\text{anello}}^{(\text{QHE})^2} = \left(\sum_i Z^{i\uparrow} \right) \left(\sum_j Z^{j\downarrow} \right), \quad \text{con } (i, j) = NS, \widetilde{NS}, R, \tilde{R}, \quad (6.46)$$

dove ogni $Z^{i\uparrow}$ è della forma

$$Z^{i\uparrow} = \sum_{a=1}^{\hat{p}} \Theta_{2a}^{i\uparrow} \bar{\Theta}_{2a}^{i\uparrow}, \quad i = NS, \widetilde{NS}, R, \tilde{R}, \quad (6.47)$$

accoppia le eccitazioni di stesso spin ma sui due bordi interno ed esterno dell'anello (analoghe espressioni si trovano nel caso \downarrow). Le trasformazioni sotto il gruppo modulare delle (6.47) sono analoghe alle (6.43) date App.(A.4). La funzione di partizione (6.46) proietta lo spettro sui settori $(-1)^{Q_R^\uparrow+Q_L^\uparrow} = 1$ e $(-1)^{Q_R^\downarrow+Q_L^\downarrow} = 1$, che non consentono transizioni di spin flip.

Un'altra funzione di partizione invariante modulare è data dalla proiezione cosiddetta (Ising)²

$$Z_{\text{anello}}^{(\text{Ising})^2} = \sum_i Z^{i\uparrow} Z^{i\downarrow} \quad i = NS, \widetilde{NS}, R, \widetilde{R}, \quad (6.48)$$

dove ciascun settore è accoppiato fra spin up e down. E' facile verificare che questa espressione effettua la proiezione meno restrittiva $(-1)^{Q_R^\uparrow+Q_R^\downarrow+Q_L^\uparrow+Q_L^\downarrow} = 1$, che consente eccitazioni di spin flip.

Notiamo infine che queste due teorie di QSHE sono d'interesse accademico perchè totalmente instabili per perturbazioni TR -invarianti.

6.3 Isolanti topologici abeliani a N componenti

Il caso di N coppie di stati di bordo è una semplice estensione dell'analisi precedente per $c = 1$ e $c = 2$. L'isolante topologico abeliano della forma generale (5.30), dove K è la matrice $N \times N$ che descrive gli N fluidi Hall chirali con spettro (3.59) e ordine topologico $p = \det K$ (discuteremo dopo il caso $W \neq 0$ (5.30)). Ricordiamo l'espressione (3.62) dei caratteri chirali su un bordo dell'anello nella notazione N -dimensionale:

$$K_{\lambda}(\tau, \zeta) = \exp\left(-\pi t^T K^{-1} t \frac{(Im\zeta)^2}{Im\tau}\right) \frac{1}{\eta(q)^N} \times \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^N} \exp\left(2\pi i \left[\frac{\tau}{2}(K\ell + \lambda)^T K^{-1}(K\ell + \lambda) + \zeta t^T (\ell + K^{-1}\lambda)\right]\right), \quad (6.49)$$

con $\lambda \in \mathbb{Z}^N / (K\mathbb{Z}^N)$. La funzione di partizione per un bordo dell'isolante topologico nel settore di Neveu-Schwarz è uguale a quella dell'anello nel FQHE

$$Z_{\text{anello}}^{QHE} = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^N / K\mathbb{Z}^N} K_{\lambda} \bar{K}_{\lambda}^c, \quad (6.50)$$

assegnando le eccitazioni chirali (antichirali) a spin up (down). Sotto la trasformazione $V^{\frac{p}{2}}$ il carattere chirale del settore di Neveu-Schwarz trasforma in quello di Ramond secondo la

$$V^{\frac{p}{2}} : K_{\lambda}^{NS}(\tau, \zeta) \rightarrow K_{\lambda}^{NS}(\tau, \zeta + p\frac{\tau}{2}) = \exp\left(-2\pi i t^T K^{-1} t \left(\frac{p^2}{8} Re\tau + \frac{p}{2} Re\zeta\right)\right) K_{\lambda}^R(\tau, \zeta). \quad (6.51)$$

Questa trasformazione comporta uno spostamento di carica nel settore chirale pari a

$\Delta Q^\dagger = \nu p/2$. Quando ΔQ^\dagger è semintera, la teoria $c = N$ possiede l'anomalia di vuoto \mathbb{Z}_2 , perchè la pompa di spin ha prodotto uno stato di Ramond fermionico con spin $2\Delta J_z = Q^\dagger - Q^\downarrow$ dispari. Questo garantisce l'esistenza degli stati di bordo a massa nulla (come nel precedente caso $c = 1$). Quando invece ΔQ^\dagger è intera il bordo della teoria CFT è non anomalo (caso $c = 2$). Questo risultato è in accordo con il criterio di Levin-Stern poichè la carica ΔQ^\dagger è legata all'indice di Levin-Stern dalla relazione

$$\mathcal{R} = pQ^T \mathcal{K}^{-1} \chi = 2\Delta Q^\dagger. \quad (6.52)$$

Per rappresentare l'intero gruppo modulare Γ , in particolare le trasformazioni $(S, T, V^{\frac{p}{2}})$ è ancora necessario introdurre i quattro settori $NS, \widetilde{NS}, R, \widetilde{R}$. In App.(A.3) riportiamo l'espressione dei caratteri per ogni settore e la loro trasformazioni. Accoppiando i caratteri chirali con i rispettivi antichirali troviamo le funzioni di partizione di bordo dell'isolante topologico per ogni settore

$$Z^i = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^N / K\mathbb{Z}^N} K_\lambda^i \bar{K}_\lambda^{ci}, \quad i = NS, \widetilde{NS}, R, \widetilde{R}. \quad (6.53)$$

La costruzione di una funzione invariante modulare su un bordo da queste espressioni dipende dalla presenza o assenza di anomalia \mathbb{Z}_2 . In presenza di anomalia non è possibile costruire l'invariante modulare senza violare la simmetria TR del sistema. Abbiamo quindi il vettore,

$$(Z^{NS}, Z^{\widetilde{NS}}, Z^R, Z^{\widetilde{R}}), \quad (6.54)$$

che trasforma con una rappresentazione quadridimensionale del gruppo modulare, App.(A.4). Ritroviamo il criterio di Ryu-Zhang che l'assenza di invarianza modulare corrisponde all'isolante topologico con stati di bordo protetti, in accordo con l'argomento della pompa di spin.

In assenza di anomalia è possibile costruire l'invariante modulare sul bordo

$$Z_{\text{bordo}}^{TI} = Z^{NS} + Z^{\widetilde{NS}} + Z^R + Z^{\widetilde{R}}, \quad (6.55)$$

dove le Z^i sono le (6.53). Il criterio di Ryu-Zhang stabilisce perciò che i modi di bordo possono essere distrutti, la stessa conclusione a cui porta l'assenza di anomalia \mathbb{Z}_2 .

Osserviamo brevemente che il caso generale (5.25) della matrice \mathcal{K} con $W \neq 0$ corrisponde alla presenza di eccitazioni correlate chirali-antichirali nello spettro del QSHE. Questa correlazione è già presente per esempio negli stati FQHE di Jain $\nu = m/(mp-1)$ in cui compare un modo chirale carico e $(m-1)$ modi antichirali neutri. La CFT di bordo del corrispondente isolante topologico si analizza osservando che la matrice (5.25) \mathcal{K} può essere diagonalizzata a blocchi $N \times N$ con un'opportuna trasformazione ortogonale. Tale trasformazione agisce anche sui caratteri chirali che assumono una forma leggermente diversa dai (6.49). L'analisi di questo paragrafo resta valida ottenendo gli stessi risultati.

6.4 Funzione di partizione e stabilità dei superconduttori topologici

In questa sezione descriveremo brevemente il criterio di Ryu-Zhang per stabilire quando gli stati di bordo di un superconduttore topologico interagente sono stabili. Per maggiori dettagli rimandiamo al lavoro [78].

Ricordiamo dal Cap.(4) che un superconduttore topologico TR -invariante possiede stati di bordo corrispondenti a fermioni di Majorana. Consideriamo quindi un sistema di questo tipo in $(2+1)$ -dimensioni, con al bordo N_f fermioni di Majorana chirali e N_f antichirali. Il sistema possiede inizialmente la simmetria $U(1) \times U(1)$, corrispondente alla conservazione del numero fermionico totale $N_\uparrow + N_\downarrow$ e dello spin totale $J_z = N_\uparrow - N_\downarrow$. L'introduzione del potenziale di accoppiamento superconduttore di Bogoliubov-de Gennes, rompe la simmetria $U(1)$ relativa alla conservazione del numero di particelle lasciando conservata la parità del numero fermionico totale $(-)^{N_\uparrow + N_\downarrow}$. Come nel caso degli isolanti topologici gli accoppiamenti spin-orbita violano la conservazione dello spin. Ciononostante, in questo caso sono vietati transizioni di spin flip per cui si conservano le parità $(-)^{N_\uparrow}$ e $(-)^{N_\downarrow}$ indipendentemente.

La teoria di bordo $(1+1)$ -dimensionale è una CFT corrispondente a fermioni di Majorana a massa nulla, la cui lagrangiana, nel caso di N_f fermioni chirali e N_f antichirali è [3]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi} \sum_{a=1}^{N_f} [\psi_L^a (\partial_\tau + iv\partial_x) \psi_L^a + \psi_R^a (\partial_\tau - iv\partial_x) \psi_R^a]. \quad (6.56)$$

In questa equazione ψ_L^a e ψ_R^b sono i fermioni chirali e antichirali in $(1+1)$ -dimensioni di Majorana e v è la velocità di Fermi. Come nel caso dell'isolante topologico, i modi chirali hanno spin up mentre quelli antichirali spin down ed il sistema è TR -invariante. Osserviamo che i gradi di libertà di un fermione chirale di Majorana (neutro) in $(1+1)$ -dimensioni sono la metà di quelli di un fermione chirale di Weyl (carico). Data la non chiralità della teoria di bordo, i modi fermionici a massa nulla possono essere resi massivi se non è presente alcuna simmetria che li protegga. A tal proposito osserviamo che la simmetria $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ rispettata dal bulk del sistema si trasmette al bordo. Possiamo perciò definire i due numeri quantici conservati dalla teoria di bordo come

$$G_L = (-)^{N_L} \quad \text{e} \quad G_R = (-)^{N_R}, \quad (6.57)$$

dove $N_L (= N_\uparrow)$ [$N_R (= N_\downarrow)$] è il numero totale di fermioni chirali (antichirali) che si muovono sul bordo.

L'assenza di simmetria di carica $U(1)$ nel superconduttore topologico non permette di discutere la risposta ad un campo elettrico, il flusso spettrale V e di formulare il criterio di Fu-Kane. Il criterio sviluppato da Ryu-Zhang propone di ricercare tale stabilità nella presenza di un'anomalia gravitazionale globale [42] [77]. Quando questa

è presente, ovvero quando la teoria di bordo non è invariante sotto riparametrazioni discrete, la fase topologica di bulk è non banale e i modi di bordo sono robusti. Se quindi definiamo il sistema in un anello, possiamo applicare lo stesso criterio utilizzato per il QHE e gli isolanti topologici, e vedere quando è possibile costruire una funzione di partizione invariante modulare della CFT di bordo. Una funzione di partizione al bordo non invariante modulare segnalerà la presenza di una fase di bulk topologica.

La differenza principale del metodo esposto in precedenza per gli isolanti topologici e quello applicato da Ryu-Zhang per i superconduttori sta che questi autori proiettano gli stati dello spazio di Hilbert in un determinato settore con numeri quantici fissati: $(-)^{N_L} = (-)^{N_R} = 1$. Successivamente gli autori determinano una funzione di partizione invariante modulare per questo settore:

$$Z_{\text{GSO}} = \text{Tr}(P_{\text{GSO}} e^{-\beta H}). \quad (6.58)$$

In questa espressione la proiezione GSO [42] [77]

$$P_{\text{GSO}} = \frac{1 + (-)^{N_L}}{2} \frac{1 + (-)^{N_R}}{2}, \quad (6.59)$$

agisce separatamente sui modi chirali e antichirali, ovvero i due sistemi di fermioni di Majorana chirali e antichirali sono separatamente proiettati nel settore con numero quantico $(-)^{N_L} = (-)^{N_R} = 1$.

Il lavoro di Ryu-Zhang dimostra che per un numero $N_f = 8$ di fermioni, la funzione di partizione del bordo con proiezione GSO è invariante modulare mentre per $N_f \neq 8$ non lo è. Si tratta infatti di un noto risultato della teoria della corda relativistica [42] [77]. Interpretando la non invarianza (l'anomalia gravitazionale) come stabilità della fase topologica essi riottengono la classificazione \mathbb{Z}_8 per i superconduttori topologici interagenti di Kitaev et altri autori [79].

Osserviamo come la proiezione GSO sui modi fermionici chirali e antichirali è determinante. Se avessimo proiettato la teoria di bordo sul settore dello spazio di Hilbert con numero quantico definito rispetto alla parità fermionica totale $(-)^{N_L+N_R} = 1$, ovvero la proiezione di "Ising", avremmo determinato una funzione di partizione sul bordo dell'anello invariante modulare per ogni N_f , concludendo che il superconduttore sarebbe stato instabile per ogni N_f . Infatti le funzioni di partizione di $N_f = 2N$ Majorana con proiezione di Ising sono identiche a quelle di N fermioni di Weyl del tipo discusso nei capitoli precedenti ($c = N$ con ordine topologico $p = 1$).

Nella precedente analisi degli isolanti topologici è stata sottolineata l'importanza del concetto di "fase topologica protetta dalla simmetria" [80]; questa si manifesta nel fatto che l'invarianza delle CFT di bordo può essere sempre ottenuta (instabilità della fase topologica), se non si rispettano le simmetrie della teoria. Infatti le proprietà del vuoto di Ramond rompono la simmetria TR quando l'indice di Levin-Stern \mathcal{R} è dispari.

In conclusione, l'analisi dell'invarianza modulare nel nostro lavoro ed in quello di Ryu-Zhang, pur condividendo le stesse ipotesi fisiche e conclusioni, differisce nei dettagli

della costruzione della funzione di partizione. Un'indagine più approfondita è necessaria per chiarire completamente l'equivalenza dei due approcci.

6.5 Conclusioni

In questo lavoro di tesi abbiamo analizzato le proprietà degli isolanti e superconduttori topologici bidimensionali invarianti per inversione temporale, sistemi recentemente scoperti nell'ambito della fisica della materia condensata. In particolare abbiamo focalizzato la discussione sui criteri di stabilità per gli stati di bordo di questi sistemi: il criterio della “pompa di spin” formulato da Fu-Kane [53] [56] [57] per gli isolanti topologici liberi, ed esteso successivamente al caso interagente da Levin-Stern [72] [73] [74] [75], e il criterio dell'anomalia gravitazionale di Ryu-Zhang [78] per i superconduttori topologici interagenti. Abbiamo quindi osservato come il primo criterio permetta di classificare gli isolanti topologici abeliani, liberi e interagenti, mediante un numero quantico \mathbb{Z}_2 , mentre il secondo criterio permette di determinare la classificazione \mathbb{Z}_8 per i superconduttori topologici interagenti, diversa da quella \mathbb{Z} determinata per il caso libero.

Nella parte originale di questo lavoro abbiamo determinato le funzioni di partizione della CFT di bordo degli isolanti topologici abeliani. Imponendo l'invarianza modulare di queste funzioni, compatibilmente con le simmetrie soddisfatte dal sistema, abbiamo quindi dimostrato che per gli isolanti topologici i due criteri sono equivalenti.

A tal proposito abbiamo osservato che lo spettro della CFT di bordo di un isolante topologico abeliano si divide in due principali settori, di Neveu-Schwarz e di Ramond. Abbiamo quindi dimostrato che il criterio della pompa di spin corrisponde alla presenza di una anomalia discreta \mathbb{Z}_2 nella CFT, ovvero ad una opposta parità di spin tra gli stati di vuoto dei due settori. Nei sistemi in cui è presente questa anomalia, gli stati di bordo sono protetti poichè fanno parte di multipletti degeneri di Kramers la cui degenerazione, in accordo col teorema di Kramers, non può essere rimossa da nessuna perturbazione invariante per inversione temporale. In presenza di anomalia \mathbb{Z}_2 gli stati di bordo rimangono perciò a massa nulla senza decadere. Quando invece l'anomalia \mathbb{Z}_2 è assente, ovvero quando gli stati di vuoto dei settori di Neveu-Schwarz e di Ramond hanno la stessa parità di spin, non esiste nessun doppio degenero di Kramers. In questo caso non esistono condizioni sufficienti per mantenere stabili gli stati di bordo, che possono decadere ricevendo massa da perturbazioni TR -invarianti. I nostri risultati sulla anomalia \mathbb{Z}_2 della CFT di bordo sono perciò in accordo con i risultati di Fu-Kane (Levin-Stern).

Abbiamo poi dimostrato, ponendo il sistema in una geometria anulare, come la presenza (assenza) dell'anomalia \mathbb{Z}_2 renda impossibile (possibile) costruire una funzione di partizione invariante modulare sul bordo dell'anello. In particolare abbiamo ottenuto che è sempre possibile costruire una funzione di partizione invariante modulare dal

punto di vista delle teorie conformi. La richiesta fisica che il sistema sia invariante sotto TR limita però questa costruzione. In presenza dell'anomalia \mathbb{Z}_2 , poichè gli stati di vuoto dei due settori hanno simmetrie opposte rispetto all'inversione temporale, non è possibile costruire un' invariante modulare compatibile con le richieste fisiche. La teoria possiede perciò una anomalia gravitazionale che, secondo il criterio di Ryu-Zhang, rende stabili gli stati di bordo. In assenza di anomalia \mathbb{Z}_2 l'invariante modulare rispetta le simmetrie fisiche richieste e la teoria è libera da anomalie gravitazionali. In questo caso gli stati di bordo sono instabili.

Lo studio dell'anomalia \mathbb{Z}_2 tra i settori della CFT di bordo mostra l'equivalenza dei due criteri di stabilità nel caso degli isolanti topologici abeliani.

Il lavoro apre future prospettive per lo studio e la classificazione degli isolanti topologici non abeliani. Uno dei grandi risultati dello studio della CFT effettiva per gli stati di bordo dell'effetto Hall è stato infatti l'analisi degli stati dotati di statistica non abeliana, come lo stato $\nu = 5/2$ [32]. Riteniamo perciò che la stessa strada possa essere percorsa anche nel caso degli isolanti topologici. Ricordiamo inoltre che gli stati dotati di statistica non abeliana, oltre ad avere un contenuto fisico più ricco e complesso degli stati abeliani, sono fondamentali per le recenti ricerche nel campo della computazione quantistica. Lo studio di sistemi dotati di tali stati e che non richiedono l'uso di campi magnetici come nel caso Hall è perciò di grande interesse.

Un'altra strada proposta da questo studio è la comprensione delle condizioni imposte dalla simmetria $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ sugli stati di bordo dei superconduttori topologici. Come abbiamo avuto modo di osservare, i gradi di libertà posseduti dai fermioni di Majorana $(1 + 1)$ -dimensionali al bordo di un superconduttore topologico sono la metà di quelli di un fermione di Weyl $(1 + 1)$ -dimensionale presente ai bordi di un isolante topologico. Abbiamo però visto che mentre la classificazione degli isolanti topologici interagenti è di tipo \mathbb{Z}_2 , quella dei superconduttori topologici è di tipo \mathbb{Z}_8 . Resta da capire come le diverse simmetrie dei due sistemi determinano diverse condizioni fisiche sugli stati di bordo descritti da CFT simili.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il mio relatore, Andrea Cappelli, per la disponibilità e il tempo dedicatomi in questo lungo, ma divertente e fruttuoso periodo. Nei numerosi incontri, i suoi chiarimenti, consigli e rimproveri sono stati fondamentali per portare a termine questo lavoro. Spero di farne sempre tesoro.

Ringrazio i miei genitori. Non esistono parole di riconoscenza e gratitudine per esprimere quanto è stato fondamentale il loro aiuto per portare avanti i miei studi. Grazie per avermi permesso di intraprendere la strada che più desideravo. Spero di non deludervi mai. Grazie mamma e babbo. Non posso non menzionare anche il ruolo dei nonni. Si sono sempre interessati ai miei studi sostenendomi e incoraggiandomi. Grazie.

Desidero poi ricordare gli amici. Quelli di una vita, dei birrini e dei cenini, Francesco, Lorenzo S., Lorenzo C., Alessandro e Beatrice, e quelli dell'università, in particolare il mio "compagno" di laboratorio Alessio. I loro incoraggiamenti sono stati fondamentali.

Infine ringrazio Elena, la persona più importante che in tutti questi anni di università mi è stata vicino. Insieme abbiamo preparato numerosi esami, insieme ci siamo sostenuti nei momenti difficili, e insieme abbiamo passato momenti molto belli. Grazie Elena.

Appendice A

Trasformazione dei caratteri e funzioni di partizione della CFT di bordo

A.1 Trasformazione dei caratteri $c=1$

I caratteri chirali della teoria $c = 1$

$$\begin{aligned}
K_\lambda^{NS}(\tau, \zeta) &= \exp\left(-\frac{\pi}{p} \frac{(Im\zeta)^2}{Im\tau}\right) \frac{1}{\eta(q)} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \exp\left(2\pi i \left[\frac{\tau}{2p} (pk + \lambda)^2 + \frac{\zeta}{p} (pk + \lambda) \right]\right), \\
K_\lambda^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta) &= \exp\left(-\frac{\pi}{p} \frac{(Im\zeta)^2}{Im\tau}\right) \frac{1}{\eta(q)} \sum_{k \in \mathbf{Z}} (-1)^{pk} \exp\left(2\pi i \left[\frac{\tau}{2p} (pk + \lambda)^2 + \frac{\zeta}{p} (pk + \lambda) + \frac{\lambda}{2} \right]\right), \\
K_\lambda^R(\tau, \zeta) &= \exp\left(-\frac{\pi}{p} \frac{(Im\zeta)^2}{Im\tau}\right) \frac{1}{\eta(q)} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \exp\left(2\pi i \left[\frac{\tau}{2p} \left(pk + \lambda + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{\zeta}{p} \left(pk + \lambda + \frac{p}{2}\right) \right]\right), \\
K_\lambda^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta) &= \exp\left(-\frac{\pi}{p} \frac{(Im\zeta)^2}{Im\tau}\right) \frac{1}{\eta(q)} \sum_{k \in \mathbf{Z}} (-1)^{pk} \exp\left(2\pi i \left[\frac{\tau}{2p} \left(pk + \lambda + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{\zeta}{p} \left(pk + \lambda + \frac{p}{2}\right) \right]\right),
\end{aligned} \tag{A.1}$$

posseggono le seguenti proprietà di trasformazione modulare.

- **Trasformazione S**

Definiamo l'elemento di matrice $S_{\lambda\lambda'}(\tau, \zeta) = \frac{\exp\left(\frac{i\pi}{p} Re\left(\frac{\zeta^2}{\tau}\right)\right)}{\sqrt{p}} \sum_{\lambda'=0}^{p-1} \exp(2\pi i \frac{\lambda\lambda'}{p})$:

$$\begin{aligned}
K_\lambda^{NS}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{-\zeta}{\tau}\right) &= S_{\lambda\lambda'}(\tau, \zeta) K_{\lambda'}^{NS}(\tau, \zeta), \\
K_\lambda^{\widetilde{NS}}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{-\zeta}{\tau}\right) &= S_{\lambda\lambda'}(\tau, \zeta) K_{\lambda'}^R(\tau, \zeta), \\
K_\lambda^R\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{-\zeta}{\tau}\right) &= S_{\lambda\lambda'}(\tau, \zeta) K_{\lambda'}^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta), \\
K_\lambda^{\widetilde{R}}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{-\zeta}{\tau}\right) &= S_{\lambda\lambda'}(\tau, \zeta) \exp\left(-2\pi i \frac{p}{4}\right) K_{\lambda'}^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta).
\end{aligned} \tag{A.2}$$

- **Trasformazione T**

Definiamo i fattori di fase $T_a = \exp(2\pi i(\frac{\lambda^2}{2p} - \frac{1}{24}))$ e $T_b = \exp(2\pi i(\frac{p}{8} + \frac{\lambda}{2}))$:

$$\begin{aligned}
K_\lambda^{NS}(\tau + 1, \zeta) &= \exp(-2\pi i\frac{\lambda}{2})T_a K_\lambda^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta), \\
K_\lambda^{\widetilde{NS}}(\tau + 1, \zeta) &= \exp(2\pi i\frac{\lambda}{2})T_a K_\lambda^{NS}(\tau, \zeta), \\
K_\lambda^R(\tau + 1, \zeta) &= T_a T_b K_\lambda^R(\tau, \zeta), \\
K_\lambda^{\widetilde{R}}(\tau + 1, \zeta) &= T_a T_b K_\lambda^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta).
\end{aligned} \tag{A.3}$$

- **Trasformazione $V_{\frac{p}{2}}$**

Definiamo il fattore di fase $V_{\frac{p}{2}\Phi_0}(\tau, \zeta) = \exp(-2\pi i(\frac{p}{8}Re\tau + \frac{1}{2}Re\zeta))$:

$$\begin{aligned}
K_\lambda^{NS}(\tau, \zeta + \tau\frac{p}{2}) &= V_{\frac{p}{2}\Phi_0}(\tau, \zeta) K_\lambda^R, \\
K_\lambda^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta + \tau\frac{p}{2}) &= V_{\frac{p}{2}\Phi_0}(\tau, \zeta) K_\lambda^{\widetilde{R}}, \\
K_\lambda^R(\tau, \zeta + \tau\frac{p}{2}) &= V_{\frac{p}{2}\Phi_0}(\tau, \zeta) K_\lambda^{NS}, \\
K_\lambda^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta + \tau\frac{p}{2}) &= V_{\frac{p}{2}\Phi_0}(\tau, \zeta) K_\lambda^{\widetilde{NS}}.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

- **Trasformazione V**

Definendo il fattore di fase $V_{\Phi_0}(\tau, \zeta) = \exp(-2\pi i\frac{1}{p}(Re\frac{\tau}{2} + Re\zeta))$:

$$\begin{aligned}
K_\lambda^{NS}(\tau, \zeta + \tau) &= V_{\Phi_0} K_{\lambda+1}^{NS}(\tau, \zeta), \\
K_\lambda^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta + \tau) &= V_{\Phi_0} K_{\lambda+1}^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta), \\
K_\lambda^R(\tau, \zeta + \tau) &= V_{\Phi_0} K_{\lambda+1}^R(\tau, \zeta), \\
K_\lambda^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta + \tau) &= V_{\Phi_0} K_{\lambda+1}^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta).
\end{aligned} \tag{A.5}$$

- **Trasformazione U**

Definiamo il fattore di fase $U_1 = \exp(2\pi i\frac{\lambda}{p})$:

$$\begin{aligned}
K_\lambda^{NS}(\tau, \zeta + 1) &= U_1 K_\lambda^{NS}(\tau, \zeta), \\
K_\lambda^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta + 1) &= U_1 K_\lambda^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta), \\
K_\lambda^R(\tau, \zeta + 1) &= -U_1 K_\lambda^R(\tau, \zeta), \\
K_\lambda^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta + 1) &= -U_1 K_\lambda^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta).
\end{aligned} \tag{A.6}$$

A.2 Trasformazione dei caratteri $c=2$

I caratteri neutri e carichi (6.29) e (6.30) trasformano sotto il gruppo modulare $(S, T, V_{\frac{p}{2}}, V, U)$ secondo le seguenti relazioni:

-Trasformazione S

$$K_{2a+\alpha\hat{p}}^{\widehat{U(1)}}\left(-\frac{1}{\tau}, -2\frac{\zeta}{\tau}\right) = e^{i\frac{\pi}{2\hat{p}}\text{Re}\left(\frac{(2\zeta)^2}{\tau}\right)} \frac{1}{\sqrt{2\hat{p}}} \sum_{a'=1}^{\hat{p}} \sum_{\alpha'=0}^1 \exp\left(2\pi i \frac{2aa'}{\hat{p}}\right) \exp\left(2\pi i \frac{\alpha\alpha'}{2}\right) K_{2a'+\alpha'\hat{p}}^{\widehat{U(1)}}(\tau, 2\zeta), \quad (\text{A.7})$$

$$\chi_{\alpha}^{\widehat{SU(2)_1}}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha'=0}^1 \exp\left(-2\pi i \frac{\alpha\alpha'}{2}\right) \chi_{\alpha'}^{\widehat{SU(2)_1}}(\tau). \quad (\text{A.8})$$

-Trasformazione T

$$K_{2a+\alpha\hat{p}}^{\widehat{U(1)}}(\tau+1, 2\zeta) = \exp\left[2\pi i \left(\frac{a^2}{\hat{p}} + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{1}{24}\right)\right] K_{2a+\alpha\hat{p}}^{\widehat{U(1)}}(\tau, 2\zeta), \quad (\text{A.9})$$

$$\chi_{\alpha}^{\widehat{SU(2)_1}}(\tau+1) = \exp\left(2\pi i \left(\frac{\alpha(2-\alpha)}{2m} - \frac{1}{24}\right)\right) \chi_{\alpha}^{\widehat{SU(2)_1}}(\tau). \quad (\text{A.10})$$

-Trasformazione $V^{\frac{\hat{p}}{2}}$

$$K_{2a+\alpha\hat{p}}^{\widehat{U(1)}}\left(\tau, 2\left(\zeta + \hat{p}\frac{\tau}{2}\right)\right) = \exp\left(-2\pi i \left(\frac{\hat{p}}{4}\text{Re}\tau + \text{Re}\zeta\right)\right) K_{2a+(\alpha+1)\hat{p}}^{\widehat{U(1)}}(\tau, \zeta). \quad (\text{A.11})$$

-Trasformazione V

$$K_{2a+\alpha\hat{p}}^{\widehat{U(1)}}(\tau, 2(\zeta + \tau)) = \exp\left(-2\pi i \frac{2}{\hat{p}}(\text{Re}\frac{\tau}{2} + \text{Re}\zeta)\right) K_{2(a+1)+\alpha\hat{p}}^{\widehat{U(1)}}(\tau, \zeta). \quad (\text{A.12})$$

-Trasformazione U

$$K_{2a+\alpha\hat{p}}^{\widehat{U(1)}}(\tau, \zeta+1) = \exp\left(2\pi i \frac{2a}{\hat{p}}\right) K_{2a+\alpha\hat{p}}^{\widehat{U(1)}}(\tau, \zeta). \quad (\text{A.13})$$

Usando le trasformazioni dei caratteri neutri e carichi si determinano quelle dei caratteri chirali Θ_{2a} definiti in (6.39).

- **Trasformazione S**

Definiamo l'elemento di matrice $S_{a,a'}(\tau, \zeta) = e^{i\frac{\pi}{2\hat{p}}\text{Re}\left(\frac{(2\zeta)^2}{\tau}\right)} \frac{1}{\sqrt{\hat{p}}} \sum_{a'=1}^{\hat{p}} \exp\left(2\pi i \frac{2aa'}{\hat{p}}\right)$:

$$\begin{aligned} \Theta_{2a}^{NS}\left(-\frac{1}{\tau}, -2\frac{\zeta}{\tau}\right) &= S_{a,a'} \Theta_{2a'}^{NS}(\tau, \zeta), \\ \Theta_{2a}^{\widetilde{NS}}\left(-\frac{1}{\tau}, -2\frac{\zeta}{\tau}\right) &= S_{a,a'} \Theta_{2a'}^R(\tau, \zeta), \\ \Theta_{2a}^R\left(-\frac{1}{\tau}, -2\frac{\zeta}{\tau}\right) &= S_{a,a'} \Theta_{2a'}^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta), \\ \Theta_{2a}^{\widetilde{R}}\left(-\frac{1}{\tau}, -2\frac{\zeta}{\tau}\right) &= -S_{a,a'} \Theta_{2a'}^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

- **Trasformazione T**

Definiamo i fattori di fase $T_a = \exp(2\pi i(\frac{a^2}{p} - \frac{1}{12}))$:

$$\begin{aligned}
\Theta_{2a}^{NS}(\tau + 1, \zeta) &= T_a \Theta_{2a}^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta), \\
\Theta_{2a}^{\widetilde{NS}}(\tau + 1, \zeta) &= T_a \Theta_{2a}^{NS}(\tau, \zeta), \\
\Theta_{2a}^R(\tau + 1, \zeta) &= \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) T_a \Theta_{2a}^R(\tau, \zeta), \\
\Theta_{2a}^{\widetilde{R}}(\tau + 1, \zeta) &= \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) T_a \Theta_{2a}^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta).
\end{aligned} \tag{A.15}$$

- **Trasformazione $V_{\frac{p}{2}}$**

Definiamo il fattore di fase $V_{\frac{p}{2}\Phi_0}(\tau, \zeta) = \exp(-2\pi i(\frac{p}{4}Re\tau + Re\zeta))$:

$$\begin{aligned}
\Theta_{2a}^{NS}(\tau, \zeta + \hat{p}\frac{\tau}{2}) &= V_{\frac{p}{2}\Phi_0} \Theta_{2a}^R(\tau, \zeta), \\
\Theta_{2a}^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta + \hat{p}\frac{\tau}{2}) &= V_{\frac{p}{2}\Phi_0} \Theta_{2a}^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta), \\
\Theta_{2a}^R(\tau, \zeta + \hat{p}\frac{\tau}{2}) &= V_{\frac{p}{2}\Phi_0} \Theta_{2a}^{NS}(\tau, \zeta), \\
\Theta_{2a}^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta + \hat{p}\frac{\tau}{2}) &= V_{\frac{p}{2}\Phi_0} \Theta_{2a}^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta).
\end{aligned} \tag{A.16}$$

- **Trasformazione V**

Definendo il fattore di fase $V_{\Phi_0}(\tau, \zeta) = \exp(-2\pi i\frac{2}{p}(Re\frac{\tau}{2} + Re\zeta))$:

$$\begin{aligned}
\Theta_{2a}^{NS}(\tau, \zeta + \tau) &= V_{\Phi_0} \Theta_{2a+2}^{NS}(\tau, \zeta), \\
\Theta_{2a}^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta + \tau) &= V_{\Phi_0} \Theta_{2a+2}^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta), \\
\Theta_{2a}^R(\tau, \zeta + \tau) &= V_{\Phi_0} \Theta_{2a+2}^R(\tau, \zeta), \\
\Theta_{2a}^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta + \tau) &= V_{\Phi_0} \Theta_{2a+2}^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta).
\end{aligned} \tag{A.17}$$

- **Trasformazione U**

Definendo il fattore di fase $U = \exp(2\pi i\frac{a}{p})$:

$$\begin{aligned}
\Theta_{2a}^{NS}(\tau, \zeta + 1) &= U \Theta_{2a}^{NS}(\tau, \zeta), \\
\Theta_{2a}^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta + 1) &= U \Theta_{2a}^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta), \\
\Theta_{2a}^R(\tau, \zeta + 1) &= U \Theta_{2a}^R(\tau, \zeta), \\
\Theta_{2a}^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta + 1) &= U \Theta_{2a}^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta).
\end{aligned} \tag{A.18}$$

A.3 Trasformazione dei caratteri $c = N$

Se definiamo i caratteri della teoria chirale $c = N$ nei settori di tipo Neveu-Schwarz come

$$K_{\lambda}^{NS}(\tau, \zeta) = \exp\left(-\pi t^T K^{-1} t \frac{(Im\zeta)^2}{Im\tau}\right) \frac{1}{\eta(q)^N} \times \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^N} \exp\left(2\pi i \left[\frac{\tau}{2}(K\ell + \lambda)^T K^{-1}(K\ell + \lambda) + \zeta t^T (\ell + K^{-1}\lambda)\right]\right), \quad (\text{A.19})$$

$$K_{\lambda}^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta) = \exp\left(-\pi t^T K^{-1} t \frac{(Im\zeta)^2}{Im\tau}\right) \frac{1}{\eta(q)^N} \times \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^N} \exp\left(2\pi i \left[\frac{\tau}{2}(K\ell + \lambda)^T K^{-1}(K\ell + \lambda) + \zeta t^T (\ell + K^{-1}\lambda) + \frac{p}{2} t^T K^{-1}\lambda + \frac{p}{2} t^T \ell\right]\right), \quad (\text{A.20})$$

i caratteri dei settori di tipo Ramond sono legati a questi dalle relazioni

$$K_{\lambda}^R = K_{\lambda + \frac{p}{2}t}^{NS}, \quad K_{\lambda}^{\widetilde{R}} = K_{\lambda + \frac{p}{2}t}^{\widetilde{NS}}. \quad (\text{A.21})$$

Sotto le trasformazioni del gruppo modulare trasformano come:

- **Trasformazione S**

Dato l'elemento di matrice $S_{\lambda, \lambda'}(\tau, \zeta) = \frac{\exp(i\pi t^T K^{-1} t Re(\frac{\zeta^2}{\tau}))}{\sqrt{\det K}} \sum_{\lambda' \in \mathbb{Z}^N / K\mathbb{Z}^N} e^{(2\pi i \lambda^T K^{-1} \lambda')}$:

$$\begin{aligned} K_{\lambda}^{NS}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{-\zeta}{\tau}\right) &= S_{\lambda, \lambda'} K_{\lambda'}^{NS}(\tau, \zeta), \\ K_{\lambda}^{\widetilde{NS}}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{-\zeta}{\tau}\right) &= S_{\lambda, \lambda'} K_{\lambda'}^R(\tau, \zeta), \\ K_{\lambda}^R\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{-\zeta}{\tau}\right) &= S_{\lambda, \lambda'} K_{\lambda'}^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta), \\ K_{\lambda}^{\widetilde{R}}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{-\zeta}{\tau}\right) &= \exp\left(-2\pi i \frac{p^2}{4} t^T K^{-1} t\right) S_{\lambda, \lambda'} K_{\lambda'}^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta). \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

- **Trasformazione T**

Date $T_a = \exp(2\pi i (\frac{1}{2}\lambda^T K^{-1}\lambda - \frac{N}{24}))$, $T_b = \exp(2\pi i (\frac{p}{2}\lambda^T K^{-1}t + \frac{p^2}{8}t^T K^{-1}t))$:

$$\begin{aligned} K_{\lambda}^{NS}(\tau + 1, \zeta) &= \exp\left(-2\pi i \frac{p}{2} t^T K^{-1}\lambda\right) T_a K_{\lambda}^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta), \\ K_{\lambda}^{\widetilde{NS}}(\tau + 1, \zeta) &= \exp\left(2\pi i \frac{p}{2} t^T K^{-1}\lambda\right) T_a K_{\lambda}^{NS}(\tau, \zeta), \\ K_{\lambda}^R(\tau + 1, \zeta) &= T_a T_b K_{\lambda}^R(\tau, \zeta), \\ K_{\lambda}^{\widetilde{R}}(\tau + 1, \zeta) &= T_a T_b K_{\lambda}^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta). \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Per ottenere queste trasformazioni abbiamo, nel corso dei vari passaggi, utilizzato la seguente osservazione: le quantità

$$\frac{1}{2}\ell^T K \ell, \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{1}{2}p\ell^T t, \quad (\text{A.25})$$

entrambe dipendenti dall'indice di somma ℓ nei caratteri (A.19), sono entrambe intere o semintere. Infatti dato un sistema di elettroni descritti dal vettore ℓ , la (A.24) corrisponde a metà della statistica θ/π del sistema e la (A.25) a metà della carica moltiplicata per l'ordine topologico $p = \det K$, con p dispari. Abbiamo perciò che quando il numero di elettroni è pari, sia la carica che la statistica sono pari, quindi le (A.24) (A.25) sono entrambe intere. Quando invece il numero di elettroni è dispari, la carica e la statistica sono dispari, e le (A.24) (A.25) sono entrambe semintere.

- **Trasformazione $V_{\frac{p}{2}}$**

Dato $V_{\frac{p}{2}\Phi_0}(\tau, \zeta) = \exp(-2\pi i t^T K^{-1} t (\frac{p^2}{8} \text{Re}\tau + \frac{p}{2} \text{Re}\zeta))$:

$$\begin{aligned} K_{\lambda}^{NS}(\tau, \zeta + \tau \frac{p}{2}) &= V_{\frac{p}{2}\Phi_0} K_{\lambda}^R(\tau, \zeta), \\ K_{\lambda}^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta + \tau \frac{p}{2}) &= V_{\frac{p}{2}\Phi_0} K_{\lambda}^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta), \\ K_{\lambda}^R(\tau, \zeta + \tau \frac{p}{2}) &= V_{\frac{p}{2}\Phi_0} K_{\lambda}^{NS}(\tau, \zeta), \\ K_{\lambda}^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta + \tau \frac{p}{2}) &= V_{\frac{p}{2}\Phi_0} K_{\lambda}^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta). \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

- **Trasformazione V**

Dato $V_{\Phi_0}(\tau, \zeta) = \exp(-2\pi i t^T K^{-1} t (\text{Re}\frac{\tau}{2} + \text{Re}\zeta))$:

$$\begin{aligned} K_{\lambda}^{NS}(\tau, \zeta + \tau) &= V_{\Phi_0} K_{\lambda+t}^{NS}(\tau, \zeta), \\ K_{\lambda}^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta + \tau) &= V_{\Phi_0} K_{\lambda+t}^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta), \\ K_{\lambda}^R(\tau, \zeta + \tau) &= V_{\Phi_0} K_{\lambda+t}^R(\tau, \zeta), \\ K_{\lambda}^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta + \tau) &= V_{\Phi_0} K_{\lambda+t}^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta). \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

- **Trasformazione U**

Dati $U_a = \exp(2\pi i t^T K^{-1} \lambda)$ e $U_b = \exp(2\pi i \frac{p}{2} \nu)$:

$$\begin{aligned} K_{\lambda}^{NS}(\tau, \zeta + 1) &= U_a K_{\lambda}^{NS}(\tau, \zeta), \\ K_{\lambda}^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta + 1) &= U_a K_{\lambda}^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta), \\ K_{\lambda}^R(\tau, \zeta + 1) &= U_a U_b K_{\lambda}^R(\tau, \zeta), \\ K_{\lambda}^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta + 1) &= U_a U_b K_{\lambda}^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta). \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

A.4 Trasformazione delle funzioni di partizione

Date le funzioni di partizione di ogni settore (6.25) (6.43) e (6.53), sotto il gruppo modulare $(S, T, V^{\frac{p}{2}}, V, U)$ trasformano come

- **Trasformazione S**

$$\begin{pmatrix} Z^{NS}(-\frac{1}{\tau}, \frac{-\zeta}{\tau}) \\ Z^{\widetilde{NS}}(-\frac{1}{\tau}, \frac{-\zeta}{\tau}) \\ Z^R(-\frac{1}{\tau}, \frac{-\zeta}{\tau}) \\ Z^{\widetilde{R}}(-\frac{1}{\tau}, \frac{-\zeta}{\tau}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^{NS}(\tau, \zeta) \\ Z^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta) \\ Z^R(\tau, \zeta) \\ Z^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta) \end{pmatrix} \quad (\text{A.29})$$

- **Trasformazione T**

$$\begin{pmatrix} Z^{NS}(\tau + 1, \zeta) \\ Z^{\widetilde{NS}}(\tau + 1, \zeta) \\ Z^R(\tau + 1, \zeta) \\ Z^{\widetilde{R}}(\tau + 1, \zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^{NS}(\tau, \zeta) \\ Z^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta) \\ Z^R(\tau, \zeta) \\ Z^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta) \end{pmatrix} \quad (\text{A.30})$$

- **Trasformazione $V^{\frac{p}{2}}$**

$$\begin{pmatrix} Z^{NS}(\tau, \zeta + \tau\frac{p}{2}) \\ Z^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta + \tau\frac{p}{2}) \\ Z^R(\tau, \zeta + \tau\frac{p}{2}) \\ Z^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta + \tau\frac{p}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^{NS}(\tau, \zeta) \\ Z^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta) \\ Z^R(\tau, \zeta) \\ Z^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta) \end{pmatrix} \quad (\text{A.31})$$

- **Trasformazione V**

$$\begin{pmatrix} Z^{NS}(\tau, \zeta + \tau) \\ Z^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta + \tau) \\ Z^R(\tau, \zeta + \tau) \\ Z^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta + \tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^{NS}(\tau, \zeta) \\ Z^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta) \\ Z^R(\tau, \zeta) \\ Z^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta) \end{pmatrix} \quad (\text{A.32})$$

- **Trasformazione U**

$$\begin{pmatrix} Z^{NS}(\tau, \zeta + 1) \\ Z^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta + 1) \\ Z^R(\tau, \zeta + 1) \\ Z^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^{NS}(\tau, \zeta) \\ Z^{\widetilde{NS}}(\tau, \zeta) \\ Z^R(\tau, \zeta) \\ Z^{\widetilde{R}}(\tau, \zeta) \end{pmatrix} \quad (\text{A.33})$$

Bibliografia

- [1] A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, “Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory,” Nucl. Phys. B **241**, 333 (1984).
- [2] P. H. Ginsparg, “Applied Conformal Field Theory,” hep-th/9108028.
- [3] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Sénéchal, Conformal Field Theory, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [4] G. Mussardo, Statistical Field Theory: An Introduction to Exactly Solved Models in Statistical Physics, Oxford Graduate Texts, 2010.
- [5] L. Alvarez-Gaume and E. Witten, “Gravitational Anomalies,” Nucl. Phys. B **234** (1984) 269.
- [6] V. G. Kac, “Contravariant Form for Infinite Dimensional Lie Algebras and Superalgebras,” In *Austin 1978, Proceedings, Group Theoretical Methods In Physics*, Berlin 1979, 441-445
- [7] D. Friedan, Z. A. Qiu and S. H. Shenker, “Conformal Invariance And Critical Exponents In Two-dimensions,” Preprint - FRIEDAN, D. (86,REC.AUG.) 3p
- [8] A. Cappelli, C. Itzykson and J. B. Zuber, “Modular Invariant Partition Functions in Two-Dimensions,” Nucl. Phys. B **280** (1987) 445.
- [9] R. E. Prange and S. M. Girvin, “ The quantum Hall Effect ” , Graduate texts in contemporary Physics, Springer-Verlag
- [10] K. v. Klitzing, G. Dorda, G. and M. Pepper, “New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance,” Phys. Rev. Lett. **45**, (1980) 494.
- [11] D. C. Tsui, H. L. Stormer, and A. C. Gossard, “ Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit, ” Phys. Rev. Lett. **48**, (1982) 1559.

- [12] D. C. Tsui, H. L. Stormer, and A. C. Gossard, “ The fractional quantum Hall effect” *Rev. Mod. Phys.* **71**, (1999) S298.
- [13] R. B. Laughlin, “Quantized Hall conductivity in two-dimensions,” *Phys. Rev. B* **23** (1981) 5632.
- [14] R. B. Laughlin, “Anomalous quantum Hall effect: An Incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations,” *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 1395.
- [15] B. I. Halperin, “Quantized Hall conductance, current carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential,” *Phys. Rev. B* **25** (1982) 2185.
- [16] F. Wilczek, “Fractional statistics and anyon superconductivity,” Singapore: World Scientific. (1990)
- [17] J. K. Jain, “Composite fermion approach for the fractional quantum Hall effect,” *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 199.
- [18] A. Cappelli, G. V. Dunne, C. A. Trugenberger and G. R. Zemba, “Conformal symmetry and universal properties of quantum Hall states,” *Nucl. Phys. B* **398** (1993) 531 [hep-th/9211071].
- [19] A. Cappelli, C. A. Trugenberger and G. R. Zemba, “Infinite symmetry in the quantum Hall effect,” *Nucl. Phys. B* **396** (1993) 465 [hep-th/9206027].
- [20] A. Cappelli, C. A. Trugenberger and G. R. Zemba, “Large N limit in the quantum Hall Effect,” *Phys. Lett. B* **306** (1993) 100 [hep-th/9303030].
- [21] A. Cappelli, C. A. Trugenberger and G. R. Zemba, “W(1+infinity) dynamics of edge excitations in the quantum Hall effect,” *Annals Phys.* **246** (1996) 86 [cond-mat/9407095].
- [22] M. Stone, “Schur Functions, Chiral Bosons And The Quantum Hall Effect Edge States,” *Phys. Rev. B* **42** (1990) 8399.
- [23] M. Stone, “Vertex operators in the quantum Hall effect,” *Int. J. Mod. Phys. B* **5** (1991) 509.
- [24] X. Shen, “W infinity and string theory,” *Int. J. Mod. Phys. A* **7** (1992) 6953 [hep-th/9202072].
- [25] A. Stern “ Anyons and the quantum Hall effect—A pedagogical review” *Annals of Physics*, **323**, Issue 1, (2008), p. 204-249.
- [26] R. de Picciotto, M. Reznikov, M. Heiblum, V. Umansky, G. Bunin and D. Mahalu, “Direct observation of a fractional charge,” *Nature* **389** (1997) 162.

- [27] L. Saminadayar, D. C. Glattli, Y. Jin and B. Etienne, “Observation of the $e/3$ Fractionally Charged Laughlin Quasiparticle,” *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997) 2526.
- [28] C. de C. Chamon, D. E. Freed, S. A. Kivelson, S. L. Sondhi, X. G. Wen, “Two point-contact interferometer for quantum Hall systems,” *Phys. Rev. B* **55**, (1997), 2331.
- [29] B. I. Halperin, A. Stern, I. Neder and B. Rosenow, “Theory of the Fabry-Perot Quantum Hall Interferometer,” *Phys. Rev. B* **83**, (2011), 155440.
- [30] D. T. McClure, W. Chang, C. M. Marcus, L. N. Pfeiffer, K. W. West, preprint arXiv:1112.0538, *Phys. Rev. Lett.* in press; R.L. Willett, L.N. Pfeiffer, K.W. West, preprint arXiv:1204.1993; S. An, P. Jiang, H. Choi, W. Kang, S. H. Simon, L. N. Pfeiffer, K. W. West, K. W. Baldwin, preprint arXiv:1112.3400.
- [31] W. E. Chickering, J. P. Eisenstein, L. N. Pfeiffer, K. W. West, *Phys. Rev. B* **81**, 245319 (2010).
- [32] G. W. Moore and N. Read, “Nonabelions in the fractional quantum hall effect,” *Nucl. Phys. B* **360** (1991) 362.
- [33] J. Frohlich and A. Zee, “Large scale physics of the quantum Hall fluid,” *Nucl. Phys. B* **364** (1991) 517.
- [34] E. Witten, “Quantum Field Theory and the Jones Polynomial,” *Commun. Math. Phys.* **121** (1989) 351.
- [35] G. W. Moore and N. Seiberg, “Taming the Conformal Zoo,” *Phys. Lett. B* **220** (1989) 422.
- [36] S. Elitzur, G. W. Moore, A. Schwimmer and N. Seiberg, “Remarks on the Canonical Quantization of the Chern-Simons-Witten Theory,” *Nucl. Phys. B* **326** (1989) 108. G. V. Dunne, R. Jackiw and C. A. Trugenberger, “Chern-Simons Theory in the Schrodinger Representation,” *Annals Phys.* **194** (1989) 197.
- [37] X. G. Wen, *Quantum Field Theory of Many-body Systems*, Oxford Univ. Press (2007), Oxford
- [38] X. -G. Wen, “Topological orders and edge excitations in FQH states,” PRINT-95-148 (MIT).
- [39] M. Stone, “Edge waves and chiral bosonization,” ILL-TH-91-14.
- [40] M. Stone, “Edge Waves In The Quantum Hall Effect,” *Annals Phys.* **207** (1991) 38.

- [41] R. Floreanini and R. Jackiw, “Selfdual Fields as Charge Density Solitons,” *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 1873.
- [42] M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten and , “Superstring Theory. Vol. 1: Introduction,” Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1987) 469 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics), M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, “Superstring Theory. Vol. 2: Loop Amplitudes, Anomalies And Phenomenology,” Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1987) 596 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics)
- [43] A. Cappelli and G. R. Zemba, “Modular invariant partition functions in the quantum Hall effect,” *Nucl. Phys. B* **490** (1997) 595 [hep-th/9605127].
- [44] G. W. Moore and N. Seiberg, “Polynomial Equations for Rational Conformal Field Theories,” *Phys. Lett. B* **212** (1988) 451. R. Dijkgraaf, C. Vafa, E. P. Verlinde and H. L. Verlinde, “The Operator Algebra of Orbifold Models,” *Commun. Math. Phys.* **123** (1989) 485.
- [45] N. Read, “Excitation structure of the hierarchy scheme in the fractional quantum Hall effect,” *Phys. Rev. Lett.* **65** (1990) 1502. J. Frohlich and A. Zee, “Large scale physics of the quantum Hall fluid,” *Nucl. Phys. B* **364** (1991) 517. X. G. Wen and A. Zee, “A Classification of Abelian quantum Hall states and matrix formulation of topological fluids,” *Phys. Rev. B* **46** (1992) 2290.
- [46] A. Cappelli, C. A. Trugenberger and G. R. Zemba, “Stable hierarchical quantum hall fluids as $W(1+\infty)$ minimal models,” *Nucl. Phys. B* **448** (1995) 470 [hep-th/9502021].
- [47] C. Itzykson, “Level One Kac-moody Characters And Modular Invariance,” *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **5 B** (1988) 150.
- [48] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, M. den Nijs, “Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential”, *Phys.Rev.Lett.* **49** (1982) 405.
- [49] D. J. Thouless “Quantization of particle transport” *Phys. Rev. B*, **27**, (1983), 6083.
- [50] F. D. M. Haldane, “Model for a Quantum Hall Effect without Landau Levels: Condensed-Matter Realization of the Parity Anomaly, *Phys. Rev. Lett.*, **61**, (1988), 2015.
- [51] X. L. Qi, S. C. Zhang, “Topological insulators and superconductors” *Rev. Mod. Phys.* **83**, (2011), 1057.

- [52] M. Z. Hasan, C. L. Kane, “Topological insulators” Rev. Mod. Phys. **82**, (2010), 3045.
- [53] C. L. Kane and E. J. Mele, “Z-2 Topological Order and the Quantum Spin Hall Effect,” Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 146802.
- [54] B. A. Bernevig and S. -C. Zhang, “Quantum Spin Hall Effect,” Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 106802.
- [55] B. A. Bernevig, T. L. Hughes and S. -C. Zhang, “Quantum Spin Hall Effect and Topological Phase Transition in HgTe Quantum Wells” Science, **314** (2006), 1757-1761.
- [56] L. Fu, C. L. Kane, “Time reversal polarization and a Z_2 adiabatic spin pump”, Phys. Rev. B, **74**, (2006), 195312.
- [57] X. -L. Qi and S. -C. Zhang, “Spin Charge Separation in the Quantum Spin Hall State,” Phys. Rev. Lett. **101** (2008) 086802.
- [58] E. G. Novik, A. Pfeuffer-Jeschke, T. Jungwirth, V. Latussek, C. R. Becker, G. Landwehr, H. Buhmann, L. W. Molenkamp, “Band structure of semimagnetic $\text{Hg}_{1-y}\text{Mn}_y\text{Te}$ quantum wells”, Phys. Rev. B, **72**, (2005), 035321.
- [59] M. König, S. Wiedmann, C. Brüne, A. Roth, H. Buhmann, L. W. Molenkamp, X. L. Qi, and S. -C. Zhang, “Quantum Spin Hall Insulator State in HgTe Quantum Wells”, Science, **318**, (2007), 766.
- [60] M. König, H. Buhmann, L. W. Molenkamp, T. Hughes, C. -X. Liu, X. -L. Qi, S. -C. Zhang, “The Quantum Spin Hall Effect: Theory and Experiment”, Journal of the Physical Society of Japan, **77**, (2008), 031007.
- [61] X. L. Qi, S. C. Zhang, “The Quantum Spin Hall effect and Topological Insulator” Physics Today, **63** (2010) 33.
- [62] C. Wu, B. A. Bernevig, and S. C. Zhang, “Helical Liquid and the Edge of Quantum Spin Hall Systems”, Phys. Rev. Lett. **96**, (2006), 106401.
- [63] C. Xu, J. E. Moore, “Stability of the quantum spin Hall effect: Effects of interactions, disorder, and Z_2 topology” Phys. Rev. B, **73**, (2006), 045322.
- [64] S. Weinberg, “The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations,” Cambridge, UK: Univ. Pr. (1995).
- [65] L.D. Landau, E.M. Lifshitz (1977). ”Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory.” Vol. 3 (3rd ed.)

- [66] C. X. Liu, X. L. Qi, X. Dai, Z. Fang, S. C. Zhang “Topological insulators in Bi_2Se_3 , Bi_2Te_3 and Sb_2Te_3 with a single Dirac cone on the surface” *Nat Phys*, **5**, (2009), 438
- [67] Y. L. Chen, J. G. Analytis, J.-H. Chu, Z. K. Liu, S.-K. Mo, X. L. Qi, H. J. Zhang, D. H. Lu, X. Dai, Z. Fang, S. C. Zhang, I. R. Fisher, Z. Hussain, and Z.-X. Shen, “Experimental Realization of a Three-Dimensional Topological Insulator, Bi_2Te_3 ” *Science*, **325**, (2009), 178.
- [68] A. Kitaev, “Periodic table for topological insulators and superconductors,” *AIP Conf. Proc.* **1134** (2009) 22
- [69] X. L. Qi, T. L. Hughes, S. Raghu, S. -C. Zhang, “Time-Reversal-Invariant Topological Superconductors and Superfluids in Two and Three Dimensions” *Phys. Rev. Lett.*, **102**, (2009), 187001,
- [70] A. P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki, A. W. W. Ludwig, “Classification of topological insulators and superconductors in three spatial dimensions” *Phys. Rev. B*, **78**, (2008), 195125.
- [71] N. Read and D. Green, “Paired states of fermions in two-dimensions with breaking of parity and time reversal symmetries, and the fractional quantum Hall effect,” *Phys. Rev. B* **61** (2000) 10267
- [72] M. Levin and A. Stern, “Fractional Topological Insulators” *Phys. Rev. Lett.*, **103**, (2009), 196803.
- [73] T. Neupert, L. Santos, S. Ryu, C. Chamon, C. Mudry, “Fractional topological liquids with time-reversal symmetry and their lattice realization”, *Phys. Rev. B*, **84**, (2011), 165107
- [74] T. Neupert, L. Santos, S. Ryu, C. Chamon, C. Mudry, “Time-reversal symmetric hierarchy of fractional incompressible liquids” *Phys. Rev. B*, **84**, (2011), 165138
- [75] M. Levin and A. Stern, “Classification and analysis of two dimensional abelian fractional topological insulators,” *Phys. Rev. B* **86** (2012) 115131
- [76] F. D. M. Haldane, “Stability of Chiral Luttinger Liquids and Abelian Quantum Hall States” *Phys. Rev. Lett.*, **74**, (1995), 2090.
- [77] J. Polchinski, “String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond,” Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998) 531 p
- [78] S. Ryu, S. -C. Zhang and , “Interacting topological phases and modular invariance,” *Phys. Rev. B* **85** (2012) 245132 [arXiv:1202.4484 [cond-mat.str-el]].

- [79] L. Fidkowski, A. Kitaev, “Effects of interactions on the topological classification of free fermion systems” *Phys. Rev. B*, **81**, (2010) 134509.
- [80] X. Chen, Z. X. Liu, X. G. Wen, “Two-dimensional symmetry-protected topological orders and their protected gapless edge excitations” *Phys. Rev. B*, **23**, (2011), 235141.