

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE  
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali



*Tesi di Laurea Specialistica in Fisica*

**ENTROPIA DI ENTANGLEMENT IN  
TEORIE INVARIANTI CONFORMI  
BIDIMENSIONALI**

Candidato: **Jacopo Viti**.....

Relatore: **Dott. Andrea Cappelli**.....

*Anno Accademico 2006/07*



# Indice

<b>Sommario</b>	<b>v</b>
<b>1 Introduzione alle teorie di campo invarianti conformi</b>	<b>1</b>
1.1 Invarianza conforme al punto critico . . . . .	1
1.2 Invarianza conforme in due dimensioni . . . . .	5
1.2.1 Campi primari . . . . .	5
1.2.2 Identità di Ward conforme . . . . .	7
1.2.3 OPE del tensore energia impulso e carica centrale . . . . .	10
1.2.4 Quantizzazione radiale, algebra di Virasoro . . . . .	11
1.2.5 Cenni alla teoria delle rappresentazioni dell' algebra di Virasoro	14
1.2.6 Applicazioni fisiche . . . . .	17
1.3 Invarianza modulare . . . . .	18
<b>2 Teorie conformi con bordo (BCFT)</b>	<b>23</b>
2.1 Stati di Cardy ed identità di Verlinde . . . . .	23
2.2 Entropia di Affleck e Ludwig . . . . .	32
<b>3 Entanglement in meccanica quantistica</b>	<b>34</b>
3.1 Matrice densità ed entropia di Von Neumann . . . . .	34
3.2 Entanglement di sistemi bipartiti . . . . .	36
3.3 Entropia di entanglement . . . . .	40
3.4 Entropia delle miscele . . . . .	41
<b>4 Entropia di entanglement in teoria dei campi bidimensionale</b>	<b>45</b>
4.1 Introduzione . . . . .	45
4.2 Funzione di partizione e metodo delle repliche . . . . .	47
4.3 Entropia di entanglement al punto critico . . . . .	50
4.4 Commenti sulla forma generale dell' entropia di entanglement in QFT	52
4.5 Entropia in CFT per altre geometrie . . . . .	54
4.6 Entropia di entanglement fuori dal punto critico . . . . .	56
4.7 Espressione dell' entropia di entanglement mediante campi di twist	59
<b>5 Entropia di fermioni liberi a temperatura e taglia finita</b>	<b>63</b>
5.1 Introduzione . . . . .	63
5.2 Motivazioni . . . . .	64
5.3 Settori di spin e funzione di partizione . . . . .	65
5.4 Entropia di entanglement del fermione di Dirac . . . . .	70

5.4.1	Correlatore tra campi di twist . . . . .	70
5.4.2	Calcolo dell' entropia nel settore $\nu=3$ . . . . .	73
5.4.3	Altri settori di spin . . . . .	74
<b>6</b>	<b>Proprietà dell' entropia di entanglement a temperatura e taglia finita</b>	<b>76</b>
6.1	Sommario delle formule delle entropie di entanglement . . . . .	77
6.2	Limiti alla geometria del cilindro . . . . .	78
6.3	Limite termico . . . . .	80
6.3.1	Limite termico nel settore di spin $\nu = 3$ . . . . .	80
6.3.2	Limite termico negli altri settori di spin . . . . .	82
6.4	Limite di alta temperatura . . . . .	83
6.5	Entropia del primo stato eccitato . . . . .	83
6.6	Un' altra derivazione dell' entropia . . . . .	85
6.7	Entanglement del fermione di Majorana . . . . .	90
<b>7</b>	<b>Entanglement in sistemi unidimensionali e bidimensionali a bassa temperatura</b>	<b>92</b>
7.1	Difficoltà della teoria di Landau e parametri d'ordine non locali . . . . .	93
7.2	Statistica frazionaria e ordine topologico . . . . .	94
7.3	Entropia di entanglement topologica . . . . .	95
<b>A</b>	<b>Funzioni ellittiche di Jacobi e prime form</b>	<b>101</b>
A.1	Funzioni ellittiche. Definizioni . . . . .	101
A.2	Funzioni ellittiche. Proprietà di trasformazione sotto $\mathcal{S}$ . . . . .	103
A.3	Prime Form . . . . .	103
<b>B</b>	<b>Calcolo di un determinante fermionico</b>	<b>105</b>
<b>C</b>	<b>OPE tra operatori di vertice</b>	<b>107</b>

# Sommario

Lo scopo di questo lavoro di tesi è lo studio di alcune problematiche dell'entanglement in sistemi quantistici con molti gradi di libertà.

Uno stato puro quantistico  $|\psi\rangle$  è entangled (“intrecciato”, “aggrovigliato”) se non si può scrivere come prodotto fattorizzato di stati corrispondenti a sottoparti  $A$  e  $B$ :  $|\psi\rangle \neq |\psi_A\rangle|\psi_B\rangle$ . Ad esempio, nel sistema di due spin  $\frac{1}{2}$ , il singoletto è entangled e gli stati di proiezione massima  $S = 1$ ,  $S_z = \pm 1$ , non lo sono. Le misure di osservabili relative alle sottoparti  $A$  e  $B$  sono fra loro correlate in stati entangled ed indipendenti nel caso fattorizzato. Lo studio dell'entanglement in meccanica quantistica è rilevante ad esempio per la computazione quantistica e la trasmissione di informazioni che preservi la coerenza quantistica.

Nell'ambito dei sistemi a molti corpi, che possono essere descritti con la teoria dei campi quantistici, le proprietà dell'entanglement sono ancora largamente inesplorate. Ad esempio, sono entangled gli stati fondamentali di sistemi di materia condensata a bassa temperatura (sistemi magnetici, effetto Hall quantistico, condensati di Bose-Einstein) e gli stati della teoria dei campi in presenza di un buco nero.

L'entanglement di uno stato quantistico composto da due parti,  $A$  e  $B$  può essere quantificato mediante l'entropia di Von Neumann. La matrice densità ridotta  $\rho_A = \text{Tr}_B \rho$  descrive la parte  $A$  quando non si osserva  $B$  e l'entropia di entanglement è ottenuta da  $S(A) = -\text{Tr}_A(\rho_A \log \rho_A)$ . Fisicamente quest'entropia è proporzionale al logaritmo del numero di stati (puri) in cui può trovarsi  $A$  se non si hanno informazioni su  $B$ , sebbene il sistema sia globalmente determinato ( $|\psi\rangle$  stato puro)

(Cap.3).

In un sistema di materia condensata a  $T=0$  si considera l'entropia d'entanglement dello stato fondamentale suddividendo lo spazio in due regioni e si può calcolare  $S(A)$  mediante metodi funzionali, simulazioni numeriche oppure utilizzando le tecniche dei sistemi integrabili e dell'invarianza conforme, che sono disponibili in una dimensione spaziale. In questa tesi abbiamo analizzato tutti i risultati esatti e generali che sono stati ottenuti con i metodi delle teorie di campo conformi  $(1+1)$  dimensionali.

L'invarianza conforme si manifesta in sistemi con eccitazioni a massa nulla o vicini ad una transizione di fase dove la lunghezza di correlazione tende all'infinito. L'invarianza per trasformazioni di scala delle teorie a massa nulla si generalizza nell'invarianza per trasformazioni conformi, che sono equivalenti a dilatazioni e rotazioni locali. In  $(1+1)$  dimensioni la simmetria conforme è infinito dimensionale e permette la soluzione esatta della teoria dei campi in molti casi significativi.

I metodi delle teorie conformi sono riassunti nei capitoli 1 e 2 della tesi: si descrivono il formalismo e le tecniche principali che sono usate nei capitoli successivi per il calcolo dell'entropia di entanglement.

Nel capitolo 4 riportiamo il risultato generale  $S(A) = \frac{c}{3} \log \frac{L}{a}$ , per l'entropia di entanglement in teorie invarianti conformi, dove  $L$  è la dimensione lineare del sottosistema  $A$ ,  $c$  è la carica centrale dell'algebra di Virasoro e  $a$  è il cut-off. Questo è solo il primo di una serie di risultati che possono essere ottenuti con i metodi delle teorie conformi: ad esempio ci aspettiamo che i calcoli *multiloop* della teoria della stringa bosonica possano essere utilizzati in questo contesto.

In questa tesi ci siamo interessati in particolare alle proprietà dell'entanglement degli stati eccitati. Nella teoria conforme, questi stati hanno una struttura ben conosciuta, associata alle rappresentazioni dell'algebra conforme e possono essere creati applicando campi locali al vuoto oppure considerando miscele termiche. La funzione di partizione della teoria con condizioni periodiche al contorno, ovvero

sulla superficie  $(1 + 1)$  dimensionale del toro, contiene tutti gli stati eccitati. Coll' intento di analizzare l'entanglement degli stati eccitati, abbiamo considerato il calcolo dell'entropia  $S(A)$  sul toro, ovvero a temperatura e taglia finita. Questo calcolo è stato recentemente effettuato per la teoria del fermione di Dirac non interagente ( $c = 1$ ), [1]. Nei capitoli 5 e 6 abbiamo riottenuto questo risultato e ne abbiamo analizzato le conseguenze fisiche. Abbiamo inoltre generalizzato il calcolo a fermioni di Majorana. Nell' espressione di  $S(A)$  è possibile identificare il contributo dello stato fondamentale e delle sue deformazioni locali; inoltre abbiamo isolato l'entanglement dei primi stati eccitati fermionici e l'abbiamo riprodotto con le rappresentazioni dell' algebra conforme. Infine le espressioni esatte permettono di studiare il passaggio da entropia di entanglement ad entropia termica al variare dei parametri del sistema.

Nell' ultimo capitolo abbiamo riassunto alcune problematiche fisiche legate all' entanglement in sistemi quantistici a bassa temperatura in una e due dimensioni: la caratterizzazione del diagramma delle fasi nei sistemi unidimensionali e la descrizione degli stati fondamentali con degenerazioni di natura topologica in due dimensioni.





# Capitolo 1

## Introduzione alle teorie di campo invarianti conformi

In questo capitolo introdurremo brevemente le teorie conformi <sup>1</sup>, in particolare evidenziandone l'importanza fisica e delineandone le principali applicazioni nello studio dei sistemi al punto critico.

### 1.1 Invarianza conforme al punto critico

Un modello classico di meccanica statistica in  $d$  dimensioni spaziali su reticolo è equivalente ad una teoria dei campi quantistica euclidea in  $(d - 1)$  dimensioni spaziali e una temporale nel limite continuo del reticolo  $a \rightarrow 0$  <sup>2</sup>. Gli aspetti essenziali di questa equivalenza sono i seguenti:

- Essa si realizza a livello della funzione di partizione che diventa esprimibile tramite un integrale funzionale.
- I campi presenti nella lagrangiana sono quantità rinormalizzate, cioè ridefinite in modo che il loro limite per  $a \rightarrow 0$  sia finito, dove  $a$  è il passo reticolare.

---

<sup>1</sup>Possibili referenze sono [2], le rassegne [3], [4], [5] ed i volumi [6] e [7].

<sup>2</sup>Un esempio significativo, costruito a partire dal modello di Ising, è contenuto in [8].

- Il limite continuo della teoria dei campi è giustificato nell' intorno del punto critico, dove le fluttuazioni degli osservabili sono correlate su distanze macroscopiche.
- La lunghezza di correlazione  $\xi$  è legata alla massa dei campi da  $\xi = \frac{1}{ma}$ , quindi il punto critico corrisponde all' annullarsi della massa.

L' assenza della scala di massa (divergenza della lunghezza di correlazione) implica l' invarianza per riscalamenti delle lunghezze. Inoltre l' interpretazione del gruppo di rinormalizzazione ci assicura che la descrizione della teoria di campo nel limite continuo è indipendente dai dettagli delle interazioni microscopiche del sistema statistico (classi di universalità), [9].

Consideriamo ad esempio la teoria di un campo scalare  $\phi(x)$  in  $d$  dimensioni euclidee. L' azione:

$$S = \frac{1}{2} \int d^d x \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi, \quad (1.1)$$

è invariante sotto dilatazioni:

$$x \rightarrow \lambda x ; \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

se si trasforma il campo,

$$\phi(x) \rightarrow \lambda^{-\frac{d-2}{2}} \phi(x),$$

con la potenza di  $\lambda$  data dalla sua dimensione di massa. Il correlatore (la funzione di Green del laplaciano) ha pertanto un andamento a potenza<sup>3</sup>(correlazioni di  $\phi$  su larghe scale):

$$\langle \phi(x) \phi(y) \rangle \sim \frac{1}{|x - y|^{d-2}}. \quad (1.2)$$

Nel caso massivo, esso sarebbe esponenzialmente depresso per  $|x - y| \sim \frac{1}{m}$ .

La teoria scalare a massa nulla è quindi invariante di scala a livello classico. A

---

<sup>3</sup>In  $d=2$  l'andamento è logaritmico.

livello quantistico in presenza di interazione, l'invarianza di scala è ottenuta ai punti critici in cui la funzione beta dell' accoppiamento si annulla.

L'invarianza conforme emerge naturalmente in questo contesto come generalizzazione dell' invarianza per dilatazioni. Una trasformazione infinitesima delle coordinate  $x_\mu \rightarrow x_\mu + \varepsilon_\mu$  è conforme se la metrica trasforma per un fattore di scala:

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Omega(x)g_{\mu\nu}(x). \quad (1.3)$$

La (1.3) deve vedersi come una deformazione della metrica euclidea  $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$  (e dunque della geometria dello spazio) seguita da una riparametrizzazione che riporta nella metrica piatta. La trasformazione di coordinate infinitesima:

$$g'_{\mu\nu}(x'(x)) = g_{\mu\nu}(x) - \partial_\mu \varepsilon_\nu(x) - \partial_\nu \varepsilon_\mu(x). \quad (1.4)$$

eguagliata alla trasformazione conforme della metrica (1.3) conduce all'equazione:

$$\partial_\mu \varepsilon_\nu(x) + \partial_\nu \varepsilon_\mu(x) = (1 - \Omega(x))g_{\mu\nu}(x) \equiv \Lambda(x)g_{\mu\nu}(x). \quad (1.5)$$

Tracciando si ottiene:

$$\partial_\mu \varepsilon_\nu(x) + \partial_\nu \varepsilon_\mu(x) = \frac{2}{d} \partial \cdot \varepsilon g_{\mu\nu}, \quad (1.6)$$

ovvero la parte simmetrica a traccia nulla è nulla in un cambio di coordinate conforme. L'equazione (1.6) ammette come soluzione in  $d > 2$ , per sostituzione diretta, la forma quadratica, [6]:

$$\varepsilon^\mu(x) = a^\mu + \omega^{\mu\nu} x_\nu + c^{\mu\alpha\beta} x_\alpha x_\beta, \quad (1.7)$$

dove tutti i parametri sono reali:

- $\varepsilon^\mu = a^\mu$  corrisponde a traslazioni;

- $\varepsilon^\mu = \omega^{\mu\nu} x_\nu$  con  $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$  corrisponde a rotazioni;
- $\varepsilon^\mu = \lambda x^\mu$  sono le dilatazioni;
- $\varepsilon^{\mu\alpha\beta} = 2\delta^{\mu\alpha} b^\beta - \delta^{\alpha\beta} b^\mu$  e  $\varepsilon^\mu = 2x^\mu b \cdot x - b^\mu x^2$  sono le trasformazioni conformi speciali. In forma finita esse sono la composizione di una traslazione, una inversione  $x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu}{x^2}$  e della traslazione inversa.

Localmente una trasformazione conforme è quindi una composizione di rotazioni e dilatazioni; come è chiaro dalla (1.3) si mantengono gli angoli tra i vettori.

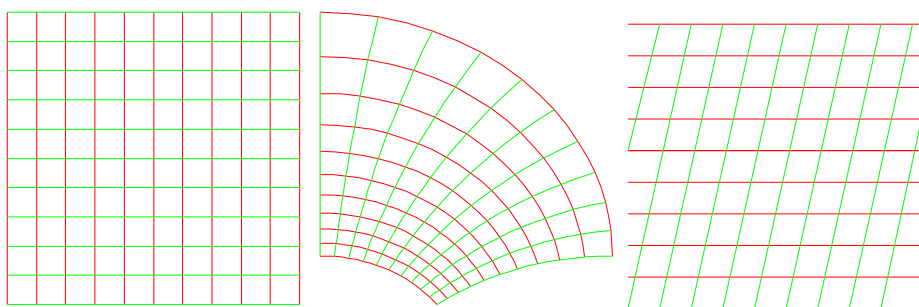


Figura 1.1: Da sinistra a destra: un reticolo, una sua trasformazione conforme, e una sua trasformazione non conforme.

Un ruolo molto importante è svolto dal tensore energia impulso  $T_{\mu\nu}$  che è definito come variazione dell'azione rispetto ad arbitrarie deformazioni delle coordinate<sup>4</sup>:

$$\delta S = \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int d^d x T_{\mu\nu} \partial^\mu \varepsilon^\nu. \quad (1.8)$$

L'invarianza per traslazioni, rotazioni e dilatazioni locali implica classicamente  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ ,  $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$  e  $T^\mu_\mu = 0$ , ovvero  $\delta S = 0$  se è soddisfatta la (1.6). In questo senso la simmetria conforme (teorema di Polyakov) è una naturale estensione dell'invarianza per dilatazioni in teorie con interazioni locali che ammettono un tensore  $T_{\mu\nu}(x)$  ben definito. Come vedremo nel prossimo capitolo, la simmetria conforme

<sup>4</sup>La definizione (1.8) è la più naturale dal punto di vista fisico e può differire dal tensore energia impulso canonico ottenuto dal teorema di Noether per termini di "improvement", [10].

in due dimensioni è infinito dimensionale, contrariamente al caso  $d > 2$ , (1.7) finora discusso. In  $d > 2$ , l'invarianza di scala richiede solamente che la traccia del tensore energia impulso sia della forma  $T_\mu^\mu = \partial^2 \chi$ .

## 1.2 Invarianza conforme in due dimensioni

### 1.2.1 Campi primari

La condizione di invarianza conforme (1.6) per  $d = 2$  si puo' scrivere:

$$\begin{cases} \partial_1 \varepsilon_2 = -\partial_2 \varepsilon_1, \\ \partial_1 \varepsilon_1 = \partial_2 \varepsilon_2. \end{cases} \quad (1.9)$$

avendo definito  $z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$  e  $\varepsilon(z) = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ . Le (1.9) sono le usuali condizioni di Cauchy-Riemann per l'analiticità di  $\varepsilon(z)$ :

$$\partial_{\bar{z}} \varepsilon(z) = \partial_z \bar{\varepsilon}(\bar{z}) = 0. \quad (1.10)$$

In  $d = 2$ , le trasformazioni conformi delle coordinate sono quindi tutte le funzioni analitiche di  $z$  e antianalitiche di  $\bar{z}$ :

$$\begin{cases} z \rightarrow z + \varepsilon(z), \\ \bar{z} \rightarrow \bar{z} + \bar{\varepsilon}(\bar{z}). \end{cases} \quad (1.11)$$

Il gruppo conforme è perciò infinito dimensionale.

È conveniente considerare  $z$  e  $\bar{z}$  variabili complesse indipendenti e dunque una trasformazione conforme agisce in maniera indipendente sulla parte olomorfa e ad antiolomorfa della teoria. Le necessarie condizioni di realtà sulle quantità fisiche saranno discusse alla fine dell' analisi.

Non tutte le trasformazioni conformi sono globalmente definite: gli unici automorfismi della sfera di Riemann ( $\mathbb{C} \cup \infty$ ) sono le trasformazioni fratte o di Moebius

(trasformazioni conformi globali):

$$z \rightarrow w(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}; \quad \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \quad (1.12)$$

In forma infinitesima esse corrispondono alla scelta:  $\varepsilon(z) = \alpha + \beta z + \gamma z^2$  ovvero a traslazioni, dilatazioni ed inversioni. In tutti gli altri casi le trasformazioni conformi introducono delle singolarità e non corrispondono a simmetrie degli stati della teoria. Ad ogni modo sarà possibile determinare la covarianza della teoria, ovvero le variazioni dei correlatori dei campi per arbitrarie trasformazioni conformi.

Una teoria di campo invariante conforme (*CFT*) possiede dei particolari campi  $\phi_{h\bar{h}}(z, \bar{z})$ , detti primari (ad esempio lo spin nel modello di Ising o qualunque altro operatore rilevante al punto critico), che trasformano in modo covariante come dei tensori:

$$\phi_{h\bar{h}}(z, \bar{z}) \rightarrow \left(\frac{dw}{dz}\right)^h \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right)^{\bar{h}} \phi_{h\bar{h}}(w, \bar{w}), \quad z \rightarrow w(z), \quad \bar{z} \rightarrow \bar{w}(\bar{z}). \quad (1.13)$$

Le quantità reali  $(h, \bar{h}) \equiv i$  sono dette pesi conformi di  $\phi_{h\bar{h}} \equiv \phi_i$ ;  $\Delta = h + \bar{h}$  è la dimensione di scala e  $s = h - \bar{h}$  lo spin conforme. L'invarianza per trasformazioni conformi globali (1.12) determina univocamente la forma della funzione a due punti:

$$\langle \phi_i(z_1, \bar{z}_1) \phi_j(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \frac{\delta_{ij}}{(z_1 - z_2)^{2h} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{2\bar{h}}} = \frac{\delta_{ij}}{|z_1 - z_2|^{2\Delta}} \left(\frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{z_1 - z_2}\right)^s. \quad (1.14)$$

È analogamente fissata anche la forma della funzione a tre punti di campi primari e restrizioni sono poste su quella a quattro punti, [2].

La fattorizzazione dei settori olomorfi ed antiolomorfi è sottolineata dalla forma del tensore energia impulso in coordinate complesse  $z, \bar{z}$ :

$$T_{zz} = \frac{1}{4}(T_{11} - 2iT_{21} - T_{22}); \quad T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = \frac{1}{4}(T_{11} + T_{22}); \quad T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{4}(T_{11} + 2iT_{21} - T_{22}). \quad (1.15)$$

Da  $T_{\mu}^{\mu} = 0$  segue  $T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0$  e da  $\partial_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$ ,  $\partial_{\bar{z}}T_{zz} = \partial_zT_{\bar{z}\bar{z}} = 0$ , dunque  $T_{zz} \equiv T(z)$  è una funzione analitica ( $T_{\bar{z}\bar{z}} \equiv \bar{T}(\bar{z})$  è antianalitica).

I campi primari sono le quantità principali delle teorie conformi perché sono univocamente associate alle rappresentazioni irriducibili dell' algebra conforme (vedi par.1.2.5). Essi soddisfano un' algebra locale (*OPE*, Operator Product Expansion): limitatamente alla parte olomorfa (o chirale)<sup>5</sup>, l'*OPE* si definisce:

$$\phi_i(z)\phi_j(w) = \sum_k C_{ij}^k(z-w)\phi_k(w) \text{ per } z \rightarrow w. \quad (1.16)$$

In alcune classi di teorie conformi è possibile la determinazione esatta dei coefficienti dello sviluppo  $C_{ij}^k(z-w)$ , che hanno la forma:

$$C_{ij}^k(z-w) = (z-w)^{h_k-h_i-h_j}C_{ij}^k, \quad (1.17)$$

dove le  $C_{ij}^k$  sono le costanti di struttura.

### 1.2.2 Identità di Ward conforme

Quantisticamente l' invarianza (covarianza) conforme si manifesta in una serie di equazioni differenziali (identità di Ward) per i correlatori tra campi primari, introdotti come medie funzionali:

$$\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}[\phi] e^{-S[\phi]} \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n)}{\int \mathcal{D}[\phi] e^{-S[\phi]}}, \quad (1.18)$$

dove  $S[\phi]$  è l' azione euclidea e  $\mathcal{D}[\phi]$  la misura invariante conforme. Per esaminare il comportamento sotto trasformazioni conformi della (1.18) racchiudiamo i punti  $z_i$  di singolarità del correlatore all' interno del cerchio  $C$ , vedi Figura 1.2, e consideriamo un cambio di coordinate  $x^{\mu} \rightarrow x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}(x)$  tale che  $\varepsilon(z)$  è analitica,

---

<sup>5</sup>La *OPE* ha significato di uguaglianza solo all' interno di correlatori nel limite in cui  $|z-w|$  è più piccolo di ogni altra distanza.

conforme, all' interno del cerchio, dominio A, ed è un diffeomorfismo all' esterno, dominio B, [5].<sup>6</sup>

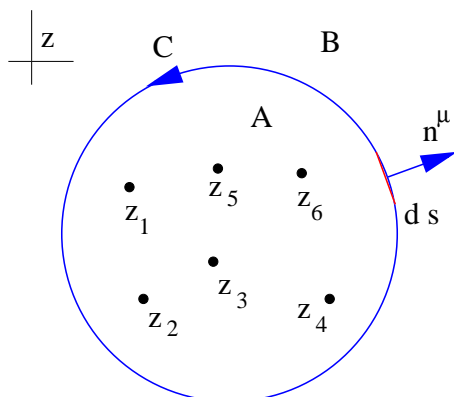


Figura 1.2: Geometria della derivazione dell' identità di Ward; cammino  $C$  che racchiude tutti i campi.

L' integrale funzionale è invariante per riparametrizzazioni e otteniamo (nel piano  $\langle T_{\mu\nu} \rangle = 0$ ):

$$\sum_{i=1}^n \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \delta_{\varepsilon\bar{\varepsilon}} \phi_i(z_i, \bar{z}_i) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle +$$

$$- \frac{1}{2\pi} \langle \int_{\mathbb{R}^2} d^2x T^{\mu\nu}(x) \partial_\mu \varepsilon_\nu(x) \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle = 0. \quad (1.19)$$

Poiché le trasformazioni di coordinate all' interno di  $A$  sono conformi, il secondo termine si riduce ad un integrale sul cammino  $C$ ; passando a coordinate complesse non è difficile verificare che:

$$\frac{1}{2\pi} \oint_C ds n^\mu T_{\mu\nu} \varepsilon^\nu = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \varepsilon(z) T(z) - \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\bar{z} \bar{\varepsilon}(\bar{z}) \bar{T}(\bar{z}). \quad (1.20)$$

<sup>6</sup>Come è noto, teorema di Liouville, non esistono funzioni analitiche non costanti prive di poli su  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .



Il risultato finale è<sup>7</sup>:

$$\sum_{i=1}^n \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \delta_{\varepsilon\bar{\varepsilon}} \phi_i(z_i, \bar{z}_i) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle + \\ - \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \varepsilon(z) \langle T(z) \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle + \text{c.c.} = 0. \quad (1.21)$$

Considerando come indipendenti le trasformazioni olomorfe dalle antiolomorfe ed indicando con  $\langle X \rangle$  una generica funzione di correlazione,  $C$  un cammino che contiene tutti i suoi argomenti, possiamo scrivere:

$$\langle \delta_{\varepsilon} X \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \varepsilon(z) \langle T(z) X \rangle. \quad (1.22)$$

Le componenti  $T(z)$  e  $\bar{T}(\bar{z})$  sono quindi i generatori delle trasformazioni conformi per la parte olomorfa ed antiolomorfa della teoria.

Specializzandosi a campi  $\phi_i$  primari, dalla (1.13) con  $w(z) = z + \varepsilon(z)$ , otteniamo:

$$\delta_{\varepsilon} \phi_{h\bar{h}}(z, \bar{z}) = (h\partial_z \varepsilon + \varepsilon\partial_z) \phi_{h\bar{h}}(z, \bar{z}). \quad (1.23)$$

Per il teorema di Cauchy e l'arbitrarietà di  $\varepsilon(z)$  l'identità di Ward si può riscrivere come un'espressione locale:

$$\langle T(z) \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{h_i}{(z - z_i)^2} + \frac{1}{z - z_i} \frac{\partial}{\partial z_i} \right] \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle. \quad (1.24)$$

Un'espressione identica varrà per le quantità antiolomorfe. Dunque l'inserzione di  $T$  nei correlatori è equivalente all'azione di un operatore differenziale. Questa relazione è molto importante in CFT.

Notiamo infine che per trasformazioni conformi globali, prive di punti singolari:

$$\langle \delta_{\varepsilon} X \rangle = 0. \quad (1.25)$$

---

<sup>7</sup>Con c.c. si intende la sostituzione delle corrispondenti quantità barrate con attenzione al fatto che  $\bar{h}$  non è il coniugato di  $h$ .

Ciò segue dalla possibilità di prendere il limite  $|z| \rightarrow \infty$  nel contorno  $C$  e dall'andamento  $\langle T(z)X \rangle \sim \frac{1}{z^4}$  per  $z \rightarrow \infty$  nella (1.22).

### 1.2.3 OPE del tensore energia impulso e carica centrale

Discutiamo le conseguenze principali della (1.22). Immediatamente segue la *OPE* che fornisce una definizione alternativa di campo primario:

$$T(z)\phi(w) \sim \frac{h}{(z-w)^2}\phi(w) + \frac{1}{(z-w)}\partial_w\phi(w) + \text{regolari per } z \rightarrow w. \quad (1.26)$$

Inoltre risulta che  $T(z)$  dimensionalmente ha pesi conformi  $h=2$  e  $\bar{h}=0$ . Esso tuttavia non è un campo primario e la più generale *OPE* priva di costanti dimensionate che ci si può attendere è:

$$T(z)T(w) \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}\partial_w T(w) + \text{regolari}. \quad (1.27)$$

Questa definisce un nuovo parametro della teoria conforme, la carica centrale  $c$ : il suo valore dipende dal modello, ad esempio per una teoria bosonica libera  $c = 1$ .

Si noti che:

$$\langle T(z)T(w) \rangle = \frac{c}{2}(z-w)^{-4}, \quad (1.28)$$

ne segue che  $c$  è reale e positiva in una teoria unitaria, dove questo correlatore è definito positivo.

Poiché  $T(z)$  non è un campo primario la sua regola di trasformazione per  $z \rightarrow w(z)$  non è la (1.13), la forma infinitesima è comunque dettata dalla identità di Ward, o equivalentemente dalla (1.27). Risulterà:

$$\delta_\varepsilon T(z) = \oint_C dw T(w)T(z) = \frac{c}{12}\partial_z^3\varepsilon(z) + (2\partial_z\varepsilon + \varepsilon\partial_z)T(z). \quad (1.29)$$

È possibile dimostrare, [2], che la (1.29) corrisponde alla trasformazione finita:

$$T(z) \rightarrow \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 T(w) + \frac{c}{12}\{w, z\}, \quad (1.30)$$

dove si è definito:

$$\{w, z\} = \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2, \quad (1.31)$$

indicata come derivata schwartziana.

Dall' analiticità di  $T(z)$  segue infine l'espansione in modi di Laurent:

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}, \quad (1.32)$$

in cui gli  $L_n$  sono operatori, che agiscono su uno spazio di Hilbert che definiremo nel prossimo paragrafo, con pesi conformi  $h = -n$  ( $\bar{h} = 0$ ).

#### 1.2.4 Quantizzazione radiale, algebra di Virasoro

La relazione tra espressioni funzionali e operatoriali in *CFT* si definisce coll'ordinamento radiale (quantizzazione radiale). In una teoria dei campi euclidea in tutti i correlatori dei campi  $\mathcal{O}(\mathbf{x}, t)$ :

$$\langle \mathcal{O}(\mathbf{x}_1, t_1) \dots \mathcal{O}(\mathbf{x}_n, t_n) \rangle, \quad (1.33)$$

si stabilisce un ordinamento temporale per cui i campi a sinistra sono valutati a tempi successivi rispetto a quelli a destra:

$$t_1 \geq t_2 \dots \geq t_n.$$

L'ordinamento radiale si ottiene introducendo il tempo  $t$  attraverso la mappa (vedi Figura 1.3):

$$z = e^{\frac{w}{R}}, \quad w = t + ix, \quad (1.34)$$

del piano  $z$  nel cilindro di circonferenza  $2\pi R$  con coordinata  $w$ .

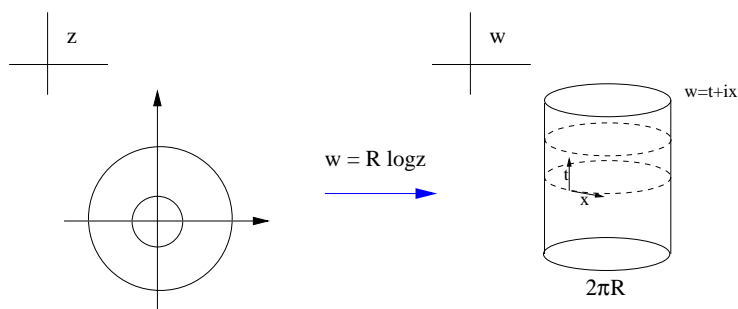


Figura 1.3: Trasformazione conforme descritta. Le variabili  $t$  ed  $x$  sul cilindro corrispondono all'ordinario tempo e spazio

Il cilindro è lo spazio-tempo di una teoria quantistica (1+1) dimensionale con condizioni periodiche al contorno spaziali e l'evoluzione temporale lungo l'asse del cilindro corrisponde al moto radiale nel piano. La trasformazione al cilindro agisce inoltre sul tensore energia impulso e caratterizza il ruolo dei suoi modi nelle due geometrie. Applicando la trasformazione (1.30) si ottiene:

$$T_{cil}(w) = \frac{1}{R^2} \left[ z^2 T_{piano}(z) - \frac{c}{24} \right]. \quad (1.35)$$

Il generatore delle traslazioni temporali nel cilindro è dato dall'hamiltoniana:

$$\begin{aligned} H_{cil} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi R} dx (T_{cil})_{tt} = \frac{1}{2\pi} \int_0^L dx [T_{cil}(w) + \bar{T}_{cil}(\bar{w})] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[ \oint_{t=cost} dw T_{cil}(w) - \oint_{t=cost} d\bar{w} \bar{T}_{cil}(\bar{w}) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i R} \oint_{C_0} dz \left[ z T_{piano}(z) - \frac{c}{24} \frac{1}{z} \right] + c.c. \quad (1.36) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{R} \left( L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12} \right). \quad (1.37)$$

Abbiamo ottenuto che il generatore delle dilatazioni nel piano  $L_0$  è legato all'hamiltoniana nel cilindro<sup>8</sup>. Poiché gli stati della teoria conforme hanno una definita dimensione di scala e quindi sono autostati di  $L_0$  risulta conveniente considerare l'

<sup>8</sup>Analogamente si può provare che  $P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{1\pi R} dx (T_{cil})_{tx} = \frac{1}{R} (L_0 - \bar{L}_0)$  è il generatore delle traslazioni sul cilindro, rotazioni nel piano.

evoluzione radiale nel piano e scegliere il corrispondente ordinamento operatoriale radiale:

$$A(z)B(z')\theta(|z| > |z'|) + B(z')A(z)\theta(|z| < |z'|). \quad (1.38)$$

Applicando questa regola possiamo calcolare il commutatore tra i modi di  $T(z)$ :

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \left[ \oint_C dz T(z)z^{n+1}, \oint_{C_0} dw T(w)w^{n+1} \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{C_0} dw w^{n+1} \oint_{C_w} dz z^{n+1} T(z)T(w). \end{aligned}$$

Dove, fissato  $w$ , il contorno  $C$  è scelto come in Figura 1.4 per rispettare l'ordinamento radiale.

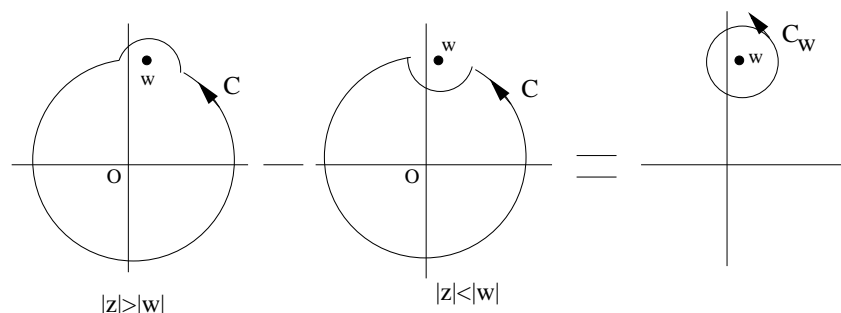


Figura 1.4: Contorni di integrazione per il calcolo del commutatore tra i modi del tensore energia impulso nel piano della variabile  $z$ .

Utilizzando l' *OPE* (1.27) per determinare la singolarità di  $T(z)T(w)$  quando  $z \rightarrow w$  otteniamo:

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}\delta_{n,-m}n(n^2 - 1). \quad (1.39)$$

Quest' algebra infinito dimensionale è l'algebra di Virasoro, [2]. L'estensione centrale, parametrizzata da  $c$  è conseguenza dell'anomalia conforme in  $d = 2$ .

Poiché gli operatori  $L_n$  agiscono sugli stati della teoria invariante conforme definita sul cilindro, questi ultimi sono una base per lo spazio vettoriale (infinito) in

cui hanno sede le sue rappresentazioni irriducibili (esattamente come per l'algebra del momento angolare). Concludiamo notando che i generatori  $L_0, L_1, L_{-1}$ , formano la sottoalgebra  $SU(2)$  dell'algebra di Virasoro delle dilatazioni, delle traslazioni e delle trasformazioni conformi speciali nel piano (l'estensione centrale si annulla). Ripetendo l'argomento per il commutatore  $[L_n, \phi_h]$  ed utilizzando l'OPE dei campi primari si ha infatti:

$$[\lambda_n L_n, \phi_h(z)] = \lambda_n h(n+1)z^n \phi_h(z) + \lambda_n z^{n+1} \partial \phi_h(z) = \begin{cases} \lambda_0(h\phi_h + z\partial\phi_h) & n = 0, \\ \lambda_1(2hz\phi_h + z^2\partial\phi_h) & n = 1, \\ \lambda_{-1}\partial\phi_h & n = -1, \end{cases} \quad (1.40)$$

e ritroviamo  $\varepsilon(z) = \lambda_1 z^2 + \lambda_0 z + \lambda_{-1}$ .

### 1.2.5 Cenni alla teoria delle rappresentazioni dell' algebra di Virasoro

Indichiamo con  $\Gamma$  l'algebra dei generatori  $L_n$  di Virasoro. Complessivamente l'algebra conforme in due dimensioni è il prodotto  $\Gamma \otimes \bar{\Gamma}$ , dove  $\bar{\Gamma}$  è generata dagli  $\bar{L}_n$ , modi di  $\bar{T}(\bar{z})$ , ed ha la stessa carica centrale<sup>9</sup>  $c = \bar{c}$ . Il commutatore  $[L_n, \bar{L}_m] = 0$  è equivalente a  $\langle T(z)\bar{T}(\bar{w}) \rangle = 0$ , dunque ci si può limitare a studiare  $\Gamma$ . Come già anticipato, lo spazio di Hilbert su cui agiscono gli operatori  $L_n$  è lo spazio degli stati della teoria quantistica definita sul cilindro (vedi par. 1.2.4). In particolare definito lo stato di vuoto  $|0\rangle$  invariante per trasformazioni conformi regolari ( $L_0|0\rangle = L_{\pm 1}|0\rangle = 0$ ), esisteranno degli stati  $|h\rangle$  detti pesi massimi (*highest weight states*) prodotti dall'applicazione dei campi primari al vuoto:

$$\phi_h(z=0)|0\rangle \equiv |h\rangle.$$

<sup>9</sup>In una teoria con azione reale e priva di anomalia gravitazionale, [11].

La scelta  $z = 0$  corrisponde alla scelta del tempo  $t = -\infty$ , stati asintotici, in quantizzazione radiale. A partire dai pesi massimi è possibile costruire lo spettro completo dell' hamiltoniana  $H_{cil}$  (vedi par.1.2.4) o, eventualmente, identificare tutte le dimensioni di scala  $\Delta$  dei campi della teoria invariante conforme al punto critico (par. 1.2.1). Infatti essi sono autostati del generatore delle dilatazioni nel piano  $L_0$  con autovalore dato proprio da  $h$ :

$$L_0\phi_h(0)|0\rangle = [L_0, \phi_h(0)]|0\rangle = h\phi_h(0)|0\rangle = h|h\rangle. \quad (1.41)$$

Il settore dello spazio di Hilbert (denominato Verma modulo) discendente dal peso massimo  $|h\rangle$  è ottenuto tramite l' applicazione degli  $L_n$  ( $n < 0$ ) su di esso. Risulta infatti  $L_n|h\rangle = 0$ ,  $\forall n > 0$ . Tale proprietà è conseguenza di:

$$L_n|0\rangle = 0, \quad \forall n > 0 \text{ per la regolarità di } T(0)|0\rangle,$$

e di:

$$L_n\phi_h(0)|0\rangle = [L_n, \phi_h(0)]|0\rangle = 0, \quad \forall n > 0.$$

Si ha invece per  $n > 0$ :

$$L_0L_{-n}|h\rangle = [L_0, L_{-n}]|h\rangle + hL_{-n}|h\rangle = (n + h)|h\rangle.$$

Lo spazio di Hilbert della teoria conforme è una collezione di torri conformi prodotte dall' applicazione di stringhe degli  $L_{-n}$  ai pesi massimi. Ad esempio,  $L_{-n_1}\dots L_{-n_k}|h\rangle$  è uno stato al livello  $N = \sum_{i=1}^k n_k$  della torre di  $|h\rangle$  detto stato discendente ed il suo autovalore di  $L_0$  è  $(h + N)$ .

Il problema matematico principale nello studio delle rappresentazioni dell' algebra di Virasoro è la possibilità di avere tra gli stati discendenti dei vettori  $|\chi\rangle$  tali che  $L_n|\chi\rangle = 0$ ,  $\forall n > 0$ . Questi stati  $|\chi\rangle$  sono detti "vettori nulli" perché a norma nulla ed ortogonali a tutti gli altri stati: essi possono formare dei nuovi pesi mas-

simi per costruire un' altra rappresentazione dell' algebra di Virasoro nello spazio dei loro discendenti (ad esempio,  $L_{-n}|\chi\rangle$ ). La rappresentazione in cui si trova un vettore nullo è riducibile (usualmente detta degenera). Per ottenere una rappresentazione irriducibile bisogna individuare tali vettori ed eliminarli dallo spettro, imponendo la condizione  $|\chi\rangle \sim 0$ . Un' altra questione importante è l' unitarietà delle rappresentazioni; essa si traduce nella condizione che la norma degli stati  $L_{-n_1}\dots L_{-n_k}|h\rangle$  sia positiva. La soluzione di questo notevole problema matematico è stata ottenuta analizzando il segno del determinante della matrice di Gram:

$$G(h, N, c) = \begin{pmatrix} \langle h|L_1^N L_{-1}^N|h\rangle & \cdots & \langle h|L_1^N L_{-N}|h\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle h|L_N L_1^N|h\rangle & \cdots & \langle h|L_N L_{-N}|h\rangle \end{pmatrix}; \quad (1.42)$$

la dimensione della matrice è  $P(N) \times P(N)$  dove  $P(N)$  è il numero delle partizioni di  $N$ ; i suoi elementi sono i prodotti scalari tra gli stati al livello  $N$ . La formula esatta per il determinante di  $G(h, N, c)$  è stata ricavata da Kac, Fegan e Fuchs, [12]. Lo studio di questa quantità porta alle seguenti conclusioni:

- per  $c < 0$  non esistono rappresentazioni unitarie;
- per  $c > 1$  tutte le rappresentazioni sono unitarie e irriducibili per ogni valore di  $h$ ;
- per  $c = 1$ , esistono infiniti valori di  $h$  per cui le rappresentazioni sono degeneri, ma tutte sono unitarie;
- per  $0 < c < 1$  la richiesta di rappresentazioni unitarie è molto restrittiva; queste sono possibili per una serie discreta di valori di  $c$  e di  $h$ , la cosiddetta serie dei modelli minimali:

$$c(m) = 1 - \frac{6}{m(m+1)}; \quad m = 3, 4, \dots \quad (1.43)$$



Fissata  $c(m)$  come nella (1.43), i pesi conformi  $h$  e dunque i campi primari delle rappresentazioni unitarie sono in numero finito:

$$h_{p,q} = \frac{[(m+1)p - mq]^2 - 1}{4m(m+1)} > 0 \quad p = 1 \dots m-1; \quad q = 1 \dots p. \quad (1.44)$$

I valori  $\{h_{p,q}\}$  formano la cosiddetta tabella di Kac.

Si dimostra che l'insieme di questi campi obbedisce ad un'algebra chiusa sotto *OPE*: dati i campi primari con dimensioni di Kac  $h_{p,q}$  e  $h_{r,s}$ ,  $\phi_{p,q}$  e  $\phi_{r,s}$  possiamo scrivere le *regole di fusione*, [2], ovvero le regole di selezione che specificano il risultato dell'*OPE* (1.16), nel seguente modo:

$$\phi_{p,q} \times \phi_{r,s} = \sum_{\alpha,\beta} \phi_{\alpha,\beta}. \quad (1.45)$$

La somma al membro di destra è ristretta ai seguenti termini:  $|p-r|+1 \leq \alpha \leq p+r+1$ ,  $|q-s|+1 \leq \beta \leq q+s+1$ . Più in generale per una qualunque *CFT* con un numero finito di campi primari si ha:

$$\phi_i \times \phi_j = \sum_k N_{ij}^k \phi_k, \quad (1.46)$$

dove gli  $N_{ij}^k$  sono interi non negativi chiamati coefficienti dell'algebra di fusione.

## 1.2.6 Applicazioni fisiche

A ciascuna teoria conforme minimale, (1.43), è possibile associare un modello di meccanica statistica classico bidimensionale al punto critico. Il valore della carica centrale caratterizza la classe di universalità. Dalla tabella delle dimensioni  $h_{rs}$  otteniamo tutti gli esponenti di scala esatti dei campi che danno luogo ad interazioni rilevanti e irrilevanti al punto critico. Dalle identità di Ward, specializzate al caso di campi  $h_{rs}$ , rappresentazioni degeneri [2], è possibile ottenere delle equazioni differenziali per le funzioni di correlazione e determinare la loro espressione.

Le classi di universalità sono ulteriormente specificate dall'insieme dei valori delle coppie  $(h, \bar{h})$  che sono possibili nella teoria prendendo coppie di valori della tabella di Kac. Ad esempio, il modello di Ising al punto critico è descritto dal primo modello minimale  $m = 3, c = \frac{1}{2}$  e le coppie ammesse per le due algebre di Virasoro sono quelle con  $h = \bar{h}$ . Se le dimensioni di Kac sono cioè  $h_{1,1} = 0, h_{1,2} = h_{2,1} = \frac{1}{2}, h_{2,2} = \frac{1}{16}$ , analogamente per  $\bar{h}_{p,q}$ , i campi primari dell'identità (**1**), dell'energia ( $\varepsilon$ ) e dello spin ( $\sigma$ ) sono rispettivamente identificati con  $\phi_{h\bar{h}} = \phi_{00}, \phi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$  e  $\phi_{\frac{1}{16}\frac{1}{16}}$ . Per un generico valore di  $c$  sono possibili più di una scelta di coppie  $(h, \bar{h})$ . Questo contenuto operatoriale delle teorie conformi si può determinare completamente facendo ulteriori richieste fisiche: una possibilità è quella di richiedere che la funzione di partizione sulla geometria toroidale sia correttamente definita, ovvero invariante per trasformazioni modulari, [13].

### 1.3 Invarianza modulare

Un toro  $\mathbf{T}$  è una superficie di Riemann di genere uno che può essere pensata come il quoziente di  $\mathbb{C}$  rispetto ad un reticolo intero  $\Lambda^{10}$  (vedi Figura 1.5):

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbb{C}}{\Lambda}, \quad (1.47)$$

con  $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } z = a + b\tau; a, b \in \mathbb{Z}, \tau \in H\}$ ,  $H$  essendo il semipiano superiore,  $Im(\tau) > 0$ .

La definizione di  $\mathbf{T}$  secondo la (1.47) non è univocamente associata alla Figura 1.5: lo stesso quoziente  $\frac{\mathbb{C}}{\Lambda}$  può essere ottenuto per valori diversi del parametro modulare  $\tau$ , vedi Figura 1.7, legati da trasformazioni discrete. Tali trasformazioni corrispondono a cambiare i generatori del reticolo  $\Lambda$ , senza che esso venga modificato e sono dette trasformazioni modulari<sup>11</sup>. Il gruppo modulare è isomorfo a

<sup>10</sup>Più propriamente del gruppo delle traslazioni che lo genera.

<sup>11</sup>Il gruppo modulare è il quoziente dei diffeomorfismi della metrica del toro rispetto ai diffeomorfismi connessi all'identità.

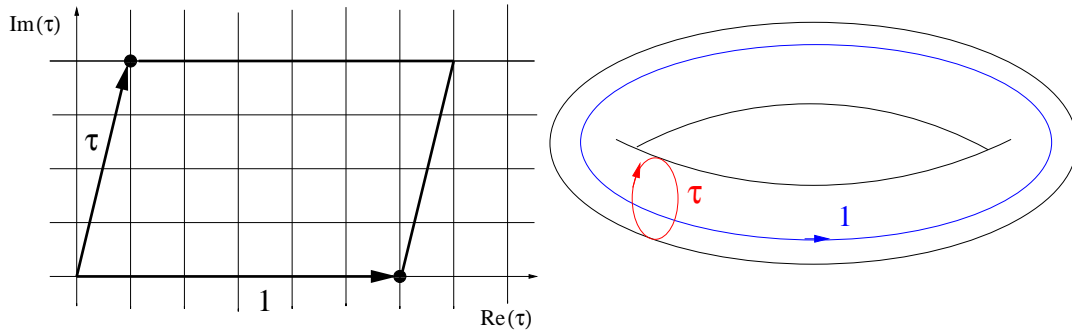


Figura 1.5: Il toro come parallelogramma dai lati identificati nel piano complesso (a sinistra) e come superficie compatta immersa in  $\mathbb{R}^3$  (a destra). Sono indicate le due curve non omotope (cicli) e le rispettive lunghezze;  $\tau$  è detto il *parametro modulare*.

$\frac{SL(2, \mathbb{Z})}{\mathbb{Z}_2}$  ed è specificato dall'azione:

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}; \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}). \quad (1.48)$$

Il quoziente  $\mathcal{F} = \frac{H}{SL(2, \mathbb{Z})}$  del semipiano complesso superiore di  $\tau$  rispetto al gruppo include tutti i possibili valori di  $\tau$  indipendenti cioè non connessi da trasformazioni modulari. Esso è chiamato *dominio fondamentale* ed è rappresentato in Figura 1.6 (a sinistra).

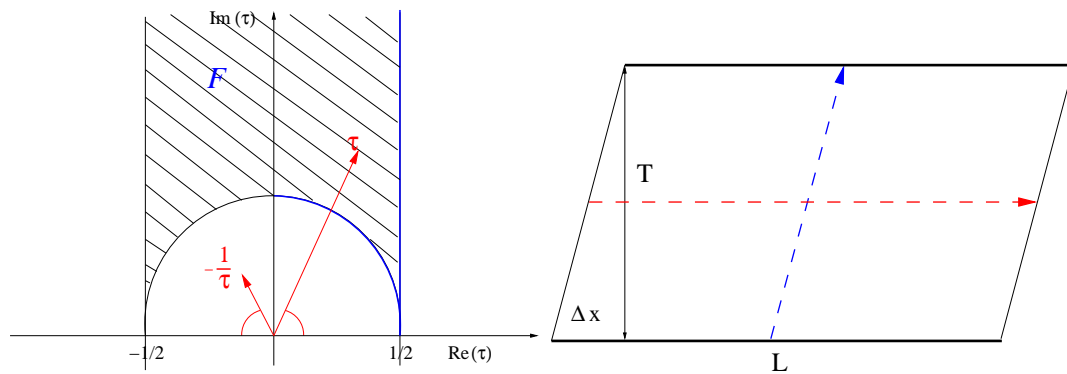


Figura 1.6: Il dominio fondamentale e l' azione della trasformazione  $\mathcal{S}$ . Notare che  $\mathcal{S}^2 = I$ . A destra due tipi di evoluzione sul toro. La freccia blu rappresenta l' evoluzione di uno stato in quantizzazione radiale per un intervallo di tempo  $T$  e di spazio  $\Delta x$ . La freccia rossa invece la stessa evoluzione dopo la trasformazione modulare  $\mathcal{S}$ , corrispondente allo scambio dello spazio col tempo. L'invarianza modulare richiede che esse coincidano.

Gli elementi del gruppo modulare sono ottenibili come prodotti dei due generatori  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{S}$ :

$$\begin{cases} \mathcal{T} : \tau \rightarrow \tau + 1 \\ \mathcal{S} : \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau} \end{cases}, \quad (1.49)$$

che soddisfano le condizioni:  $(\mathcal{ST})^3 = \mathcal{S}^2 = \pm 1$ .

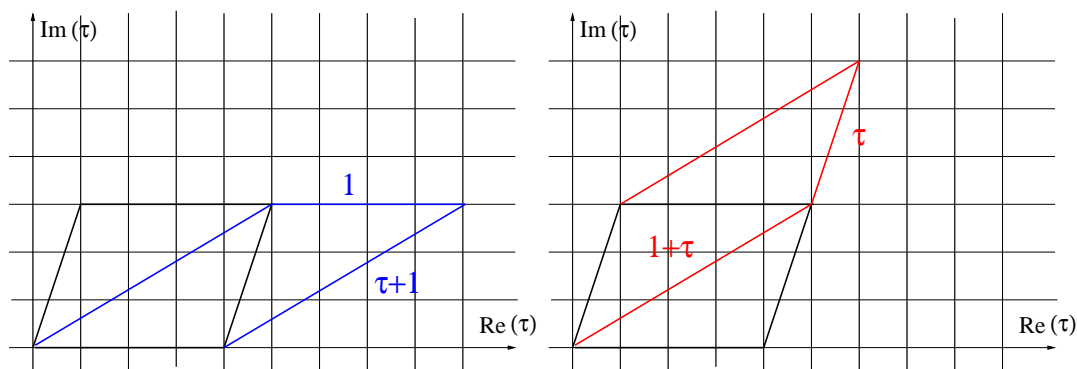


Figura 1.7: Le due trasformazioni indicate conducono ad un toro equivalente a quello della Figura 1.5; esse corrispondono a tagliarlo lungo un ciclo, effettuarvi una rotazione completa di  $2\pi$  e riattaccare (*twist di Dehn*). Sinteticamente nella prima  $1 \rightarrow 1$  e  $\tau \rightarrow \tau + 1$ , nella seconda  $\tau \rightarrow \tau$  e  $1 \rightarrow 1 + \tau$ . Notare che l' area del toro non è modificata in nessuno dei casi.

Affinché una teoria conforme risulti ben definita sul toro è necessario che la funzione di partizione  $Z(\tau)$  sia invariante rispetto alle (1.49). Nel contesto della quantizzazione radiale  $Z(\tau)$  è la traccia dell' operatore di evoluzione tra i due lati del parallelogramma, ovvero:

$$Z = \text{Tr} (e^{-TH+i\Delta x P}) = \text{Tr} (q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{c}{24}}), \quad (1.50)$$

dove si sono usate le relazioni del par. 1.2.4 e si è posto, (vedi Figura 1.6):

$$q = e^{2\pi i \tau}, \quad \tau = i \frac{T}{L} + \frac{\Delta x}{L}.$$

La (1.50) suggerisce la definizione del carattere di Virasoro associato alla torre

conforme di  $|h\rangle$  nel seguente modo:

$$\chi_h(q) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} d_h(n) q^{h+n-\frac{c}{24}}, \quad (1.51)$$

con  $d_h(n)$  numero di vettori dello spazio di Hilbert della quantizzazione radiale non nulli al livello  $n$  e  $d_h(0) = 1$ . Risulterà perciò che la funzione di partizione di una *CFT* sul toro assume la forma generale:

$$Z(q) = \sum_{h, \bar{h}} N_{h, \bar{h}} \chi_h(q) \chi_{\bar{h}}(\bar{q}); \quad N_{h, \bar{h}} \in \mathbb{N}, \quad (1.52)$$

dove la somma si estende sulle rappresentazioni dell' algebra di Virasoro. Assumeremo che il loro numero sia finito come nel caso dei modelli minimali (1.43). L'invarianza sotto la trasformazione  $\tau \rightarrow \tau + 1$  richiede che le coppie  $(h, \bar{h})$  possibili,  $N_{h, \bar{h}} \neq 0$ , soddisfino  $h - \bar{h} \in \mathbb{Z}$ , ovvero i campi fisici devono avere spin intero (ad esempio, il fermione  $\psi$  non è osservabile, il prodotto  $\psi\bar{\psi}$  lo è).

La richiesta di invarianza sotto la trasformazioni  $\mathcal{S}$ :

$$\mathcal{S} : \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}, \quad q \rightarrow \mathcal{S}(q) \equiv \tilde{q} = e^{-2\pi i \frac{1}{\tau}},$$

implica delle condizioni più forti.

Nel caso dei modelli minimali  $c < 1$  i caratteri  $\chi_h(q)$  trasformano secondo una rappresentazione lineare del gruppo modulare, ovvero:

$$\chi_h(\tilde{q}) = \sum_{h' \in CFT} S_{hh'} \chi_{h'}(q), \quad S = \pm S^\dagger; \quad (1.53)$$

la somma comprende tutti i campi primari specificati dai pesi conformi di Kac. In questo caso, le condizioni d'invarianza modulare si riducono ad un problema lineare discreto che può essere risolto, [14]. La classificazione delle funzioni di partizione invarianti modulari fissa univocamente il contenuto operatoriale  $N_{h, \bar{h}}$ .

Ad esempio poiché la rappresentazione di  $\mathcal{S}$  nello spazio dei caratteri è unitaria,  $S = \pm S^\dagger$ , la combinazione diagonale ( $N_{h,\bar{h}} = \delta_{h,\bar{h}}$ ):

$$Z(q) = \sum_h \chi_h(q) \chi_h(\bar{q}) = \sum_h |\chi_h(q)|^2, \quad (1.54)$$

è invariante sotto  $\tau \rightarrow \tau + 1$  e  $\tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$ , (il caso più semplice essendo proprio il modello di Ising). Nel prossimo capitolo mostreremo inoltre una notevole relazione tra gli elementi della matrice di trasformazione dei caratteri  $S_{hh'}$ , (1.53), ed i coefficienti delle regole di fusione dei campi primari  $N_{ij}^k$ , (1.46).

# Capitolo 2

## Teorie conformi con bordo (BCFT)

In questo capitolo accenneremo allo studio dei sistemi al punto critico in domini finiti del piano con condizioni al contorno invarianti conformi. L'argomento è di grande interesse teorico, anche in relazione alla teoria della stringa aperta. Gli scopi principali dell'analisi sono catalogare tutte le condizioni al bordo ammissibili e per ognuna di esse esplicitare il contenuto operatoriale della teoria, [15]. Discuteremo inoltre nell'ultimo paragrafo un primo esempio di calcolo di entropia in *CFT*, [16].

### 2.1 Stati di Cardy ed identità di Verlinde

Il prototipo di ogni geometria (spazio-tempo) finita in due dimensioni è il semipiano superiore  $H$  di  $z$ . Esso può essere mappato in una striscia infinita nella variabile  $w = t + ix$  tramite la:

$$w = 2R \log z. \tag{2.1}$$

Come al Cap.1, la striscia rappresenta lo spazio-tempo di una teoria quantistica unidimensionale cui supponiamo siano state imposte condizioni al contorno spaziali  $\alpha$  e  $\beta$ , rispettivamente ad  $x = 0$  e  $x = 2\pi R$ . Nel piano  $z$  lo stato di vuoto non è

dunque più invariante per traslazioni. Nell'origine  $z = 0$  è applicato un opportuno campo  $\phi_{\alpha\beta}(z = 0)$ , sul vuoto invariante conforme  $|0\rangle$  che realizza il cambiamento di condizioni al contorno  $\alpha \rightarrow \beta$ . Il campo  $\phi_{\alpha\beta}(z = 0)$  è un operatore definito esclusivamente sul bordo, vedi Figura 2.1(a).

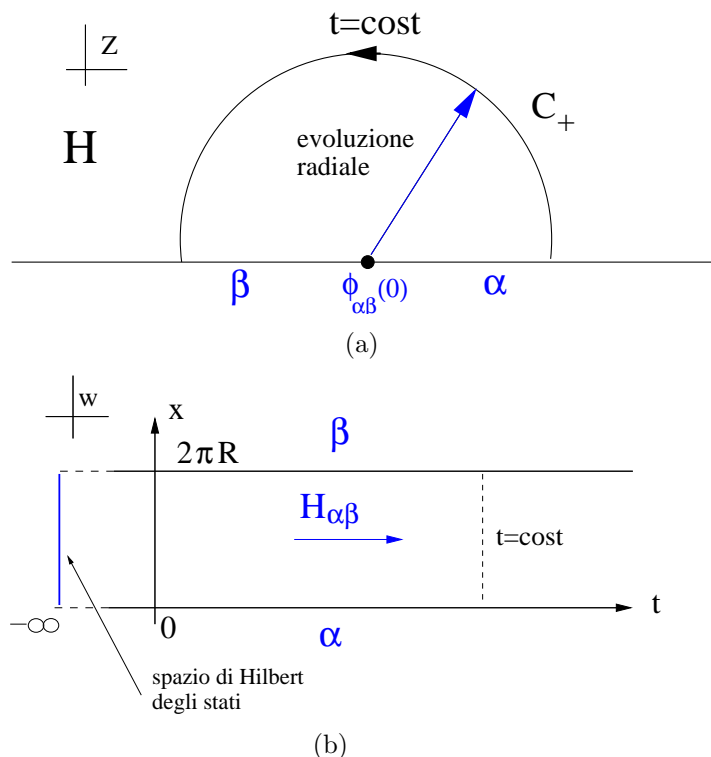


Figura 2.1: (a) Il semipiano complesso  $H$  nella cui origine sono collocati gli stati dello spazio di Hilbert della striscia (b). Tali stati evolvono nella direzione radiale con l'hamiltoniana  $H_{\alpha\beta}$ .

L'hamiltoniana della teoria quantistica è ottenuta dalla trasformazione al semipiano  $z$  come nel par. 1.2.4; indicando con  $T_{str}(x, t)$  il tensore energia impulso sulla striscia e con  $T(z)$  quello nel semipiano abbiamo analogamente:

$$\begin{aligned}
 H_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi R} dx (T_{str})_{tt} = \frac{1}{2\pi i} \int_{t=cost} dw T_{str}(w) - \frac{1}{2\pi i} \int_{t=cost} d\bar{w} \bar{T}_{str}(\bar{w}) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2R} \int_{C_+} dz \left[ zT(z) - \frac{c}{24} \frac{1}{z} \right] - \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2R} \int_{C_+} d\bar{z} \left[ \bar{z}\bar{T}(\bar{z}) - \frac{c}{24} \frac{1}{\bar{z}} \right].
 \end{aligned}$$



Imponendo per  $Im(z) = 0$ ,  $T(z) = \bar{T}(z)$  ( $T_{12} = 0$ , flusso di momento nullo attraverso il bordo<sup>1</sup>) è possibile definire  $T(z)$  nel semipiano inferiore mediante una riflessione di Schwartz:

$$T(z^*) = \bar{T}(z), \quad Im(z^*) < 0. \quad (2.2)$$

In questo modo si ottiene una descrizione della  $CFT$  con bordo nell'intero piano complesso ma in termini di una sola algebra (chirale) di Virasoro:

$$H_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2R} \oint_C dz \left[ zT(z) - \frac{c}{24} \frac{1}{z} \right] = \frac{1}{2R} (L_0 - \frac{c}{24}). \quad (2.3)$$

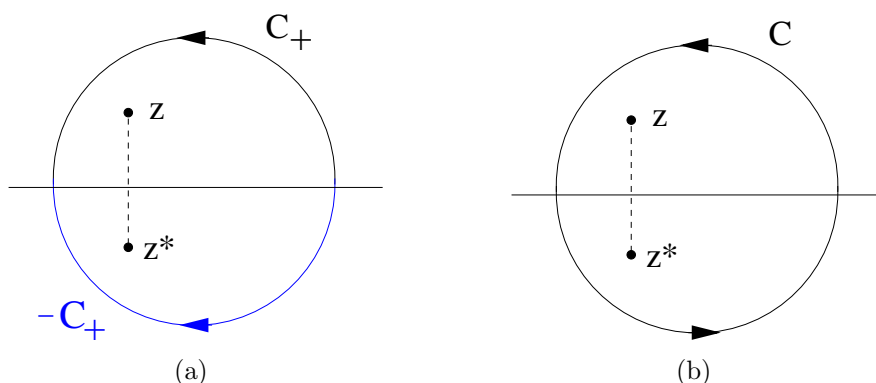


Figura 2.2: Cammini equivalenti, dopo l'estensione nel semipiano inferiore del tensore energia impulso  $T(z)$  per il calcolo dell'hamiltoniana della quantizzazione radiale.

Chiaramente ogni quantità antiolomorfa  $\bar{\phi}(\bar{z}) \in H$  andrà similmente riflessa nel punto immagine  $z^*$ .

La funzione di partizione per la striscia con condizioni periodiche al contorno nel tempo immaginario (anello) è, (vedi Figura 2.3):

$$\begin{aligned} Z_{\alpha\beta} &= \text{Tr} (e^{-TH_{\alpha\beta}}) = \text{Tr} e^{-\frac{T}{2R}(L_0 - \frac{c}{24})} \equiv \text{Tr} q^{L_0 - \frac{c}{24}} \\ &= \sum_h n_{\alpha\beta}^h \chi_h(q). \end{aligned} \quad (2.4)$$

<sup>1</sup>Equivalentemente la trasformazione conforme è nulla sull'asse reale.

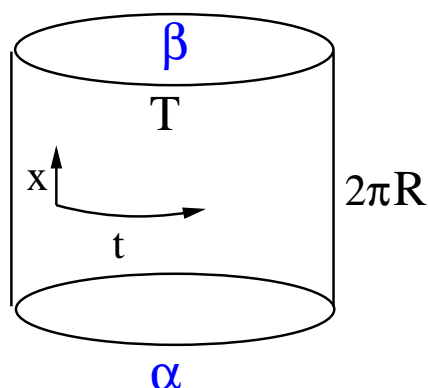


Figura 2.3: La propagazione degli stati nel tempo  $t$  con l'Hamiltoniana  $H_{\alpha\beta}$  è detta lungo il canale aperto (*open channel*).

Gli  $n_{\alpha\beta}^h \in \mathbb{N}$  sono le molteplicità del carattere  $\chi_h(q)$  corrispondente a stati che si propagano nel bulk della striscia e sono compatibili con le condizioni al bordo  $(\alpha, \beta)$ . Assumeremo di nuovo che il numero di campi primari  $h$  su cui si somma sia finito (teoria conforme *razionale*).

Effettuando una trasformazione modulare si ottiene:

$$Z_{\alpha\beta}(\tilde{q}) = \sum_{h,h'} n_{\alpha\beta}^h S_{hh'} \chi_{h'}(\tilde{q}); \quad \tilde{q} = e^{-4\pi\left(\frac{2\pi R}{T}\right)}, \quad (2.5)$$

$S$  è la matrice di trasformazione dei caratteri che assumeremo simmetrica e reale per semplicità<sup>2</sup>. Consideriamo adesso la mappa della striscia nel piano  $\mathbb{C}$  di  $\zeta$ :

$$\zeta = e^{-\frac{2\pi i}{T}w}. \quad (2.6)$$

Nel piano di  $\zeta$ , la (2.5) si reinterpreta (vedi Figura 2.4) come elemento di matrice dell'operatore di evoluzione  $e^{-2\pi RHP}$  della teoria con condizioni periodiche spaziali (*canale chiuso*) tra opportuni stati di bordo,  $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$  corrispondenti ai “tempi”  $x=0$

<sup>2</sup>Per esempio questo è verificato per tutti i modelli minimali unitari.

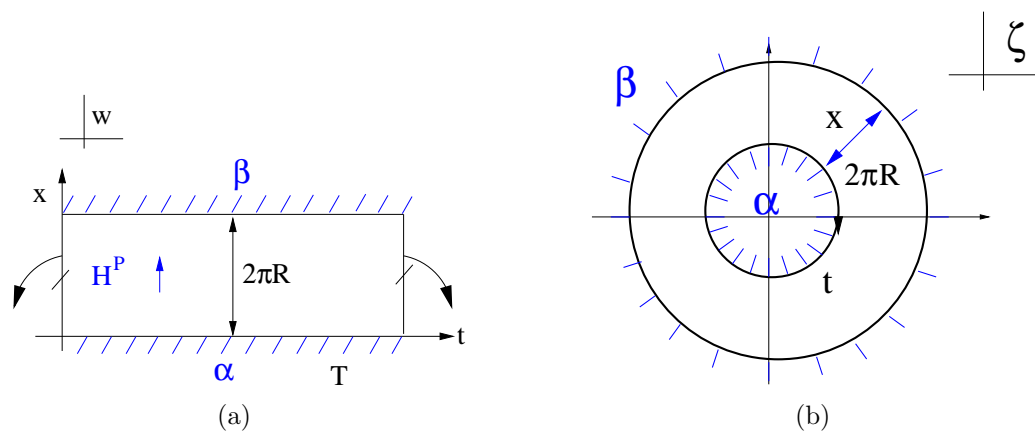


Figura 2.4: (a) L' hamiltoniana  $H^P$  propaga gli stati dello spazio di Hilbert dal "tempo"  $x=0$  ad  $x=2\pi R$ , nel cosiddetto canale chiuso (*closed channel*); essa è legata all' operatore di dilatazione nel piano di  $\zeta$ ,  $L_0^P$ , (b).

e  $x = 2\pi R$ , (la coordinata radiale è  $e^{\frac{x}{R}}$ ):

$$Z_{\alpha\beta} = \langle \alpha | e^{-2\pi R H^P} | \beta \rangle. \quad (2.7)$$

L' hamiltoniana  $H^P$  appartiene allo spazio di Hilbert della teoria invariante conforme nel piano infinito (indice  $P$ ), la sua espressione in termini dell' operatore di dilatazione è quella usuale (cfr. 1.2.4):

$$H^P = \frac{2\pi}{T} \left( L_0^P + \bar{L}_0^P - \frac{c}{12} \right), \quad (2.8)$$

quindi:

$$\begin{aligned} Z_{\alpha\beta}(\tilde{q}) &= \langle \beta | e^{-2\pi R H^P} | \alpha \rangle \\ &= \langle \beta | \tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0^P - \frac{c}{24})} \bar{\tilde{q}}^{\frac{1}{2}(\bar{L}_0^P - \frac{c}{24})} | \alpha \rangle. \end{aligned} \quad (2.9)$$

La condizione di realtà  $T_{str}(w) = \bar{T}_{str}(\bar{w})$ ,  $\forall t$  ad  $x = 0$  ed  $x = 2\pi R$  si trasferisce con la (2.6), in una condizione per gli stati di bordo  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$ . Ad esempio per  $|\alpha\rangle$

con  $\zeta = e^{-2\pi i \frac{t}{T}}$ :

$$[T_{str}(w) - \bar{T}_{str}(\bar{w})]|\alpha\rangle = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left[ \sum_n L_n^P \zeta^{-n} - \sum_n \bar{L}_n^P \bar{\zeta}^{-n} \right] |\alpha\rangle = 0 \Rightarrow \quad (2.10)$$

$$\Rightarrow (L_n^P - \bar{L}_{-n}^P)|\alpha\rangle = 0, \quad \forall n. \quad (2.11)$$

Una condizione analoga vale per lo stato  $|\beta\rangle$ .

Gli stati di bordo possono essere espansi sugli stati delle rappresentazioni conformi corrispondenti ai campi primari  $|h\rangle = \phi_h(0)|0\rangle$  e ai discendenti  $|N, h\rangle = L_{-n_1} \dots L_{-n_k} |h\rangle$ ,  $\sum_i n_i = N$ , che sono una base completa dello spazio di Hilbert nel settore chiuso. In particolare esisterà uno stato di bordo per ogni rappresentazione  $\{h\}$ . Una soluzione generale (formale) della (2.11) è stata ottenuta da Ishibashi [17]. Lo stato di Ishibashi  $|h\rangle\rangle$  ha l'espressione:

$$|h\rangle\rangle = \sum_N |h, N\rangle \otimes U \overline{|h, N\rangle}, \quad (2.12)$$

dove  $U \overline{|h, N\rangle} = \overline{|h, N\rangle}^*$  è il coniugato di  $\overline{|h, N\rangle}$  ed  $U$  l'operatore antiunitario che commuta con gli  $L_n$ . Per  $n = 0$ , la (2.11) richiede  $h = \bar{h}$ , ovvero gli stati di Ishibashi accoppiano settori olomorfi ed antiolomorfi dell'algebra di Virasoro con lo stesso valore di  $h$ . Una caratteristica di questi stati è che non sono normalizzabili e quindi sostanzialmente diversi dagli stati di bulk. Poiché gli stati di Ishibashi sono ottenuti dalle rappresentazioni di Virasoro, la propagazione nel canale chiuso assume la semplice forma:

$$\langle\langle l | \tilde{q}^{\frac{1}{2}} (L_0^P + \bar{L}_0^P - \frac{c}{12}) | h \rangle\rangle = \chi_h(\tilde{q}) \delta_{lh}. \quad (2.13)$$

Un generico stato di bordo  $|\alpha\rangle$  si può espandere nella base di stati di Ishibashi che

assumeremo completa<sup>3</sup>

$$|\alpha\rangle = \sum_h B_h^\alpha |h\rangle. \quad (2.14)$$

Discutiamo la determinazione dei coefficienti  $B_h^\alpha$ , dovuta a Cardy, [15]. Inserendo lo sviluppo (2.14) nella (2.9) ed assumendo che i caratteri  $\chi_h(\tilde{q})$  siano linearmente indipendenti, otteniamo le seguenti relazioni tra i coefficienti:

$$\sum_{h'} n_{\alpha\beta}^{h'} S_{hh'} = \langle\beta|h\rangle\langle\langle h|\alpha\rangle \quad (\text{condizioni di Cardy}). \quad (2.15)$$

Le (2.15), possono essere risolte mostrando che ad ogni stato  $|\alpha\rangle$  della teoria nel piano corrisponde una particolare rappresentazione generata da  $|h\rangle$  che si propaga nel canale aperto della striscia. Prendendo  $\alpha = \beta$  avremo sicuramente  $n_{\alpha\alpha}^0 \neq 0$ : poniamo  $n_{\alpha\alpha}^0 = \delta_{0\alpha}$  e ricaviamo lo sviluppo dello stato di bordo<sup>4</sup>  $|\alpha\rangle \equiv |\tilde{0}\rangle$ :

$$|\langle\tilde{0}|h\rangle|^2 = S_{0h} \Rightarrow |\tilde{0}\rangle = \sum_h \sqrt{S_{0h}} |h\rangle, \quad \text{a meno di fasi.} \quad (2.16)$$

Lo stato di bordo  $|\tilde{0}\rangle$  corrisponde alle condizioni al contorno spaziali sulla striscia che propagano nel bulk i discendenti del campo identità:

$$Z_{\tilde{0}\tilde{0}} = \chi_0. \quad (2.17)$$

Analogamente otteniamo l'espressione degli altri stati di bordo: utilizzando

$$\sum_{h'} n_{0\alpha}^{h'} S_{h'h} = \langle\alpha|h\rangle\langle\langle h|\tilde{0}\rangle, \quad (2.18)$$

e

$$n_{0\alpha}^{h'} = \delta_{jh'} \quad |\alpha\rangle \equiv |j\rangle, \quad (2.19)$$

<sup>3</sup>L'analisi che segue è valida per teorie contraddistinte da una funzione di partizione diagonale sul toro, contenente solamente campi  $(h, h)$  nel bulk.

<sup>4</sup>Si può controllare che  $S_{0h} \geq 0, \forall h$ .

ricaviamo:

$$\langle \tilde{j} | h \rangle = \frac{S_{jh}}{\sqrt{S_{0h}}}. \quad (2.20)$$

I coefficienti  $B_h^{\tilde{j}}$  sono quindi espressi in termini degli elementi della matrice modulare  $S_{hh'}$ :

$$|\tilde{j}\rangle = \sum_h \frac{S_{jh}}{\sqrt{S_{0h}}} |h\rangle. \quad (2.21)$$

Combinando la (2.15) e la (2.21) si ricava:

$$\sum_i n_{jk}^i S_{il} = \langle \tilde{k} | l \rangle \langle \langle l | \tilde{j} \rangle = \frac{S_{kl} S_{lj}}{S_{0l}}. \quad (2.22)$$

Essendo  $S^2 = 1$ , otteniamo infine:

$$n_{jk}^i = \sum_l \frac{S_{lk} S_{lj} S_{li}}{S_{0l}} \in \mathbb{N}. \quad (2.23)$$

Abbiamo quindi dimostrato che i coefficienti interi  $n_{jk}^i$ , dello sviluppo della funzione di partizione nel canale aperto, 2.4, sono diagonalizzati dalla matrice  $S_{ij}$  ed hanno autovalori  $\lambda_l^{(i)} = \frac{S_{li}}{S_{0l}}$  (nel caso di funzione di partizione diagonale nel bulk).

Un altro risultato importante delle *CFT* razionali è l'identità di Verlinde [18],

$$N_{jk}^i = \sum_l \frac{S_{lk} S_{lj} S_{li}}{S_{0l}}, \quad (2.24)$$

che esprime i coefficienti dell'algebra di fusione  $N_{jk}^i$ , (1.46) e li identifica con gli  $n_{jk}^i$ . In conclusione i coefficienti di fusione parametrizzano la funzione di partizione nel canale aperto: esiste una condizione al bordo conforme per ogni campo primario nel bulk e questa seleziona la propagazione degli stati di bulk in base alle regole di fusione. Un argomento intuitivo per l'uguaglianza tra gli  $n_{jk}^i$  e gli  $N_{jk}^i$  è fornito in Figura 2.5.

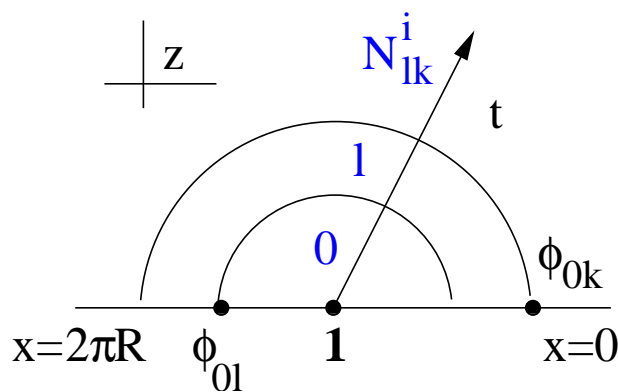


Figura 2.5: A  $t=-\infty$ , le condizioni al contorno sono scelte in modo da propagare solo gli stati della rappresentazione costruita dal campo identità **1**. Ad un certo istante, ad  $x = 2\pi R$ , è inserito l'operatore di bordo  $\phi_{0l}(x = 2\pi R)$ ; esso applicato al vuoto produce l'h.w.  $|l\rangle$  e dunque solo i suoi discendenti vengono propagati. Ad un tempo ancora successivo, ad  $x=0$ , sugli stati della rappresentazione  $l$  dell'algebra di Virasoro è applicato il campo primario di bordo  $\phi_{0k}$ . Si propagheranno dopo stati nella rappresentazione  $i$  con molteplicità data proprio da  $N_{lk}^i$ , con  $\phi_{0l} \times \phi_{0k} = N_{lk}^i \phi_{0i}$ .

### Esempio: modello di Ising

La funzione di partizione sul toro:  $Z = |\chi_0|^2 + |\chi_{\frac{1}{2}}|^2 + |\chi_{\frac{1}{16}}|^2$  identifica tre settori diagonali  $h = \bar{h}$ . In base alle formule del paragrafo precedente, vi corrispondono 3 stati di bordo:  $|\tilde{0}\rangle$ ,  $|\tilde{\varepsilon}\rangle$ ,  $|\tilde{\sigma}\rangle$ , espressi in termini degli stati di Ishibashi  $|0\rangle$ ,  $|\varepsilon\rangle$ ,  $|\sigma\rangle$  nel seguente modo:

$$|\tilde{0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\varepsilon\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\sigma\rangle \equiv |+\rangle, \quad (2.25)$$

$$|\tilde{\varepsilon}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\varepsilon\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\sigma\rangle \equiv |-\rangle, \quad (2.26)$$

$$|\tilde{\sigma}\rangle = |0\rangle - |\varepsilon\rangle \equiv |f\rangle, \quad (2.27)$$

$$(2.28)$$

dove i coefficienti dello sviluppo sono ottenuti dalla matrice  $S$ , nella base dei caratteri  $(\chi_0, \chi_{\frac{1}{2}}, \chi_{\frac{1}{16}})$ :

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Studiando le trasformazioni di parità dello spin, si possono identificare le prime due condizioni al contorno come quelle fisse  $\sigma = +, -$  mentre il terzo caso corrisponde a condizioni al contorno libere. Il contenuto operatoriale delle funzioni di partizione  $Z_{lk}$  è consistente con le regole di fusione:

$$\varepsilon \times \varepsilon = \mathbf{1}; \quad \varepsilon \times \sigma = \sigma; \quad \sigma \times \sigma = \mathbf{1} + \varepsilon. \quad (2.30)$$

In particolare il campo che modifica condizioni al contorno libere in condizioni con spin fissato è, nella notazione del par. 1.2.5,  $\phi_{22}$ ,  $h = \frac{1}{16}$ , ovvero lo spin  $\sigma$ , corrispondente all' accensione di un campo magnetico sul bordo.

## 2.2 Entropia di Affleck e Ludwig

Consideriamo una teoria quantistica in una dimensione spaziale di lunghezza  $L$  ed indichiamo la lunghezza della direzione compattificata con  $\beta \equiv \frac{1}{T}$ , dove  $T$  è la temperatura. Avremo quindi:

$$Z_{ij} = \sum_k N_{ij}^k \chi_k(q) = \langle \tilde{i} | e^{-LH^P} | \tilde{j} \rangle = \text{funzione di partizione termica}. \quad (2.31)$$

Nel limite termodinamico  $\frac{L}{\beta} \rightarrow \infty$ , effettuando una trasformazione modulare sul carattere  $\chi_k(q)$ , otteniamo:

$$\lim_{\tilde{q} \rightarrow 0} Z_{ij}(\tilde{q}) \sim \sum_k N_{ij}^k S_{k0} \chi_0(\tilde{q}) \sim e^{\frac{cL}{6\beta}} \sum_k N_{ij}^k S_{k0}, \quad (2.32)$$

$$\lim_{\tilde{q} \rightarrow 0} \langle \tilde{i} | e^{-\frac{2\pi L}{\beta}(L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12})} | \tilde{j} \rangle = e^{\frac{cL}{6\beta}} \langle \tilde{i} | 0 \rangle \langle 0 | \tilde{j} \rangle; \quad (2.33)$$

da cui:

$$\langle \tilde{i} | 0 \rangle \langle 0 | \tilde{j} \rangle = \sum_k N_{ij}^k S_{k0} \equiv g_i g_j, \quad (2.34)$$



ovvero  $\langle \tilde{i}|0\rangle = \langle \tilde{i}|0\rangle$  e  $g_i = \frac{S_{i0}}{\sqrt{S_{00}}}$ .

Nel limite termodinamico otteniamo l' energia libera e l'entropia:

$$\log Z_{ij} \sim \frac{\pi Lc}{6\beta} + \log g_i g_j, \quad (2.35)$$

$$S = \left(1 - \beta \frac{\partial}{\partial \beta}\right) \log Z_{ij} = \frac{\pi cLT}{3} + \log g_i + \log g_j. \quad (2.36)$$

Il primo termine dell' entropia termica<sup>5</sup> è estensivo ed è caratterizzato dalla carica centrale  $c$ . Il secondo  $\log g_i$  è invece una costante (entropia a  $T = 0$ ) che puo' essere interpretata come entropia propria dello stato fondamentale, [16]. Infatti questo puo' essere degenerare per alcune condizioni al contorno, perché non puo' essere normalizzato indipendentemente per tutte le condizioni al contorno. Notiamo che la degenerazione "rinormalizzata" non è necessariamente un numero intero.

Le costanti  $g_i$  soddisfano il *teorema g*: sono funzioni non crescenti lungo il flusso del gruppo di rinormalizzazione dei gradi di libertà del bordo, quando la restante parte del sistema descritto dalla *CFT* (*bulk*), rimane al punto critico, [16]. Nell' esempio del modello di Ising abbiamo  $g_f = 1$  e  $g_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  per condizioni al contorno sull' anello libere e fissate rispettivamente. Questo è in accordo col flusso del gruppo di rinormalizzazione ottenuto accendendo un campo magnetico sul bordo mediante l'accoppiamento con l'operatore di spin. Questa perturbazione è rilevante e conduce alle condizioni fisse nel limite infrarosso caratterizzate da  $g_{\pm} < g_f$ .

---

<sup>5</sup>Per  $c=1$  è ad esempio l' usuale entropia termica di un corpo nero in una dimensione.

# Capitolo 3

## Entanglement in meccanica quantistica

L'entanglement di uno stato quantistico è la correlazione presente fra le due (o più) parti di cui è composto. Ad esempio, lo stato di singoletto di due spin  $\frac{1}{2}$  è entangled: la misura di un' osservabile di un sottosistema (uno spin) è correlata alla misura nell' altro sottosistema. Il concetto di entanglement ha trovato importanti applicazioni soprattutto nella teoria dell' informazione quantistica, [19] e [20]: stati entangled sono usati per realizzare protocolli di crittografia e teletrasporto o come efficienti supporti per lo scambio dell' informazione.

In questo capitolo, riferendoci per concretezza ad un esempio di due spin  $\frac{1}{2}$ , discuteremo una precisa definizione di entanglement e due sue possibili misure; una, l'entropia di entanglement, sarà in particolare utilizzata in teoria dei campi, (Cap.4).

### 3.1 Matrice densità ed entropia di Von Neumann

È conveniente pensare ad uno stato di un sistema quantistico in termini della sua matrice densità  $\rho$ , hermitiana. Per stati puri  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ , dove  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ , spazio di

Hilbert di dimensione  $d$ , è il proiettore sullo stato che soddisfa:

$$\text{Tr}\rho = \text{Tr}\rho^2 = 1. \quad (3.1)$$

In questo formalismo si possono descrivere anche miscele di stati  $|\psi_i\rangle$  ai quali sono associate probabilità classiche  $p_i \in \mathbb{R}^+$ :

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad \sum_i p_i = 1, \quad 0 \leq p_i \leq 1, \quad \text{Tr}\rho = 1. \quad (3.2)$$

Un esempio tipico è la miscela termica, un sistema quantistico posto in contatto con un bagno termico, con  $p_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{Z}$ ,  $\beta = \frac{1}{T}$ ,  $T$  temperatura,  $H$  hamiltoniana con  $H|\psi_i\rangle = E_i|\psi_i\rangle$  e  $Z = \sum_{\text{stati}} e^{-\beta H}$  funzione di partizione. Per stati miscela, vale la proprietà:  $\text{Tr}\rho^2 < \sum_{ij} p_i p_j = 1$ ; l'evoluzione temporale unitaria, come per stati puri, è regolata dall'equazione di Von Neumann. Più in generale un qualunque stato non puro può essere descritto da una combinazione convessa di matrici densità  $\rho_i$  e di numeri reali  $p_i$ , come nella (3.2):

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i. \quad (3.3)$$

Poiché una matrice densità è hermitiana, esiste una base  $\{|a_i\rangle\}$  di  $\mathcal{H}$  di suoi autovettori ortonormali, relativi agli autovalori  $\{\lambda_i\}$  positivi e con somma uno per cui:

$$\rho = \sum_i \lambda_i |a_i\rangle\langle a_i|, \quad (3.4)$$

Si definisce l'entropia di Von Neumann per lo stato descritto da  $\rho$  come:

$$S_\rho = - \sum_i \lambda_i \log \lambda_i = -\text{Tr}\rho \log \rho, \quad (3.5)$$

essa quantifica l'incertezza sullo stato del sistema corrispondente alla miscela e si annulla per stati puri:<sup>1</sup> si ha infatti  $0 \leq S_\rho \leq \log d$ , con il limite superiore corrispondente a  $\rho = \frac{1}{d}\mathbf{1}$  ovvero stati completamente miscelati. Notiamo che per  $\lambda_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{Z}$ ,  $S_\rho$  coincide con l'usuale entropia termica,  $S^T(\beta)$  e la somma è su tutti gli autostati dell'hamiltoniana:

$$S^T(\beta) = \left(1 - \beta \frac{\partial}{\partial \beta}\right) \log Z = \beta(U - F), \quad (3.6)$$

con  $U$  energia media ed  $F$  energia libera.

## 3.2 Entanglement di sistemi bipartiti

Si consideri un sistema quantistico composto di due o più parti (ad esempio il sistema di due spin  $\frac{1}{2}$ ); supponiamo che il sistema sia descritto da uno stato puro  $|\psi\rangle$ , ovvero privo di indeterminazioni di natura classica. Ad esempio, ma non necessariamente,  $|\psi\rangle$  può essere un autostato dell'energia (ad esempio lo stato fondamentale) e di altre osservabili. La matrice densità  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  soddisfa  $\text{Tr}\rho^2 = 1$  e l'entropia di Von Neumann associata è nulla.

Consideriamo le proprietà quantistiche dei due sottosistemi  $A, B$  di cui è composto. Lo stato si dirà non entangled se lo stato  $|\psi\rangle$  può essere scritto in forma fattorizzata, ad esempio lo stato ( $S = 1, S_z = 1$ ) di due spin:

$$|\psi_{11}\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle. \quad (3.7)$$

Lo stato è detto entangled (“aggrovigliato”, “intrecciato”) se non si può scrivere in forma fattorizzata, ad esempio il singoletto ( $S=0$ ):

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle). \quad (3.8)$$

---

<sup>1</sup>Un'altra interpretazione dell'entropia di Von Neumann è quantità di informazione classica che può essere codificata in uno stato quantistico, [20].

La forma fattorizzata (3.7) implica l'assenza di correlazioni fra le misure effettuate sui due sottosistemi. Lo stato  $|\psi_{11}\rangle$  è prodotto di autostati  $S_z^A = S_z^B = \frac{1}{2}$  indipendenti dei due spin, la misura di  $S_z^A$  darà  $\frac{1}{2}$  indipendentemente dall'osservazione di  $S_z^B$ . Viceversa per lo stato di singoletto  $|\psi_0\rangle$  l'assenza di fattorizzazione implica che il risultato della misura di  $S_z^A$  dipende dall'esito della misura di  $S_z^B$  (*paradosso EPR, correlazioni di Bell*). In particolare il singoletto è un autostato delle osservabili globali ma non di quelle dei sottosistemi.

Come accennato nell'introduzione, le correlazioni di Bell possono essere utilizzate per la trasmissione di segnali a livello quantistico e per caratterizzare le proprietà di stati fondamentali a temperatura zero (Cap.4).

Un esempio meno ovvio di stato non entangled è dato da:

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle) = |\uparrow\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle), \quad (3.9)$$

che è autostato di  $S_z^A$  e  $S_x^B$ ; non appare in forma fattorizzata ma vi può essere riscritto mediante un cambiamento di base nel sottosistema  $B$ . Uno stato è quindi entangled se non è fattorizzabile mediante trasformazioni unitarie nei sottosistemi ("locali")  $U_l$ :

$$U_l \in U(2) \otimes U(2). \quad (3.10)$$

Si noti che l'entanglement concerne gli esiti di misure quantistiche sui due sottosistemi e non riguarda le interazioni usualmente descritte da termini nell'hamiltoniana. Naturalmente i due stati di singoletto e tripletto prima considerati possono essere realizzabili fisicamente come stati fondamentali di un'hamiltoniana  $H$  con termini locali  $\mathbf{h} \cdot (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)$  e d'interazione  $J\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$  (vedi analisi al par. 3.4). L'entanglement è una proprietà quantistica che prescinde dal valore relativo dei parametri  $(h, J)$  dell'hamiltoniana  $H$  (si noti che per  $-J \gg h > 0$ ,  $|\psi_{11}\rangle$  sarebbe infatti più correlato di  $|\psi_0\rangle$ ).

L'entanglement di un generico stato:

$$|\psi_{\mathcal{A}}\rangle = a_{11}|\uparrow\downarrow\rangle + a_{12}|\uparrow\uparrow\rangle + a_{21}|\downarrow\uparrow\rangle + a_{22}|\downarrow\downarrow\rangle, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

puo' essere definito più precisamente nel seguente modo. La matrice  $\mathcal{A}$  puo' essere diagonalizzata mediante la doppia trasformazione unitaria  $\mathcal{A} = U\Lambda V$ ,  $U, V \in U(2)$  (decomposizione di Schmidt) ottenendo:

$$|\psi_{\mathcal{A}}\rangle = \sum_{i=1}^{n_S} \sqrt{\lambda_i} |a_i\rangle \otimes |b_i\rangle, \quad (3.12)$$

dove le fasi degli stati sono scelte in modo da avere coefficienti reali e non negativi  $\lambda_i$ , (nell'esempio,  $|a_i\rangle, |b_i\rangle = |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ ).

In questa base le matrici densità ridotte  $\rho_A$  e  $\rho_B$ , relative ai due sottosistemi sono entrambe diagonali:

$$\rho_A \equiv \text{Tr}_B(|\psi_{\mathcal{A}}\rangle\langle\psi_{\mathcal{A}}|) = \sum_{i=1}^{n_S} \lambda_i |a_i\rangle\langle a_i|, \quad (3.13)$$

$$\rho_B \equiv \text{Tr}_A(|\psi_{\mathcal{A}}\rangle\langle\psi_{\mathcal{A}}|) = \sum_{i=1}^{n_S} \lambda_i |b_i\rangle\langle b_i|. \quad (3.14)$$

Lo stato puro  $|\psi_{\mathcal{A}}\rangle$ , relativo all'intero sistema si definisce entangled, relativamente alla bipartizione  $A, B$  se le matrici densità ridotte descrivono miscele:

$$\text{Tr}_A \rho_A^2 = \sum_i \lambda_i^2 = \text{Tr}_B \rho_B^2 < 1. \quad (3.15)$$

Poiché  $\text{Tr}|\psi_{\mathcal{A}}\rangle\langle\psi_{\mathcal{A}}| = \text{Tr}_A \rho_A = 1$ , la condizione equivale ad avere un numero di termini superiore ad uno nella decomposizione di Schmidt (3.12), ( $n_S$  indice di Schmidt maggiore di uno).

Utilizziamo le matrici densità ridotte per discutere gli esiti delle misure nei sottosistemi per stati entangled e non entangled. La matrice  $\rho_A$  descrive lo stato del

sottosistema  $A$  quando non si osserva  $B$ , ovvero si somma su tutte le sue configurazioni. Nel caso dello stato non entangled  $|\psi_{11}\rangle$ ,  $\rho_A = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$ ; il sottosistema è in uno stato puro.

Nel caso del singoletto  $|\psi_0\rangle$  entangled,  $\rho_A = \text{Tr}_B(|\psi_0\rangle\langle\psi_0|) = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{1}{2}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|$ , il sottosistema è una miscela (con distribuzione uniforme  $\rho_A = \frac{1}{2}\mathbf{1}_A$ ). La correlazione quantistica tra le due parti si manifesta nel fatto che l'indeterminazione sullo stato di  $B$  implica una indeterminazione in  $A$ . Inoltre lo stato di singoletto non può essere creato avendo accesso separatamente ai due sottosistemi:  $|\psi_0\rangle\langle\psi_0| \neq \rho_A \otimes \rho_B$  (un stato entangled non può essere creato localmente).

La definizione di entanglement attraverso la (3.15) ne mostra l'indipendenza sotto trasformazioni unitarie nei sottosistemi  $U_l = U_A \otimes U_B$ ,  $\rho_A \rightarrow U_A \rho_A U_A^\dagger$ ,  $\rho_B \rightarrow U_B \rho_B U_B^\dagger$ ; siano esse cambi di base o interazioni (evoluzioni) locali.

D'altro canto, le manipolazioni globali dell'intero sistema, corrispondenti a trasformazioni unitarie  $U(4)$ , possono modificare l'entanglement.

Poiché gli stati puri sono descritti dalla matrice densità  $\rho = |\psi_{\mathcal{A}}\rangle\langle\psi_{\mathcal{A}}| = \text{diag}(1, 0, 0, 0)$  con un solo autovalore non nullo, essi saranno parametrizzati dalle trasformazioni  $U \in U(4)/U(3) = S^7$ , la sfera in  $\mathbb{R}^8$  (ovvero i parametri della matrice  $\mathcal{A}$ , (3.11), complessa normalizzata da  $\text{Tr}\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger = 1$ ). Possiamo concludere che gli stati entangled di 2 spin bipartiti sono parametrizzati dal coset:

$$\frac{S^7}{SU(2) \otimes SU(2)} = \frac{S^7}{S^3 \times S^3}, \quad (3.16)$$

ovvero da un angolo ed (al più) un insieme di valori discreti. Sono infatti entangled gli stati che generalizzano il singoletto:

$$|\psi_\theta\rangle = \cos\theta|\uparrow\downarrow\rangle + \sin\theta|\downarrow\uparrow\rangle, \quad (3.17)$$

ma anche,

$$|\psi'_\phi\rangle = \cos\phi|\uparrow\uparrow\rangle + \sin\phi|\downarrow\downarrow\rangle. \quad (3.18)$$

Per  $\theta = \phi = \pm \frac{\pi}{4}$ , questi stati sono detti stati di Bell, [19].

### 3.3 Entropia di entanglement

Sia  $|\psi\rangle$  uno stato in  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , indichiamo con  $\mathcal{M}(|\psi\rangle)$  una misura di entanglement dello stato, invariante per trasformazioni  $U_i$ . Riferendosi al precedente paragrafo richiederemo che  $\mathcal{M}(|\psi\rangle)$  sia nulla per  $|\psi_{11}\rangle$  e massima per  $|\psi_0\rangle$  (per cui  $\rho_A \propto \mathbf{1}_A$ ). Considerando le rispettive matrici densità ridotte e la discussione del par. 3.1, una possibilità è porre, ( $\lambda_i$  e  $n_S$  come nella (3.12)):

$$\mathcal{M}(|\psi\rangle) = S_{\rho_A} \equiv S_{\psi}(A) = -\text{Tr}_{A\rho_A} \log \rho_A = -\sum_{i=1}^{n_S} \lambda_i \log \lambda_i, \quad (3.19)$$

ovvero l'entropia di Von Neumann della matrice densità ridotta  $\rho_A$ , detta entropia di entanglement, [21]<sup>2</sup>. La seconda notazione,  $S_{\psi}(A)$ , è usata per evidenziare la dipendenza dallo stato  $|\psi\rangle$  e dai gradi di libertà del sottosistema A che non viene tracciato (*entropia geometrica*); evidentemente  $S_{\psi}(A \cup B) = S_{\rho} = 0$  se  $|\psi\rangle$  è uno stato puro.

L'entropia statistica è proporzionale al logaritmo del numero di stati compatibili con i parametri termodinamici; l'entropia di entanglement ha un'interpretazione analoga in quanto è proporzionale al logaritmo del numero di stati puri in cui può trovarsi il sottosistema A se non si ha alcuna informazione sullo stato di B. Tale numero è anche lo stesso degli stati in cui, a sua volta, può trovarsi B se non sia ha alcuna informazione sullo stato di A. Si noti comunque la differenza importante che l'entropia statistica è una proprietà dell'intero sistema a temperatura T mentre l'entropia di entanglement è specifica di un singolo stato del sistema (diviso in due parti).

L'entropia d'entanglement (3.19) ha le seguenti proprietà:

---

<sup>2</sup>Questo non esclude che altre funzioni dei soli autovalori di  $\rho_A$ , o  $\rho_B$  non possano essere utilizzate.



- è invariante per trasformazioni unitarie in  $U(d_A) \otimes U(d_B)$  (cambi di base  $U_l$ ),
- è continua nei  $\lambda_i$ ,
- è non estensiva, valendo dalla (3.12),  $S_{\rho_A} = S_{\rho_B}$ ,
- è additiva, se  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$   $S_{\psi \otimes \phi}(A) = S_\psi(A) + S_\phi(A)$ .

Queste proprietà identificano univocamente la (3.19), [22], come misura di entanglement per stati puri bipartiti.

### 3.4 Entropia delle miscele

Uno stato miscela, descritto dalla matrice densità  $\rho$ , si dice entangled se<sup>3</sup>:

$$\rho \neq \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad \text{con } |\psi_i\rangle \text{ fattorizzato } \forall i, \quad (3.20)$$

questa definizione è l'estensione naturale del caso puro. Le  $p_i$  sono probabilità classiche associate alla preparazione dello stato  $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . Una possibile (ma non unica) quantificazione dell'entanglement per stati miscela è l'entanglement di formazione, [24]:

$$E(\rho) \equiv \min \sum_i p_i S_{\rho_A^i}, \quad (3.21)$$

dove  $S_{\rho_A^i}$  è l'entropia di entanglement di  $|\psi_i\rangle$  ed il minimo è inteso su tutte le possibili rappresentazioni di  $\rho$  del tipo (3.20). Questa quantità è nulla se e solo se tutti gli  $|\psi_i\rangle$  sono fattorizzati. In generale  $E(\rho)$  è difficilmente calcolabile, una formula esplicita costruita dagli autovalori della matrice densità  $\rho$ , [25], è nota solo per dimensioni degli spazi di Hilbert dei due sottosistemi  $d_A, d_B$  uguali a due (*qbits*).

Illustriamo adesso l'entanglement di miscele in un esempio semplice: consideriamo una miscela termica di due spin a temperatura  $T = \frac{1}{\beta}$ , [26] e [27], con

---

<sup>3</sup>L' analogo della decomposizione di Schmidt è un criterio che permetta di stabilire per quali classi di matrici densità la (3.20) è verificata, per un' introduzione si consulti [23].

hamiltoniana:

$$H = h(\sigma_z^A + \sigma_z^B) + J\boldsymbol{\sigma}^A \cdot \boldsymbol{\sigma}^B; \quad J > 0; \quad (3.22)$$

gli spin quantistici  $\sigma_i^A, \sigma_i^B$  sono descritti da matrici di Pauli,  $h$  è il campo magnetico e  $J$  è l'accoppiamento antiferromagnetico. Nella base dello spin totale  $\mathbf{S}, S_z$  lo spettro è:

$$H = \begin{cases} -3J & |\psi_0\rangle, \\ J & \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), \\ 2h + J & |\uparrow\uparrow\rangle, \\ -2h + J & |\downarrow\downarrow\rangle. \end{cases} \quad (3.23)$$

Da cui:

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{3J\beta} |\phi_-\rangle\langle\phi_-| + e^{-J\beta} |\phi_+\rangle\langle\phi_+| + e^{(2h-J)\beta} |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| + e^{-(2h+J)\beta} |\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow|, \quad (3.24)$$

$$Z = e^{3J\beta} + e^{-J\beta} + e^{(2h-J)\beta} + e^{-(2h+J)\beta}. \quad (3.25)$$

L'entanglement di formazione puo' essere ottenuto dalla formula (la scelta della base del logaritmo è convenzionale):

$$E(\rho) = -x \log_2(x) - (1-x) \log_2(1-x); \quad x = \frac{1 + \sqrt{1-C^2}}{2}, \quad (3.26)$$

dove  $C$  è la *concurrence*, [25]:

$$C = \max\{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0\}, \quad (3.27)$$

e i  $\lambda_i$  sono gli autovalori ordinati in senso decrescente della matrice:

$$R = \sqrt{\rho Q \rho^* Q}; \quad Q = \sigma_2 \otimes \sigma_2. \quad (3.28)$$

Anche se la definizione appare complicata il calcolo è semplice, almeno con un

programma di calcolo simbolico. Otteniamo:

$$C = \begin{cases} 0 & \text{se } e^{4J\beta} < 3 \\ \frac{e^{4J\beta} - 3}{1 + e^{4J\beta} + e^{-2h\beta} + e^{2h\beta}} & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (3.29)$$

L' entropia di entanglement  $S_{\rho_A}$  è invece:

$$S_{\rho_A} = -\alpha_1 \log(\alpha_1) - \alpha_2 \log(\alpha_2), \quad (3.30)$$

$\alpha_i$  autovalori della matrice densità ridotta:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2Z} (2e^{(2h-J)\beta} + e^{3J\beta} + e^{-J\beta}),$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2Z} (2e^{-(2h+J)\beta} + e^{3J\beta} + e^{-J\beta}).$$

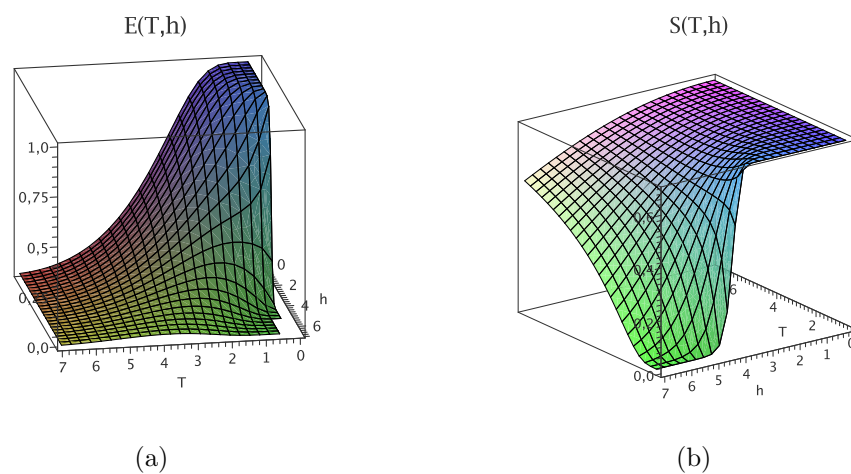


Figura 3.1: (a) Entanglement di formazione  $E(T, h)$ , (b) Entropia di Von Neumann  $S(T, h)$

Discutiamo qualitativamente i risultati (3.30) e (3.26), mostrati in Figura 3.1.

A  $T=0$  in campo nullo il sistema di due spin si trova nello stato fondamentale massimamente entangled di singoletto  $|\psi_0\rangle$ ; aumentando il campo magnetico per  $J = 2$ ,  $h = 4$  si assiste ad una “transizione di fase”, lo stato fondamentale di-

venta  $|\downarrow\downarrow\rangle$ , che è non entangled. Correttamente il passaggio è segnalato sia dall'entanglement di formazione che dall'entropia di Von Neumann, che coincidono a  $T=0$ , modulo la scelta della base del logaritmo. Un'altra interessante osservazione è l'annullarsi della concurrence e conseguentemente dell'entanglement a temperature superiori a  $T_c = \frac{4J}{\log 3} \sim 8$ , qualunque sia  $h$ ; per sistemi molto più complessi questo potrebbe essere un indizio della fattorizzazione della matrice densità  $\rho \rightarrow \rho_A \otimes \rho_B$  ad alte temperature. Altri esempi di questo fenomeno saranno discussi nei prossimi capitoli.

# Capitolo 4

## Entropia di entanglement in teoria dei campi bidimensionale

### 4.1 Introduzione

In questo capitolo consideriamo l'estensione dei concetti di entanglement ed entropia di Von Neumann (Cap. 3) ad un sistema descritto da una teoria di campo in  $(1 + 1)$  dimensioni. Si presentano nuove problematiche, in larga parte inesplorate, dovute al limite termodinamico (infiniti gradi di libertà) e al ruolo degli stati quantistici in questo limite. Notiamo che:

- Lo stato  $|\psi\rangle$  può contenere particelle con vari numeri quantici (spin, carica,...) eventualmente diversi tra loro. Corrispondentemente lo spazio di Hilbert è del tipo:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \dots \otimes \mathcal{H}_N; \quad (4.1)$$

bisogna chiarire quali gradi di libertà sono osservati e quali tipi di correlazione si è interessati a quantificare. Nell'esempio più semplice, di cui ci occuperemo esclusivamente, si suppone di suddividere il sistema in due parti A, B, una delle quali (B) non è accessibile. Corrispondentemente si traccia sui gradi di libertà in B e si ottiene un problema ridotto in A descritto in generale

da una miscela di stati (vedi definizione di entanglement) e da un' entropia geometrica  $S_\psi(A)$ , Figura 4.1.

- In teoria dei campi lo stato di vuoto  $|0\rangle$  puo' essere isolato con il limite  $T \rightarrow 0$  di temperatura nulla ed in generale questa è una procedura ben definita, che permette di studiarne l'entanglement. Questo studio è stato proposto per analizzare le transizione di fase quantistiche a  $T = 0$  nei sistemi  $(1 + 1)$  e  $(2 + 1)$  dimensionali (Cap.7).
- Per analizzare le proprietà degli stati eccitati occorre selezionarli nel sistema creando eccitazioni locali (campo  $\psi(x, t)$ ) o mediante meccanismi termici. Le miscele termiche assumono quindi un' importanza particolare nello studio delle proprietà di entanglement degli stati eccitati della teoria dei campi ed è interessante capire eventuali relazioni fra entropie termiche e geometriche (discuteremo un esempio nei Cap. 5 e 6).
- Compaiono notevoli complicazioni tecniche. È molto difficile determinare autovalori ed autofunzioni delle matrici densità ridotte. I calcoli per l' entropia geometrica di entanglement richiedono integrazioni funzionali su geometrie complicate. I metodi esatti delle teorie conformi e integrabili (Cap.1 e 2) permettono di ottenere dei risultati analitici generali in una dimensione spaziale.

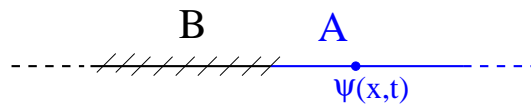


Figura 4.1: partizione geometrica in sottosistemi della teoria di campo in una dimensione spaziale.

## 4.2 Funzione di partizione e metodo delle repliche

In questo è fornita una formula generale per il calcolo dell' entropia di entanglement di un sistema bipartito descritto da una teoria di campo. Il caso di una teoria invariante conforme è descritto nel paragrafo successivo, [28] e [29].

Sia:

$$S[\psi] = \int_{\mathbb{R}} d\tau \mathcal{L}_E(\psi(x, \tau)), \quad (4.2)$$

l' azione di una teoria di campo bidimensionale,  $\mathcal{L}_E(\psi(x, \tau))$  la lagrangiana euclidea e  $x$  variabile reale.

Una possibile base per lo spazio di Hilbert degli stati, qualora non sia noto lo spettro dell' hamiltoniana, è data dai ket  $\{|\psi(x, \tau)\rangle\}$  che specificano il valore del campo nel punto  $(x, \tau)$  dello spazio tempo:

$$\hat{\psi}(x, \tau)|\psi(x, \tau)\rangle = \psi(x, \tau)|\psi(x, \tau)\rangle. \quad (4.3)$$

Formalmente si puo' esprimere la funzione di partizione  $Z(\beta)$  del sistema quantistico a temperatura finita  $\beta = \frac{1}{T}$ , con l' integrale funzionale<sup>1</sup>:

$$Z(\beta) = \sum_{\text{stati}} e^{-\beta H} = \int_{\psi(x, \tau) = \psi(x, \tau + \beta)} \mathcal{D}[\psi] e^{-\int_0^\beta d\tau \mathcal{L}_E(\psi(x, \tau))}. \quad (4.4)$$

La media termica è ottenuta prendendo condizioni al contorno periodiche temporali per il campo  $\psi(x, \tau)$ .

Lo stato quantistico a molte particelle è così una miscela termica (3.2), la sua matrice densità non normalizzata è tale che:

$$Tr(\tilde{\rho}) = Z(\beta). \quad (4.5)$$

---

<sup>1</sup>Nel caso di una teoria bosonica libera equivale al calcolo del determinante del laplaciano con particolari condizioni al contorno.

Consideriamo una partizione del sistema: identifichiamo il sottosistema A con un segmento di lunghezza L. Per definire la traccia parziale sul sottosistema  $B = \mathbb{R} \setminus A$ ,

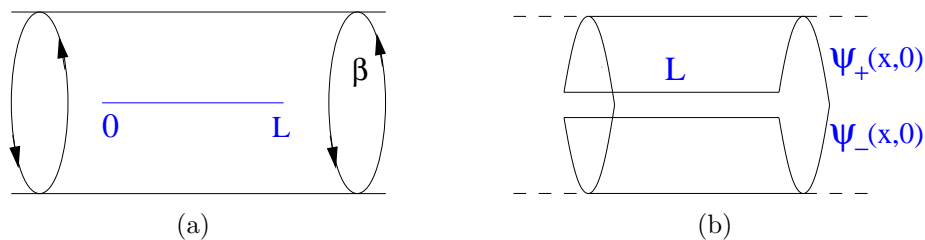


Figura 4.2: (a) usuale spazio tempo d' integrazione cilindrico per l' integrale funzionale (4.4) con evoluzione nel tempo immaginario; (b) taglio corrispondente al sottosistema A.

vedi Figura 4.2(b), lo spazio tempo cilindrico è tagliato lungo L ed ai bordi del taglio sono imposte le condizioni al contorno  $C(0, L)$ :

$$C(0, L) = \begin{cases} 0 \leq x \leq L, & x \in \mathbb{R}, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \psi(x, \varepsilon) = \psi_+(x, 0), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \psi(x, \varepsilon) = \psi_-(x, 0). \end{cases} \quad (4.6)$$

L' integrale funzionale:

$$\rho_A(\psi_+, \psi_-) = \frac{1}{Z(\beta)} \int_{C(0,L)} \mathcal{D}[\psi] e^{-S[\psi]}, \quad (4.7)$$

è l'elemento di matrice di  $\rho_A$ , normalizzata ( $Tr_A \rho_A = 1$ ) tra gli stati  $|\psi_+(x, 0)\rangle$  e  $|\psi_-(x, 0)\rangle$ ,  $0 \leq x \leq L$ .

L'entropia di Von Neumann puo' essere ottenuta con il metodo delle repliche calcolando la potenza n-esima di  $\rho_A$ :

$$S_{\rho_A} = -Tr_A \rho_A \log \rho_A = - \left. \frac{d}{dn} \right|_{n=1} Tr \rho_A^n. \quad (4.8)$$

Naturalmente questa espressione presuppone la continuazione per valori reali dell' esponente; in particolare per  $n=1+\varepsilon$ ,  $\varepsilon \geq 0$ . Questo è un problema delicato che deve essere analizzato caso per caso.



Considerando le  $n$  repliche della Figura 4.2(b) si ha:

$$\text{Tr} \rho_A^n = \frac{Z_n(A)}{Z^n} = \frac{1}{Z^n} \int_{C^{(n)}(0,L)} \mathcal{D}^{(n)}[\psi] e^{-S^{(n)}[\psi]}, \quad (4.9)$$

dove le condizioni  $C^{(n)}(0, L)$  garantiscono la corretta evoluzione nel tempo euclideo:

$$C^{(n)}(0, L) = \begin{cases} 0 \leq x \leq L, & x \in \mathbb{R}, \\ \psi_+^i(x, 0) = \psi_-^{i+1}(x, 0), & i = 1, \dots, n-1; \\ \psi_+^n(x, 0) = \psi_-^1(x, 0). \end{cases} \quad (4.10)$$

L'azione  $S^{(n)}[\psi]$  è uguale a  $\sum_{i=1}^n S[\psi^i]$ , dove  $S[\psi^i]$  è per ogni campo come nella (4.2)<sup>2</sup>. Lo spazio tempo d'integrazione per il metodo delle repliche è così una superficie di Riemann  $\mathcal{R}^n$  composta da  $n$  cilindri infiniti uniti lungo un taglio di ordine  $n$  e lunghezza finita  $L$  (taglio di radice  $n$ -esima). L'invarianza conforme semplifica notevolmente il calcolo dell'integrale funzionale (4.9) in quanto superfici di Riemann ad  $n$ -fogli possono essere mappate nel piano complesso con trasformazioni conformi.

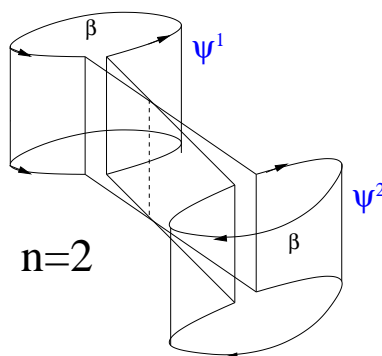


Figura 4.3: Spazio tempo per il calcolo di  $\text{Tr} \rho_A^2$ . Si tratta di una superficie di Riemann in  $w = x + i\tau$  con un taglio di radice.

<sup>2</sup>Si può pensare che ciascun campo replicato  $\psi^i$  si trovi nel solo foglio  $i$ -esimo di  $\mathcal{R}^n$  e che soddisfi le condizioni  $C^{(n)}(0, L)$  al contorno sul corrispondente foglio.

### 4.3 Entropia di entanglement al punto critico

Nel limite  $\beta \rightarrow \infty$  ( $T \rightarrow 0$ ) il sistema si trova nello stato fondamentale  $|0\rangle$ ; l'entropia di entanglement  $S(L)$  è l'unica misura di entanglement possibile. Dal punto di vista geometrico, per  $\beta \rightarrow \infty$ , la superficie  $\mathcal{R}^n$  per il calcolo della (4.9) diventa  $n$  copie dell'intero piano complesso  $\mathbb{C}$ , unite lungo il taglio di lunghezza  $L$ .

Possiamo scrivere la (4.9) come ampiezza di probabilità vuoto-vuoto (vedi anche la (1.18)):

$$\text{Tr} \rho_A^n \equiv \frac{Z_n(A)}{Z^n} = \frac{\langle 0|0\rangle_{\mathcal{R}^n}}{[\langle 0|0\rangle_{\mathbb{C}}]^n}. \quad (4.11)$$

Studiamo le proprietà di  $\langle 0|0\rangle_{\mathcal{R}^n}$  sotto trasformazioni conformi infinitesime.

La superficie  $\mathcal{R}^n$  si mappa in un singolo piano complesso  $\mathbb{C}$  con la trasformazione:

$$z = \left( \frac{w-u}{w-v} \right)^{\frac{1}{n}}; \quad |u-v| \equiv L. \quad (4.12)$$

Dalla legge di trasformazione del tensore energia impulso (1.30), espressa dalla derivata schwartziana e da  $\langle T^{(n)}(z) \rangle_{\mathbb{C}} = 0$  si ricava<sup>3</sup>:

$$\langle T^{(n)}(w) \rangle_{\mathcal{R}^n} = \frac{nc}{12} \{z, w\} = \frac{nc}{24} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \frac{(u-v)^2}{(w-u)^2(w-v)^2}. \quad (4.13)$$

Nella (4.13),  $T^{(n)}(w)$  è il tensore energia impulso delle  $n$  identiche *CFT*, ognuna con carica centrale  $c$  e tensore energia impulso  $T(w)$  che vengono mappate nel piano complesso:

$$T^{(n)}(w) = \sum_{i=1}^n T(w) = nT(w). \quad (4.14)$$

Seguendo la derivazione del lavoro [28], possiamo osservare che la (4.13) ha la stessa espressione dell'identità di Ward, (1.24), applicata al correlatore tra i due campi

---

<sup>3</sup>Si può osservare che la trasformazione (4.12) è una composizione di una trasformazione di Moebius e di una radice  $n$ -esima. Vale una corrispondente legge di composizione per le derivate di Schwartz che semplifica il calcolo della derivata di Schwartz per la trasformazione totale (4.12).

primari  $\langle \sigma(u, \bar{u}) \tilde{\sigma}(v, \bar{v}) \rangle_{\mathbb{C}}$  con pesi conformi  $h_{\sigma} = h_{\tilde{\sigma}} = \bar{h}_{\sigma} = \bar{h}_{\tilde{\sigma}} = \frac{c}{24} (n - \frac{1}{n})$ :

$$\langle T^{(n)}(w) \sigma(u) \tilde{\sigma}(v) \rangle_{\mathbb{C}} = h_{\sigma} \frac{(u-v)^2}{(w-u)^2 (w-v)^2} \langle \sigma(u) \tilde{\sigma}(v) \rangle_{\mathbb{C}}; \quad (4.15)$$

ovvero:

$$\langle T^{(n)}(w) \rangle_{\mathcal{R}^n} \sim \frac{\langle T^{(n)}(w) \sigma \sigma \rangle_{\mathbb{C}}}{\langle \sigma \sigma \rangle_{\mathbb{C}}}. \quad (4.16)$$

Bisogna precisare che l'uguaglianza delle espressioni (4.13) e (4.15) è corretta se la coordinata  $w \in \mathcal{R}^n$  nella (4.13) puo' essere pensata come coordinata in  $\mathbb{C}$ , cioè in un singolo foglio, nella (4.15). Questo è il caso perché tutte le  $n$  CFT hanno proprietà di trasformazioni identiche indipendenti dall' $i$ -esimo foglio della superficie di Riemann in cui si trova  $w$ .

Poiché il tensore energia impulso si ottiene da variazioni delle coordinate dell'azione:

$$\langle T^{(n)}(w) \rangle_{\mathcal{R}^n} \equiv \frac{\int_{\mathcal{R}^n} \mathcal{D}^{(n)}[\psi] T^{(n)}(w) e^{-S^{(n)}[\psi]}}{\int_{\mathcal{R}^n} \mathcal{D}^{(n)}[\psi] e^{-S^{(n)}[\psi]}} = \frac{\delta \langle 0|0 \rangle_{\mathcal{R}^n}}{\langle 0|0 \rangle_{\mathcal{R}^n}}, \quad (4.17)$$

possiamo confrontare la (4.16) e (4.17) e concludere che che  $\text{Tr} \rho_A^n$  trasforma come la funzione a due punti  $\langle \sigma(u, \bar{u}) \tilde{\sigma}(v, \bar{v}) \rangle_{\mathbb{C}}$ . Per l'invarianza conforme questo è sufficiente a stabilire:

$$\frac{\langle 0|0 \rangle_{\mathcal{R}^n}}{[\langle 0|0 \rangle_{\mathbb{C}}]^n} = \tilde{k}(n) \langle \sigma(u) \tilde{\sigma}(v) \rangle_{\mathbb{C}}; \quad \tilde{k}(1) = 1, \quad (4.18)$$

dove la costante di normalizzazione  $\tilde{k}$  puo' dipendere da  $n$  ma non da  $L$ . Applicando la definizione (4.8) dell'entropia di entanglement all'espressione (includendo la dipendenza antiolomorfa):

$$\langle \sigma(u, \bar{u}) \tilde{\sigma}(v, \bar{v}) \rangle_{\mathbb{C}} = \frac{1}{|u-v|^{\frac{c}{6}(n-\frac{1}{n})}}, \quad (4.19)$$

si ottiene il risultato generale,

$$S(L) = \frac{c}{3} \log \left( \frac{L}{a} \right) + k, \quad L = |u - v|, \quad k = \text{cost}, \quad (4.20)$$

che mostra come l'entropia di entanglement in *CFT* sia univocamente parametrizzata dalla carica centrale, [30]. Notiamo che la costante  $a$  è un cut off ultravioletto che deve essere introdotta affinché l'argomento del logaritmo sia adimensionale (per una teoria regolarizzata su reticolo è il passo reticolare). L'importante risultato (4.20) è stato verificato in simulazioni numeriche di sistemi di spin unidimensionali, [23] e nelle soluzioni ottenute con i metodi dei sistemi esattamente integrabili, [31].

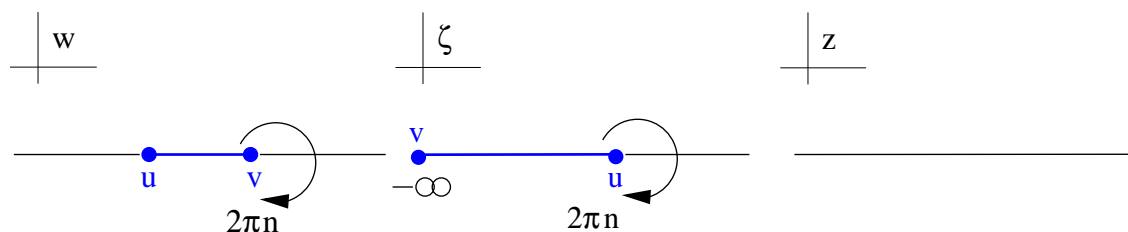


Figura 4.4: Composizione di trasformazioni conformi dalla superficie di Riemann al piano complesso.

## 4.4 Commenti sulla forma generale dell' entropia di entanglement in QFT

Argomenti dimensionali [32], suggeriscono la seguente forma dell' entropia di entanglement (o entropia geometrica) dello stato fondamentale bipartito in due regioni  $A$  e  $B$  dello spazio  $d$  dimensionale:

$$S(A) = k_{d-1} \frac{|\partial A|}{a^{d-1}} + k_{d-2} \frac{|R|^{d-2}}{a^{d-2}} + \dots + \text{termini di massa}. \quad (4.21)$$

In questa espressione le  $k_i$  sono delle costanti dipendenti dalla scelta del cut-off  $a$ ,  $|\partial A|$  è il volume del bordo  $(d - 1)$  dimensionale che separa  $A$  e  $B$ ,  $|R|^{d-2}$  e

termini successivi di dimensione inferiore sono fattori geometrici che dipendono dalla forma del bordo (metrica della geometria estrinseca). I termini di massa contengono analoghe espressioni in cui potenze di  $a$  sono sostituite da potenze di  $m$ . Lo sviluppo (4.21) puo' essere verificato esplicitamente per teorie libere nello spazio euclideo infinito, [32].

Un aspetto importante è l'assenza del termine proporzionale al volume di  $A$ ,  $|A|$  per cui il termine dominante è dato dalla superficie del bordo  $\partial A = \partial B$ ,  $|\partial A|$ , che separa le regioni  $A$  e  $B$  (*legge dell'area*)<sup>4</sup>. Essenzialmente la dipendenza dal volume è esclusa dalla proprietà di reciprocità dell'entropia  $S(A) = S(B) \Rightarrow S(|\partial A|) = S(|\partial B|)$ . Naturalmente i termini dipendenti dal cut off devono essere cancellati dalla rinormalizzazione in modo da esporre la dipendenza dai parametri fisici rinormalizzati (masse, costanti d'accoppiamento) della teoria. A tale scopo si considerano spesso combinazioni di entropie per le quali i termini di cut-off non universali si cancellano. Sebbene le proprietà e la rinormalizzazione di  $S(A)$  in  $d > 2$  siano ancora poco comprese, alcuni risultati generali sono noti in  $d = 1$ .

La legge dell'area (4.21) determina un'entropia in  $d = 1$  che è indipendente dalla dimensione  $L$  del sottosistema e proporzionale al numero dei bordi (due). Questo comportamento è verificato se la massa (correlazione  $\xi$ ) è finita, (vedi par.4.6)<sup>5</sup>. Al punto critico il risultato del paragrafo precedente (4.20) mostra che la legge dell'area è violata: l'andamento logaritmico<sup>6</sup> è una conseguenza delle correlazioni infinite. Questa proprietà potrebbe essere molto significativa per caratterizzare le transizioni di fase quantistiche (a  $T=0$ ). Si noti che l'espressione (4.20) dipende dal cut-off nell'argomento del logaritmo, ma il coefficiente di proporzionalità è chiaramente universale ed è proporzionale alla carica centrale.

---

<sup>4</sup>In  $d \neq 3$ , si intende per area il volume del bordo (d-1) dimensionale.

<sup>5</sup>Almeno all'ordine dominante in  $\frac{L}{\xi}$  con  $L \gg \xi$ , [33].

<sup>6</sup>Fatto noto numericamente, [32].

## 4.5 Entropia in CFT per altre geometrie

La corrispondenza fra  $\text{Tr}\rho_A^n$  ed il correlatore  $\langle\sigma(u)\tilde{\sigma}(v)\rangle$ , (4.19) nelle proprietà di trasformazione conforme consentono di estendere il risultato per l'entropia  $S(A)$ , (4.20) ad altre geometrie mappabili conformemente al piano, utilizzando le regole (1.13) di trasformazione dei campi primari. Ad esempio ponendo:

$$w = e^{\frac{2\pi}{\beta}w'}, \quad w' = x + i\tau, \quad (4.22)$$

otteniamo un sistema con tempo periodico  $\beta$ , corrispondente a temperatura finita,  $\frac{1}{\beta}$ . Il taglio è  $L = x_u - x_v \in \mathbb{R}$ ,  $u = e^{\frac{2\pi x_u}{\beta}}$  e  $v = e^{\frac{2\pi x_v}{\beta}}$ . Si ricava:

$$\begin{aligned} \langle\sigma(x_u)\tilde{\sigma}(x_v)\rangle_{cil} &= \left|\frac{dw}{dw'}\right|_{x_u,\tau_u=0}^{2h_\sigma} \left|\frac{dw}{dw'}\right|_{x_v,\tau_v=0}^{2h_{\tilde{\sigma}}} \langle\sigma(u)\tilde{\sigma}(v)\rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \left(\frac{\beta}{\pi a} \text{sh} \frac{\pi L}{\beta}\right)^{-4h_\sigma}, \end{aligned}$$

$$S(L, \beta) = \frac{c}{3} \log \left( \frac{\beta}{\pi a} \text{sh} \frac{\pi L}{\beta} \right) + \text{costante}. \quad (4.23)$$

Per  $L \gg \beta$  si ottiene il limite  $S \rightarrow c\frac{\pi L}{3\beta}$  corrispondente all'entropia termica di una qualunque CFT, derivato al Cap.2<sup>7</sup>. Questo risultato è in accordo con l'intuizione che le fluttuazioni termiche ad alta temperatura cancellino le correlazioni quantistiche (vedi par. 3.4).

Un'altra possibilità è considerare periodica la direzione spaziale, indicata con  $\Lambda$ , cambiando la realtà della mappa esponenziale (4.22). Il risultato per l'entropia di entanglement a  $T=0$  e condizioni periodiche al contorno spaziali è:

$$S(L, \Lambda) = \frac{c}{3} \log \left( \frac{\Lambda}{\pi a} \sin \frac{\pi L}{\Lambda} \right) + \text{costante}. \quad (4.24)$$

Esso è simmetrico in  $L \rightarrow \Lambda - L$ , operazione corrispondente allo scambio delle regioni  $A$  e  $B$ .

<sup>7</sup>Il limite termico è presentato direttamente dalla (4.9) in [34].

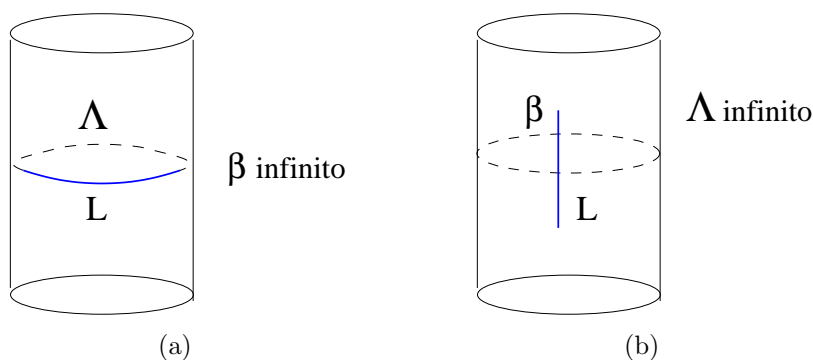


Figura 4.5: (a) Sistema a  $T=0$  di lunghezza  $\Lambda$  con condizioni periodiche al contorno spaziali. (b) Sistema a  $T$  finita di lunghezza infinita. In entrambi i casi il sottosistema osservato  $A$  ha lunghezza  $L$ .

Per concludere esaminiamo il caso di una teoria conforme con bordo invariante conforme, (vedi Cap. 2). A  $T=0$ , lo spazio tempo di integrazione corrisponde al semipiano superiore  $H$  con un taglio, ad esempio lungo l'asse immaginario  $0 \leq \text{Im}(w) \leq L$ . Una condizione al bordo conforme è assunta in  $\text{Im}(w) = 0$ .

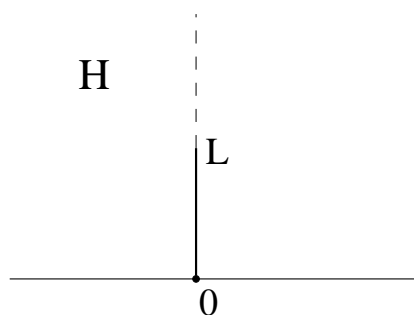


Figura 4.6: Semipiano  $H$  superiore, tagliato.

La mappa:

$$z = \left( \frac{w - iL}{w + iL} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (4.25)$$

trasforma la superficie di Riemann in un disco  $D$ . Procedendo come nel par. 4.3 si ottiene:

$$\langle T^{(n)}(w) \rangle_{\mathcal{R}^n} = \frac{\langle T^{(n)}(w) \sigma(iL) \rangle_H}{\langle \sigma(iL) \rangle_H}, \quad (4.26)$$

con:

$$\langle \sigma(iL) \rangle_H = \frac{1}{(2L)^{2h_\sigma}} \quad h_\sigma = \frac{c}{24} \left( n - \frac{1}{n} \right); \quad (4.27)$$

ed infine:

$$S(L) = \frac{c}{6} \log \left( \frac{2L}{a} \right) + k' = \frac{c}{6} \log \left( \frac{2L}{a} \right) + \log g + k. \quad (4.28)$$

L'ultimo passaggio giustifica il fatto che l'unica differenza tra le costanti  $k$ , vedi la (4.20) e  $k'$  è l'entropia di bordo a temperatura zero di Affleck e Ludwig, discussa nel Cap. 2. La (4.28) dà quindi un'interpretazione alternativa di questa entropia.

## 4.6 Entropia di entanglement fuori dal punto critico

Presentiamo il calcolo dell'entropia di entanglement per sistemi a  $T=0$ , fuori dal punto critico, [28]. La lunghezza di correlazione è  $\xi \sim \frac{1}{m}$ , dove  $m$  è la massa della teoria di campo rinormalizzata che descrive il sistema nel limite continuo. L'integrale funzionale per il calcolo di  $Z_n(A)$  è definito su una superficie di Riemann  $\mathcal{R}^n$  con un taglio, per semplicità lungo il semiasse reale negativo,  $L \gg \xi$ . Assumeremo invarianza per rotazioni attorno all'origine. In assenza di taglio l'invarianza per

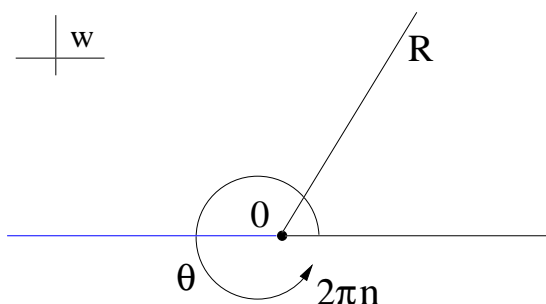


Figura 4.7: Geometria per il calcolo; la coordinata radiale  $R \in [0, \infty)$  mentre quella angolare  $\theta \in [0, 2\pi n)$ .

traslazioni implica:

$$\langle T(z, \bar{z}) \rangle_{\mathcal{C}} = 0,$$

$$\langle \Theta(z, \bar{z}) \rangle_{\mathcal{C}} = \text{cost} \equiv \langle \Theta \rangle_1 \neq 0,$$



dove  $\Theta(z, \bar{z})$  è la traccia del tensore energia impulso, non nulla per  $m \neq 0$ . Consideriamo adesso il valore d' aspettazione dello stesso tensore energia impulso su un singolo foglio di  $\mathcal{R}^n$ :

$$\langle T(z, \bar{z}) \rangle_{\mathcal{R}^n} \neq 0; \quad (4.29)$$

per sottolineare questa scelta continuiamo ad indicare con  $z$  e  $\bar{z}$  le coordinate sul foglio<sup>8</sup>.

Dimensionalmente e per l' invarianza per rotazioni possiamo scrivere:

$$\langle T(z, \bar{z}) \rangle_{\mathcal{R}^n} = \frac{F_n(z\bar{z})}{z^2}, \quad (4.30)$$

$$\langle \bar{T}(z, \bar{z}) \rangle_{\mathcal{R}^n} = \frac{F_n(z\bar{z})}{\bar{z}^2}, \quad (4.31)$$

$$\langle \Theta(z, \bar{z}) \rangle_{\mathcal{R}^n} - \langle \Theta \rangle_1 = \frac{G_n(z\bar{z})}{z\bar{z}}. \quad (4.32)$$

Le funzioni scalari  $F_n$  e  $G_n$  soddisfano  $F_1 = G_1 = 0$ . Dalla legge di conservazione ( $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ ):

$$\begin{cases} \partial\Theta + 4\bar{\partial}T = 0, \\ \bar{\partial}\Theta + 4\partial\bar{T} = 0, \end{cases} \quad (4.33)$$

valida anche fuori dal punto critico segue inoltre:

$$G_n = \bar{z}z(G'_n + 4F'_n) = R^2 \frac{d}{dR^2} [G_n + 4F_n]. \quad (4.34)$$

Sicuramente per  $R \ll \xi$ :

$$F_n \rightarrow \frac{c}{24} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right), \quad (4.35)$$

$$G_n \rightarrow 0. \quad (4.36)$$

---

<sup>8</sup>Con la notazione  $\langle T^{(n)}(w) \rangle_{\mathcal{R}^n}$  si era espresso il valore d'aspettazione di  $T$  inserito in ciascun foglio della superficie di Riemann.

A grandi distanze  $R \gg \xi$  è invece ragionevole supporre:

$$F_n, G_n \sim o(e^{-\frac{R}{\xi}}) \rightarrow 0, \quad (4.37)$$

risulta perciò:

$$\int_0^\infty d(R^2) \frac{d}{dR^2} [G_n + 4F_n] = -\frac{c}{6} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \quad (4.38)$$

Tale integrale puo' essere trasformato con la (4.34) sfruttando l' invarianza per rotazioni (indipendenza dal foglio di  $\mathcal{R}^n$ ) in un integrale su tutta la superficie di Riemann:

$$\int_{\mathcal{R}^n} RdRd\theta [\langle \Theta(z, \bar{z}) \rangle_{\mathcal{R}^n} - \langle \Theta \rangle_1] = -\frac{c\pi}{6} \left(n - \frac{1}{n}\right). \quad (4.39)$$

Supponiamo adesso di riscaldare globalmente la lunghezza di correlazione:

$$\xi \rightarrow \xi(1 - \varepsilon), \quad (R \rightarrow R(1 + \varepsilon)),$$

$$m \rightarrow m(1 + \varepsilon); \quad \varepsilon = \frac{\delta m}{m} = \delta \log m.$$

Dall' invarianza per riparametrazioni della funzione di partizione si ha:

$$\varepsilon \int_M d^2x \langle \Theta \rangle_M = -2\pi \delta_\varepsilon \log Z, \quad (4.40)$$

dove  $M$  è una qualunque superficie di Riemann. Otteniamo quindi:

$$m \frac{d}{dm} (\log Z_n - n \log Z) = \frac{c}{12} \left(n - \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \frac{Z_n}{Z^n} = (ma)^{\frac{c}{12} \left(n - \frac{1}{n}\right)}, \quad (4.41)$$

e finalmente per l' entropia di entanglement:

$$S = \frac{c}{6} \log \left(\frac{\xi}{a}\right). \quad (4.42)$$

Sistemi fisici con un gap di massa a  $T = 0$ , presentano un' entropia di entanglement indipendente dalla lunghezza  $L$  in accordo con la legge dell' area. In effetti se si

ripete la derivazione per un sistema  $M$  partito con  $(M + 1)$  bordi si ottiene il risultato (4.42) moltiplicato per  $\frac{M+1}{2}$ , essendo l'area in  $d = 1$ , semplicemente il numero dei bordi, [28].

È da sottolineare che la (4.42) è stata ottenuta nei limiti  $a \ll \xi \ll L$ .

## 4.7 Espressione dell' entropia di entanglement mediante campi di twist

La relazione principale utilizzata per il calcolo dell' entropia al par. 4.3:

$$\int_{C^{(n)}(0,L)} \mathcal{D}^{(n)}[\psi] e^{-S^{(n)}[\psi]} \propto \langle \sigma(L) \tilde{\sigma}(0) \rangle_{\mathbb{C}} \equiv \frac{\int \mathcal{D}^{(n)}[\psi] e^{-S^{(n)}[\psi]} \sigma(L) \tilde{\sigma}(0)}{\int \mathcal{D}^{(n)}[\psi] e^{-S^{(n)}[\psi]}}, \quad (4.43)$$

definisce il campo di twist  $\sigma(z, \bar{z})$  ( $\tilde{\sigma}$  è l'antitwist). Il campo di twist è un operatore che inserito nell' integrale funzionale ne modifica le condizioni al contorno. Un' interpretazione della funzione di partizione su una superficie di Riemann ad  $n$  fogli come funzione a due punti di un unico campo di twist è lecita in virtù della (4.18). In particolare essa mostra che  $\sigma(u, \bar{u})$  è un campo primario e che le sue dimensioni conformi al punto critico sono date da:

$$h_{\sigma} = \bar{h}_{\sigma} = \frac{c}{24} \left( n - \frac{1}{n} \right). \quad (4.44)$$

Questo argomento non è più utilizzabile quando si vuole calcolare l'entropia su altre geometrie, come il toro, corrispondente a spazio periodico e temperatura finita. In questo caso, la superficie di Riemann per le  $n$  repliche  $\mathcal{R}^n$  è l'unione di  $n$  tori e quindi è compatta. Questa superficie non è mappabile nell' intero piano complesso  $\mathbb{C}$  o copie di esso, come richiesto dall' argomento del par. 4.5. In questo paragrafo presenteremo un metodo diverso, che permette il calcolo dell' entropia sul toro (Cap.5); questo argomento alternativo è stato finora applicato solamente per teorie libere fermioniche e bosoniche ( $c=1$ ), [35] e [36].

Consideriamo dunque un campo complesso libero  $\psi(z)$  e il vettore delle  $n$  repliche:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \vdots \\ \psi^n \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

Le condizioni al contorno sul taglio  $\psi^k \rightarrow \psi^{k+1}$  corrispondono alla matrice  $n \times n$ :

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ (\pm 1)^{(n+1)} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

Dove il segno  $\pm$  dell' ultimo elemento della prima colonna è riferito a campi bosonici o fermionici, [35], rappresentati nell' integrale funzionale da variabili di Grassmann. Tali matrici possono essere diagonalizzate<sup>9</sup> da trasformazioni unitarie  $\mathcal{U} \in U(n)$ ; in particolare per campi bosonici gli autostati, combinazioni lineari degli  $\psi^j$  sono:

$$\tilde{\psi}^k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} e^{-\frac{2\pi i k j}{n}} \psi^{\sigma(j)}; \quad \mathcal{C}\tilde{\psi}^k = \lambda_k \tilde{\psi}^k; \quad \lambda_k = e^{\frac{2\pi i k}{n}}; \quad k = 0 \dots n-1. \quad (4.47)$$

mentre per campi fermionici<sup>10</sup>:

$$\tilde{\psi}^k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{2\pi i k j}{n}} \psi^{\sigma(j)}; \quad \mathcal{C}\tilde{\psi}^k = \lambda_k \tilde{\psi}^k; \quad \lambda_k = e^{\frac{2\pi i k}{n}}; \quad k = -\frac{n-1}{2} \dots \frac{n-1}{2}. \quad (4.48)$$

<sup>9</sup>Il calcolo del polinomio caratteristico è elementare.

<sup>10</sup>In questo modo i casi  $n$  pari e dispari sono trattati contemporaneamente.

Con la notazione:

$$\sigma(j+1) = \sigma(j) + 1,$$

$$\sigma(1) = 1 \quad \text{per bosoni e fermioni con } n \text{ dispari,}$$

$$\sigma\left(-\frac{n-1}{2}\right) = 1 \quad \text{per fermioni con } n \text{ pari,}$$

si segue poi l'ordine ciclico.

Le condizioni al contorno  $C^{(n)}(0, L)$  diventano pertanto per gli  $\tilde{\psi}^k$  le  $\tilde{C}_k(0, L)$ :

$$\tilde{C}_k(0, L) = \begin{cases} 0 \leq x \leq L, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^\pm} \tilde{\psi}^k(x, \varepsilon) = \lambda_k \tilde{\psi}^k(x, 0). \end{cases} \quad (4.49)$$

Poiché infine l'azione  $S[\psi]$  della teoria libera è invariante  $U(1)$ , quella della teoria replicata  $n$  volte è invariante  $U(n)$ :

$$S^{(n)}[\Psi] = S^{(n)}[\mathcal{U}\Psi] = S^{(n)}[\tilde{\Psi}], \quad \tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\psi}^n \end{pmatrix}; \quad (4.50)$$

si ha:

$$\int_{C^{(n)}(0, L)} \mathcal{D}^{(n)}[\psi] e^{-S^{(n)}[\Psi]} = \prod_k \int_{\tilde{C}_k(0, L)} \mathcal{D}[\tilde{\psi}^k] e^{-S[\tilde{\psi}^k]} = \prod_k \langle \sigma_k(L) \tilde{\sigma}_k(0) \rangle_{\mathbb{C}}. \quad (4.51)$$

I campi di twist  $\sigma_k$  e  $\tilde{\sigma}_k$ , con uguali dimensioni conformi, agiscono singolarmente su  $\tilde{\psi}^k$ , attraverso la *OPE*:

$$\tilde{\psi}_k(z) \sigma_k(L) \sim (z-L)^{\frac{k}{n}} \mu_k(L), \quad (4.52)$$

$$\tilde{\psi}_k(z) \tilde{\sigma}_k(L) \sim (z-L)^{-\frac{k}{n}} \tilde{\mu}_k(L). \quad (4.53)$$

con  $\mu_k$  e  $\tilde{\mu}_k$  che dipendono dalle regole di fusione.

È chiaro che i pesi conformi conformi,  $h_k$  dei campi di twist sono vincolati da una

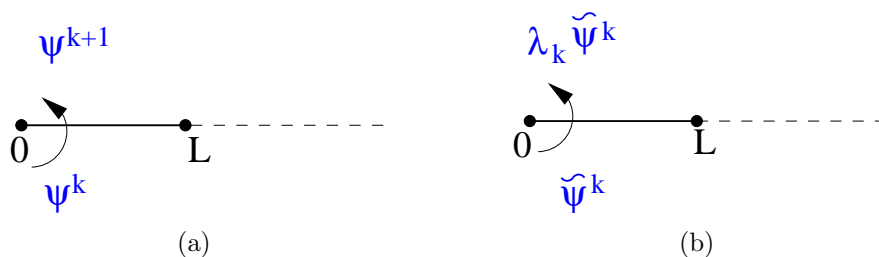


Figura 4.8: (a) condizioni al contorno prima della diagonalizzazione; (b) condizioni al contorno dopo la diagonalizzazione.

regola di somma; almeno nel limite  $L \rightarrow 0$  qualunque foglio della superficie di Riemann è equivalente al piano complesso:

$$\prod_k \langle \sigma_k(L) \tilde{\sigma}_k(0) \rangle_{\mathbb{C}} = \prod_k \frac{1}{L^{4h_k}} = \frac{1}{L^{4\sum_k h_k}}, \quad (4.54)$$

e confrontando con la (4.43):

$$\sum_k h_k = h_\sigma = \frac{c}{24} \left( n - \frac{1}{n} \right). \quad (4.55)$$

Per campi complessi fermionici (di Dirac) e bosonici le dimensioni dei campi di twist che realizzano le (4.52) sono note dalla teoria dell' orbifold  $\mathbb{Z}_n$ , [37] e valgono:

$$h_k = \bar{h}_k = \frac{1}{2} \frac{k^2}{n^2} \quad \text{fermioni}, \quad (4.56)$$

$$h_k = \bar{h}_k = \frac{1}{2} \frac{k}{n} \left( 1 - \frac{k}{n} \right) \quad \text{bosoni complessi}. \quad (4.57)$$

È facile verificare che la (4.55) è soddisfatta con  $c=1$  e  $2$  rispettivamente, utilizzando i valori di  $k$  nelle (4.47) e (4.48).

# Capitolo 5

## Entropia di fermioni liberi a temperatura e taglia finita

### 5.1 Introduzione

In questo capitolo discuteremo un' estensione delle formule (4.23) e (4.24) per l'entropia geometrica per un sistema di dimensione finita a temperatura finita  $T = \frac{1}{\beta}$ . Consideriamo un sistema di lunghezza  $\Lambda$  con condizioni periodiche al contorno spaziali e temporali; ovvero la superficie del toro. La dimensione del sottosistema non tracciato sarà ancora indicata con  $L$ . La superficie di Riemann per il calcolo di  $\text{Tr}\rho_A^n$  è ottenuta mettendo insieme  $n$  tori e quindi ha genere  $n$ ; nel seguito sarà indicata con  $\mathbf{T}^{(n)}$ .

Nell'ambito della teoria della corda relativistica sono state sviluppate delle tecniche per il calcolo dell' integrale funzionale su superfici di genere  $n > 1$ , corrispondenti agli ordini superiori della serie perturbativa di stringa. Mediante questo calcolo *multiloop*, è possibile ottenere l' espressione della funzione di partizione per la stringa bosonica compattificata corrispondente ad una generica teoria conforme a  $c = 1$  e per la stringa fermionica ( $c = 3$ ). L'applicazione di queste tecniche al calcolo dell' entropia di entanglement non è stata ancora sviluppata in letteratura e costituisce un progetto di ricerca troppo ampio per poter essere affrontato in

questa tesi. Ci limiteremo ad esaminare e sviluppare i casi semplici che sono stati discussi in letteratura, [1].

Il metodo di Cardy-Calabrese, (4.18), basato sull'interpretazione dell'integrale funzionale (4.9) come funzione a due punti di un singolo operatore di twist  $\sigma(z, \bar{z})$  non è applicabile al caso a temperatura e taglia finita, perché la superficie  $\mathbf{T}^{(n)}$  non è mappabile nell'intero piano complesso (si mappa infatti in un sottoinsieme del semipiano superiore). Considereremo quindi il metodo descritto nel par. 4.7, che è basato sulla scelta delle condizioni al contorno dell'integrale funzionale. In pratica questo è calcolabile in forma esplicita solamente per campi bosonici e fermionici liberi, per i quali le condizioni al contorno sono specificabili sul campo fondamentale, variabile d'integrazione. Illustreremo il caso del campo di Dirac ( $c = 1$ ), risolto nel lavoro [1].

In questo capitolo riassumiamo i passi principali del calcolo dell'integrale funzionale come prodotto di operatori di twist. Nel capitolo successivo esamineremo le conseguenze fisiche che sono estraibili da queste espressioni esplicite e l'estensione al fermione di Majorana ( $c = \frac{1}{2}$ ).

## 5.2 Motivazioni

Il calcolo dell'entropia di entanglement in un sistema a temperatura e dimensioni finite, ovvero sulla superficie del toro, è interessante per i seguenti motivi:

- Le correzioni di temperatura finita fanno intervenire gli stati eccitati della teoria conforme che non sono presenti nelle espressioni del cilindro. In particolare sarà possibile ottenere l'entropia geometrica dei settori corrispondenti alle rappresentazioni di Virasoro diverse dal vuoto  $|0\rangle$ , costruite a partire dagli pseudo-vuoti,  $|h\rangle$ , i pesi massimi, e dalle loro deformazioni locali  $L_{-1}|h\rangle$ ,  $L_{-2}|h\rangle$ , ... (vedi Cap.1). Questi contributi saranno analizzabili nello sviluppo di bassa temperatura dell'entropia geometrica sul toro.



- Viceversa nello sviluppo di alta temperatura sarà possibile studiare il passaggio dall' entropia geometrica all' entropia termica, che riceve contributi da tutti gli stati eccitati.
- Le correzioni di taglia finita (*finite size corrections*) sono necessariamente collegate a quelle in temperatura, perché l'invarianza di scala fa dipendere l'entropia dai rapporti adimensionali,  $\tau = i\frac{\beta}{\Lambda}$  e  $z = \frac{L}{\Lambda}$  dove  $\tau$  è il parametro modulare del toro. In particolare si otterrà un' espressione esatta che interpola tra i due limiti del cilindro, derivati da Cardy-Calabrese:

$$S(L) = \frac{c}{3} \log \left[ \frac{\Lambda}{\pi} \sin \left( \frac{\pi L}{\Lambda} \right) \right]; \quad \beta \rightarrow \infty; \quad \Lambda \text{ finito}; \quad (5.1)$$

$$S(L) = \frac{c}{3} \log \left[ \frac{\beta}{\pi} \text{sh} \left( \frac{\pi L}{\beta} \right) \right]; \quad \beta \text{ finito}; \quad \Lambda \rightarrow \infty, \quad (5.2)$$

permettendo di valutare completamente le correzioni di taglia finita all' entropia di entanglement per il settore del vuoto.

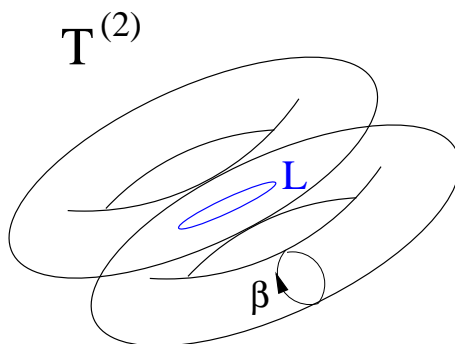


Figura 5.1: Rappresentazione schematica di  $T^{(n)}$ ,  $n = 2$

### 5.3 Settori di spin e funzione di partizione

Introduciamo le notazioni del capitolo riepilogando lo studio dei fermioni reali e complessi sul toro.

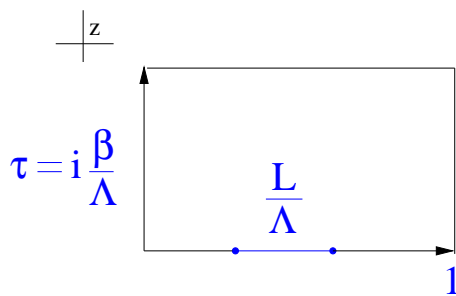


Figura 5.2: Toro nel piano complesso con parametro modulare  $\tau$  puramente immaginario.

Consideriamo preliminarmente un fermione reale, o di Majorana, con entrambe le componenti olomorfe ed antiolomorfe (questa è condizione necessaria per l'invarianza modulare della teoria); l'azione è:

$$S[\psi, \bar{\psi}] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{T}} d^2x (\psi \bar{\partial} \psi + \bar{\psi} \partial \bar{\psi}). \quad (5.3)$$

Notiamo che le equazioni del moto implicano la chiralità di  $\psi$ ,  $\bar{\partial} \psi = 0$ . La funzione di partizione è il determinante:

$$Z = \int \mathcal{D}[\psi \bar{\psi}] e^{-S[\psi, \bar{\psi}]} = \mathcal{N} \sqrt{\det \partial \bar{\partial}} \equiv \mathcal{N} \sqrt{\det \Delta}, \quad (5.4)$$

$\mathcal{N}$  è una costante di normalizzazione,  $\Delta$  è il laplaciano e  $\psi$  e  $\bar{\psi}$  sono variabili di Grassmann. La riduzione del determinante dell'operatore di Dirac al laplaciano è alla base dell'equivalenza tra bosoni e fermioni in due dimensioni, la cosiddetta *bosonizzazione*, della quale faremo largo uso nel seguito.

Il calcolo degli autovalori del laplaciano sul toro richiede di specificare le condizioni al contorno periodiche o antiperiodiche  $\nu \equiv (u, v)$  per il campo  $\psi(z, \bar{z})$  lungo le direzioni spaziali e "temporali":

$$\begin{cases} \psi(z+1, \bar{z}+1) = e^{2\pi i u} \psi(z, \bar{z}); & u = 0, \frac{1}{2}, \\ \psi(z+\tau, \bar{z}+\bar{\tau}) = e^{2\pi i v} \psi(z, \bar{z}); & v = 0, \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (5.5)$$

La coppia  $\nu \equiv (u, v)$  è usualmente chiamata una struttura, o settore, di spin, [38];

il risultato dell' integrazione corrispondente è la funzione di partizione  $[Z_{u,v}]^2 = (\det \Delta)_{u,v}$ . Regolarizzando il determinante con la tecnica della funzione  $\zeta$  di Riemann, [3], si ottiene (per un esempio si veda l' appendice B):

$$[Z_{u,v}]^2 = \frac{\left| \theta \left[ \begin{smallmatrix} \frac{1}{2}-u \\ \frac{1}{2}-v \end{smallmatrix} \right] (0|\tau) \right|^2}{|\eta(\tau)|^2}, \quad (5.6)$$

dove le  $\theta \left[ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right]$  sono le funzioni ellittiche di Jacobi nella notazione di [39], nel seguito semplicemente indicate come  $\theta_\nu(0|\tau)$  (per un riepilogo delle proprietà e la corrispondenza tra le due notazioni si consulti l' Appendice A);  $\eta(\tau)$  è la funzione di Dedekind.

La (5.6) evidenzia che il determinante del laplaciano è un' espressione quadratica per ogni settore  $\nu$  di spin. La radice quadrata determina l'integrale funzionale per un singolo fermione di Majorana (5.3); l'espressione (5.6) corrisponde al caso del fermione di Dirac che può essere bosonizzato, ( $c = 1$ ). Definiamo quindi il campo complesso di Dirac, composto da due fermioni di Majorana ( $\psi_1, \psi_2$ ):

$$\begin{cases} D(z, \bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1 + i\psi_2], \\ \bar{D}(z, \bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\bar{\psi}_1 + i\bar{\psi}_2], \end{cases} \quad (5.7)$$

ottenendo per  $\{\psi_1, \psi_2\} = 0$  (anticommutatore) e  $D^*$ , complesso coniugato di  $D$ :

$$S^D = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{T}} d^2x (D^* \bar{\partial} D + \bar{D}^* \partial \bar{D}) = S_1[\psi_1, \bar{\psi}_1] + S_2[\psi_2, \bar{\psi}_2], \quad (5.8)$$

Le equazioni del moto implicano ancora  $D = D(z)$ , chirale. In linguaggio operatoriale (canonico) l'uguaglianza (5.8) è equivalente a:

$$T^D(z) = T_1(z) + T_2(z), \quad (5.9)$$

dove  $T^D(z)$ ,  $T_1(z)$ ,  $T_2(z)$  sono i tensori energia impulso, ricavabili dal teorema di

Noether per le azioni dei fermioni di Dirac e Majorana. In particolare:

$$T_1(z) = -\frac{1}{2} : \psi_1(z) \partial \psi_1(z) : , \quad (5.10)$$

con i due punti che indicano l'ordinamento normale. Dalla (5.8) segue per la funzione di partizione del fermione di Dirac nel settore  $\nu$ :

$$2Z_\nu \equiv [Z_{u,v}]^2 = \left| \frac{\theta_\nu(0|\tau)}{\eta(\tau)} \right|^2 , \quad (5.11)$$

I settori  $\nu = 2, 3, 4$  corrispondono alle condizioni al contorno  $(u, v) = (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0)$ . Un fermione di Dirac sul toro con condizioni al contorno  $\nu$  è dunque equivalente a due fermioni di Majorana con le stesse condizioni al contorno. Il fattore 2 normalizza ad uno il primo termine del carattere dell'identità quando si somma su tutte le strutture di spin  $\nu = 2, 3, 4$ , per avere una funzione di partizione covariante modulare. La teoria conforme descritta dall'azione (5.8) ha carica centrale  $c = 1$ , come è chiaro dalla (5.9).

Come anticipato, i campi  $D(z), \bar{D}(\bar{z})$  hanno una rappresentazione ([40], ad esempio) come operatori di vertice, che sono i campi primari di una teoria bosonica,  $c = 1$ :

$$D(z) = : e^{i\phi(z)} : \quad h_D = \frac{1}{2}, \quad \bar{h}_D = 0 \quad (\text{pesi conformi di } D); \quad (5.12)$$

$$\bar{D}(\bar{z}) = : e^{-i\bar{\phi}(\bar{z})} : \quad h_D = 0, \quad \bar{h}_D = \frac{1}{2} \quad (\text{pesi conformi di } \bar{D}). \quad (5.13)$$

Il campo scalare bosonico è  $\varphi(z, \bar{z}) = \phi(z) + \bar{\phi}(\bar{z}) \in \mathbb{R}$ . Dall'azione della teoria  $S[\phi] = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbf{T}} d^2x \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi$ , si ottiene il propagatore:

$$\langle \phi(z) \phi(w) \rangle = -\log(z - w), \quad (5.14)$$

e mediante il teorema di Wick, Appendice C, il corretto propagatore fermionico:

$$\langle D^*(z)D(w) \rangle = \langle e^{-i\phi(z)}e^{i\phi(w)} \rangle = \frac{1}{z-w}. \quad (5.15)$$

Sul toro la bosonizzazione del fermione di Dirac ha tuttavia un significato molto più preciso. Considerando il campo  $\varphi(z, \bar{z})$  compattificato su un cerchio:

$$\varphi(z, \bar{z}) \equiv \varphi(z, \bar{z}) + 2\pi R, \quad R \in \mathbb{R}, \quad (5.16)$$

risulta per la funzione di partizione bosonica:

$$\begin{aligned} Z_{\text{circ}}(R) &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}[\varphi] e^{-S[\varphi]} \\ &= \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \sum_{e,m \in \mathbb{Z}} q^{h_{e,m}} \bar{q}^{\bar{h}_{e,m}}, \quad q = e^{2\pi i \tau} = e^{-2\pi \frac{\beta}{\lambda}}; \end{aligned} \quad (5.17)$$

con

$$\begin{aligned} h_{e,m} &\equiv \alpha_{e,m}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{e}{R} + \frac{mR}{2} \right)^2, \\ \bar{h}_{e,m} &\equiv \bar{\alpha}_{e,m}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{e}{R} - \frac{mR}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

pesi conformi dei campi primari  $V_{e,m}$  della teoria. La (5.17) mostra la struttura tipica di una quantità calcolata sul toro e la tecnica con cui è determinata ha il seguente significato fisico. Il campo  $\varphi(z, \bar{z})$  è separato in due parti,  $\varphi = \varphi_{qu} + \varphi_{mn}$ . La prima, detta quantistica che contiene le oscillazioni intorno alla configurazione di vuoto è doppiamente periodica lungo i cicli del toro e produce  $\frac{1}{\det \Delta}$  opportunamente regolarizzato. La seconda, detta classica specifica la configurazione di vuoto tramite gli interi  $(m, n)$ :

$$\begin{cases} \varphi_{mn}(z+1, \bar{z}+1) = \varphi_{mn}(z, \bar{z}) + 2\pi Rm, \\ \varphi_{mn}(z+\tau, \bar{z}+\bar{\tau}) = \varphi_{mn}(z, \bar{z}) + 2\pi Rn. \end{cases} \quad (5.18)$$

e realizza la sommatoria su  $(e, m)$ , numeri quantici elettrici e magnetici, dopo l'applicazione della formula di Poisson.

Risulta allora la notevole identità, che dimostreremo nel prossimo paragrafo:

$$\sum_{\nu=2}^4 Z_{\nu} = \sum_{\nu=2}^4 \frac{1}{2|\eta(\tau)|^2} |\theta_{\nu}(0|\tau)|^2 = Z_{\text{circ}}(R = 1). \quad (5.19)$$

La (5.19) prova che lo spettro bosonico a raggio di compattificazione<sup>1</sup>  $R = 1$  è uguale allo spettro fermionico, [41]; in particolare qualunque correlatore della teoria fermionica puo' essere calcolato all' interno della teoria bosonica purché sia identificato l' insieme di interi  $(e, m)$  che corrispondono ad una data struttura di spin  $\nu$ .

## 5.4 Entropia di entanglement del fermione di Dirac

Applichiamo il metodo di calcolo dell' entropia, [1], riassunto nel par. 4.7, basato sulla riduzione dell' integrale funzionale al prodotto di correlatori di campi di twist.

### 5.4.1 Correlatore tra campi di twist

Se i correlatori tra gli operatori di twist sono correttamente normalizzati:

$$\lim_{n \rightarrow 1} \prod_{k=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \langle \sigma_k(L) \tilde{\sigma}_k(0) \rangle_{\mathcal{T}} = \langle \sigma_0(L) \tilde{\sigma}_0(0) \rangle_{\mathcal{T}} = 1, \quad (5.20)$$

dall' espressione (4.51) per  $\text{Tr} \rho_A^n$  segue:

---

<sup>1</sup>Gli altri valori di  $R$ , corrispondono alla bosonizzazione della teoria fermionica, con interazione a quattro fermioni che mantiene l'invarianza conforme, [3].

$$\begin{aligned}
S(L) &= - \left. \frac{d}{dn} \right|_{n=1} \text{Tr} \rho_A^n = - \left. \frac{d}{dn} \right|_{n=1} \log \text{Tr} \rho_A^n \\
&= - \left. \frac{d}{dn} \right|_{n=1} \sum_{k=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \log \langle \sigma_k(L) \tilde{\sigma}_k(0) \rangle_{\mathbf{T}}.
\end{aligned}$$

Le dimensioni conformi del campo primario  $\sigma_k$  sono determinate dalla *OPE* (4.52):

$$\begin{cases} D(z)\sigma_k(0) = z^{\frac{k}{n}}\mu_k(0), \\ \bar{D}(\bar{z})\sigma_k(0) = \bar{z}^{\frac{k}{n}}\mu'_k(0). \end{cases} \quad (5.21)$$

Dal teorema di Wick e dalle (5.12), con  $\alpha$  definito come nella (5.17) si ha:

$$\begin{cases} 2\alpha_k\alpha_D = \frac{k}{n} \Rightarrow \alpha_k = \frac{k}{\sqrt{2n}}, \\ 2\bar{\alpha}_k\bar{\alpha}_D = \frac{k}{n} \Rightarrow \bar{\alpha}_k = -\frac{k}{\sqrt{2n}}. \end{cases} \quad (5.22)$$

L' operatore  $\sigma_k(z, \bar{z})$  è identificato dunque con l' operatore puramente magnetico ad  $R = 1$ ,  $V_{0m}$  con  $m = \frac{2k}{n}$ . I pesi conformi di  $\tilde{\sigma}(z, \bar{z})$  si ottengono scambiando  $k$  in  $-k$ .

Correlatori di qualunque operatore di vertice  $V_{em}$  sono calcolabili con tecnica analoga a quella brevemente descritta per la funzione di partizione (5.17), [6]:

$$\begin{aligned}
Z_{\text{circ}}(R) \langle V_{em}(z_1, \bar{z}_1) V_{-e-m}(z_2, \bar{z}_2) \rangle &= \left( \frac{\theta'_1(\tau)}{\theta_1(z_{12}|\tau)} \right)^{2h_{em}} \left( \frac{\overline{\theta'_1(\tau)}}{\theta_1(z_{12}|\tau)} \right)^{2\bar{h}_{em}} \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \\
&\cdot \sum_{e'm' \in \mathbb{Z}} q^{h_{em}} \bar{q}^{\bar{h}_{em}} e^{4i\pi[\alpha_{e'm'}\alpha_{em}z_{12} - \bar{\alpha}_{e'm'}\bar{\alpha}_{em}\bar{z}_{12}]} .
\end{aligned} \quad (5.23)$$

Il primo fattore della (5.23) è conseguenza di:

$$\langle \varphi_{qu}(z_1, \bar{z}_1) \varphi_{qu}(z_2, \bar{z}_2) \rangle = - \log \left| \frac{\theta_1(z|\tau)}{\theta'_1(\tau)} e^{-\pi \frac{\text{Im}^2(z)}{\text{Im}(\tau)}} \right|^2 = - \log |E(z_{12}|\tau)|^2; \quad (5.24)$$

dove  $E(z_{12}|\tau)$  è la forma fondamentale (*prime form*, discussa in Appendice A). La somma è in origine sugli indici  $(m, n)$  come nella (5.17).

Otteniamo per l'operatore puramente magnetico  $V_{0m}$ :

$$Z_{\text{circ}}(1)\langle V_{0m}(z_1, \bar{z}_1)V_{0-m}(z_2, \bar{z}_2)\rangle = \left| \frac{\theta'_1(\tau)}{\theta_1(z_{12}|\tau)} \right|^{\frac{m^2}{2}} \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \cdot \sum_{e'm' \in \mathbb{Z}} q^{hem} \bar{q}^{\bar{h}em} e^{4i\pi[\alpha_{e'm'}\alpha_{0m}z_{12} - \bar{\alpha}_{e'm'}\bar{\alpha}_{0m}\bar{z}_{12}]} . \quad (5.25)$$

Si puo' separare la sommatoria su  $m'$  pari e dispari con le sostituzioni:

$$\begin{cases} m' \text{ pari:} \\ e' + \frac{m'}{2} = r \in \mathbb{Z}, \\ e' - \frac{m'}{2} = s \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad \begin{cases} m' \text{ dispari:} \\ e' + \frac{m'}{2} = r + \frac{1}{2}, r \in \mathbb{Z}, \\ e' - \frac{m'}{2} = s - \frac{1}{2}, s \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (5.26)$$

Poiché in entrambi i casi  $r + s \equiv 0 \pmod{2}$  è possibile porre  $s \rightarrow -s$ , indicando infine  $e^{2\pi i \frac{mz_{12}}{2}} = y$  si ricava:

$$Z_{\text{circ}}(1)\langle V_{0m}(z_1 \bar{z}_1)V_{0-m}(z_2, \bar{z}_2)\rangle = \left| \frac{\theta'_1(\tau)}{\theta_1(z_{12}|\tau)} \right|^{\frac{m^2}{2}} \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \left( \sum_{\substack{r+s \in \mathbb{Z} \\ r+s \equiv 0 \pmod{2}}} q^{\frac{1}{2}r^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}s^2} y^r \bar{y}^s + \sum_{\substack{r+s \in \mathbb{Z} \\ r+s \equiv 0 \pmod{2}}} q^{\frac{1}{2}(r+\frac{1}{2})^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}(s+\frac{1}{2})^2} y^{r+\frac{1}{2}} \bar{y}^{s+\frac{1}{2}} \right). \quad (5.27)$$

D'altra parte vale l'identità:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^4 \left| \theta_{\nu}\left(\frac{mz}{2}|\tau\right) \right|^2 &= \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^2} y^{n+\frac{1}{2}} \right|^2 + \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^2} y^{n+\frac{1}{2}} \right|^2 + \\ &+ \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}n^2} y^n \right|^2 + \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{1}{2}n^2} y^n \right|^2. \end{aligned} \quad (5.28)$$



Si ottiene confrontando quest'espressione con la (5.27):

$$Z_{\text{circ}}(1) \langle V_{0m}(z_1, \bar{z}_1) V_{0,-m}(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \frac{1}{2} \left| \frac{\theta'_1(\tau)}{\theta_1(z_{12}|\tau)} \right|^{\frac{m^2}{2}} \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \sum_{\nu=1}^4 \left| \theta_\nu\left(\frac{mz}{2}|\tau\right) \right|^2. \quad (5.29)$$

Ponendo  $m = 0$ , si ha l'identità (5.19). È inoltre possibile adesso isolare il correlatore in ogni settore di spin  $\nu = 2, 3, 4$ , [40]:

$$\begin{aligned} Z_{\text{circ}}(1) \langle V_{0m}(z_1, \bar{z}_1) V_{0,-m}(z_2, \bar{z}_2) \rangle &= \sum_{\nu=1}^4 Z_\nu \langle V_{0m}(z_1, \bar{z}_1) V_{0,-m}(z_2, \bar{z}_2) \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle V_{0m}(z_1, \bar{z}_1) V_{0,-m}(z_2, \bar{z}_2) \rangle_\nu &= \left| \frac{\theta'_1(\tau)}{\theta_1(z_{12}|\tau)} \right|^{\frac{m^2}{2}} \left| \frac{\theta_\nu\left(\frac{mz}{2}|\tau\right)}{\theta_\nu(\tau)} \right|^2. \end{aligned} \quad (5.30)$$

La (5.30), valida per  $\nu \neq 1$ , è un'espressione quadratica che soddisfa la normalizzazione (5.20) in ogni settore. Si ha dunque per l'entropia di entanglement di un fermione di Dirac sul toro:

$$S_\nu\left(\frac{L}{\Lambda}, \frac{\beta}{\Lambda}\right) = - \left. \frac{d}{dn} \right|_{n=1} \sum_{k=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \log \left\{ \left| \frac{\theta'_1(\tau)}{\theta_1(L|\tau)} \right|^{\frac{2k^2}{n^2}} \left| \frac{\theta_\nu\left(\frac{kL}{n}|\tau\right)}{\theta_\nu(\tau)} \right|^2 \right\}. \quad (5.31)$$

Quest'espressione esplicita, ottenuta nel lavoro [1], presenta molti aspetti fisici interessanti che saranno analizzati nel seguito.

### 5.4.2 Calcolo dell'entropia nel settore $\nu=3$

Il logaritmo<sup>2</sup> del rapporto di funzioni  $\theta_\nu$ , che compare nell'espressione finale dell'entropia di entanglement (5.31), può essere espanso con le formule, [42]:

$$\log \left( \frac{\theta_3(z|\tau)}{\theta_3(0|\tau)} \right) = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \frac{q^{m/2}}{1 - q^m} \sin^2(m\pi z), \quad (5.32)$$

$$\log \left( \frac{\theta_1(z|\tau)}{\theta'_1(\tau)} \right) = \log \left[ \frac{1}{\pi} \sin \pi z \right] + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{q^m}{1 - q^m} \sin^2(m\pi z). \quad (5.33)$$

<sup>2</sup>Per  $\tau$  immaginario e  $z$  reale le funzioni di Jacobi sono reali.

Risulta quindi per l' entropia di entanglement nel settore  $\nu = 3$ :

$$S_3 = S_0 + \tilde{S}_3, \quad (5.34)$$

$$S_0 = \frac{1}{3} \log \left[ \frac{\Lambda}{\pi} \sin \pi \frac{L}{\Lambda} \right] + \frac{4}{3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{q^m}{1 - q^m} \sin^2 \left( m\pi \frac{L}{\Lambda} \right), \quad (5.35)$$

$$\tilde{S}_3 = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \frac{q^{\frac{m}{2}}}{1 - q^m} \left[ \pi m \frac{L}{\Lambda} \cot \left( \pi \frac{L}{\Lambda} m \right) - 1 \right]. \quad (5.36)$$

Notiamo che la scomposizione in due termini dell' entropia di entanglement, (5.34), è conseguenza della forma fattorizzata del correlatore (5.30).

Il primo termine  $S_0$  deriva dal contributo della *prime form*, (5.24) ed è comune a tutti i settori. Il secondo termine  $\tilde{S}_3$  è ottenuto utilizzando la relazione (valida indipendentemente dalla parità di  $n$ ):

$$- \frac{d}{dn} \Big|_{n=1} \sum_{k=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \sin^2 \left( \mu \frac{k}{n} \right) = \frac{1}{2} (\mu \cot \mu - 1), \quad (5.37)$$

con  $\mu = \pi m \frac{L}{\Lambda}$ .

### 5.4.3 Altri settori di spin

Il calcolo della (5.31) puo' essere effettuato anche nei settori di spin  $\nu = 2, 4$  utilizzando l'analogo delle (5.32) e (5.33) per le funzioni  $\theta_2(0|\tau)$  e  $\theta_4(0|\tau)$ , [42]:

$$\log \left( \frac{\theta_2(z|\tau)}{\theta_2(0|\tau)} \right) = \log(\cos \pi z) + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \frac{q^m}{1 - q^m} \sin^2(m\pi z), \quad (5.38)$$

$$\log \left( \frac{\theta_4(z|\tau)}{\theta_4(0|\tau)} \right) = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{q^{\frac{m}{2}}}{1 - q^m} \sin^2(m\pi z). \quad (5.39)$$

Utile per il calcolo nel settore di spin  $\nu = 2$  è anche l'identità:

$$- \frac{d}{dn} \Big|_{n=1} \sum_{k=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \log(1 + e^{-2i\mu \frac{k}{n}}) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \mu \cot \mu m. \quad (5.40)$$

Si ottiene:

$$S_2 = S_0 + \tilde{S}_2, \quad (5.41)$$

$$\tilde{S}_2 = 2 \log 2 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \pi \frac{L}{\Lambda} \cot\left(\pi \frac{L}{\Lambda} m\right) + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \frac{q^m}{1 - q^m} \left[ \pi m \frac{L}{\Lambda} \cot\left(\pi m \frac{L}{\Lambda}\right) - 1 \right] \quad (5.42)$$

e

$$S_4 = S_0 + \tilde{S}_4, \quad (5.43)$$

$$\tilde{S}_4 = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{q^{\frac{m}{2}}}{1 - q^m} \left[ \pi m \frac{L}{\Lambda} \cot\left(\pi m \frac{L}{\Lambda}\right) - 1 \right]. \quad (5.44)$$

# Capitolo 6

## Proprietà dell' entropia di entanglement a temperatura e taglia finita

In questo capitolo analizzeremo alcune conseguenze fisiche ottenibili dall' espressione dell' entropia di entanglement del fermione di Dirac sul toro. Alcune proprietà sono di carattere generale e ci attendiamo che qualitativamente siano simili in ogni *CFT*; altri aspetti sono specifici della teoria libera. In particolare:

- Verificheremo la compatibilità con le formule generali nella geometria del cilindro (Cap. 4).
- Considereremo l'entropia di entanglement nel limite  $\frac{L}{\Lambda} \rightarrow 1$ , in cui la regione tracciata tende a zero e rioterremo l'entropia termica sul toro.
- Individueremo il contributo all'entropia del primo stato eccitato di un fermione corrispondente alla rappresentazione di Virasoro  $h = \frac{1}{2}$ .
- Rideriveremo questo risultato con un metodo generale, mutuato dai risultati del Cap.4.

- Generalizzeremo il calcolo dell'entropia di entanglement sul toro a fermioni di Majorana ( $c = \frac{1}{2}$ ).

## 6.1 Sommario delle formule delle entropie di entanglement

Raccogliamo le formule, derivate nel Cap.5, per l'entropie di entanglement,  $S_\nu = S_0 + \tilde{S}_\nu$  nei vari settori di spin  $\nu = 2, 3, 4$ :

Si è posto  $q = e^{-2\pi\frac{\beta}{\Lambda}}$  e  $\tilde{q} = e^{-2\pi\frac{\Lambda}{\beta}}$ ;

$$S_0(q) = \frac{1}{3} \log \left[ \frac{\Lambda}{\pi} \sin \pi \frac{L}{\Lambda} \right] + \frac{4}{3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{q^m}{1 - q^m} \sin^2 \left( m\pi \frac{L}{\Lambda} \right), \quad (6.1)$$

$$\tilde{S}_3(q) = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \frac{q^{\frac{m}{2}}}{1 - q^m} \left[ \pi m \frac{L}{\Lambda} \cot \left( \pi m \frac{L}{\Lambda} \right) - 1 \right], \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_2(q) = & 2 \log 2 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \pi \frac{L}{\Lambda} \cot \left( \pi m \frac{L}{\Lambda} \right) + \\ & + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \frac{q^m}{1 - q^m} \left[ \pi m \frac{L}{\Lambda} \cot \left( \pi m \frac{L}{\Lambda} \right) - 1 \right], \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\tilde{S}_4(q) = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{q^{\frac{m}{2}}}{1 - q^m} \left[ \pi m \frac{L}{\Lambda} \cot \left( \pi m \frac{L}{\Lambda} \right) - 1 \right]. \quad (6.4)$$

Le formule (6.1)-(6.4) ammettono naturalmente lo sviluppo di bassa temperatura  $q \rightarrow 0$ ; nel seguito sarà necessario utilizzare delle espressioni che permettono lo sviluppo  $\frac{\Lambda}{\beta} \rightarrow \infty$ , ovvero  $\tilde{q} \rightarrow 0$ . Queste formule possono essere ottenute mediante la trasformazione modulare  $\tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$ ,  $z \rightarrow \frac{\bar{z}}{\tau}$ , sulle funzioni  $\theta_\nu$ , vedi Appendice A, che compaiono nelle espressioni dell' entropia ai par. 5.4.2 e 5.4.3. Procedendo al

limite delle repliche nelle espressioni trasformate  $\theta_\nu(\frac{z}{\tau} | -\frac{1}{\tau})$  si ottiene analogamente:

$$S_0(\tilde{q}) = \frac{1}{3} \log \left[ \frac{\beta}{\pi} \operatorname{sh} \frac{\pi L}{\beta} \right] - \frac{4}{3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\tilde{q}^m}{1 - \tilde{q}^m} \operatorname{sh}^2 \left( m\pi \frac{L}{\beta} \right) - \frac{\pi}{3} \left( \frac{L^2}{\Lambda\beta} \right), \quad (6.5)$$

$$\tilde{S}_3(\tilde{q}) = \frac{\pi}{3} \left( \frac{L^2}{\Lambda\beta} \right) + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \left[ \frac{m\pi L}{\beta} \coth \frac{m\pi L}{\beta} - 1 \right] \frac{\tilde{q}^{\frac{m}{2}}}{1 - \tilde{q}^m}, \quad (6.6)$$

$$\tilde{S}_2(\tilde{q}) = \frac{\pi}{3} \left( \frac{L^2}{\Lambda\beta} \right) + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\tilde{q}^{\frac{m}{2}}}{1 - \tilde{q}^m} \left[ \frac{\pi m L}{\beta} \coth \frac{\pi m L}{\beta} - 1 \right], \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_4(\tilde{q}) &= 2 \log 2 + \frac{\pi}{3} \left( \frac{L^2}{\Lambda\beta} \right) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\pi L}{\beta} \coth \frac{\pi m L}{\beta} + \\ &+ 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \frac{\tilde{q}^m}{1 - \tilde{q}^m} \left[ \frac{\pi m L}{\beta} \coth \frac{\pi m L}{\beta} \right]. \end{aligned} \quad (6.8)$$

## 6.2 Limiti alla geometria del cilindro

Nel limite di basse temperature,  $\beta \rightarrow \infty$ , il toro degenera nel cilindro corrispondente a condizioni periodiche spaziali di lunghezza  $\Lambda$ . I parametri dell'entropia soddisfano:

$$\frac{\beta}{\Lambda} \rightarrow \infty; \quad z = \frac{L}{\Lambda} \text{ finito}, \quad q \rightarrow 0. \quad (6.9)$$

In questo limite otteniamo:

$$\lim_{q \rightarrow 0} S_0(q) = \frac{1}{3} \log \left[ \frac{\Lambda}{\pi} \sin \pi \frac{L}{\Lambda} \right], \quad (6.10)$$

e

$$\lim_{q \rightarrow 0} \tilde{S}_3(q) = \lim_{q \rightarrow 0} \tilde{S}_4(q) = 0, \quad (6.11)$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \tilde{S}_2(q) = 2 \log 2 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \pi \frac{L}{\Lambda} \cot \left( \pi m \frac{L}{\Lambda} \right). \quad (6.12)$$

Il limite di  $S_0$  verifica il risultato generale (4.24) per  $c = 1$ . Infatti a bassa temperatura la miscela statistica si riduce al solo stato fondamentale  $|0\rangle$ . Il contributo degli stati eccitati si annulla nella (6.11) per i settori  $\nu = 3, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  e  $\nu = 4, (\frac{1}{2}, 0)$ , cor-

rispondenti a condizioni antiperiodiche nello spazio. Ricordiamo che le condizioni antiperiodiche sono quelle naturali nel *path integral* fermionico.

Il settore  $\nu = 2, (0, \frac{1}{2})$  corrisponde al vuoto di Ramond periodico nello spazio che puo' essere pensato come l'introduzione di campi di spin sul vuoto antiperiodico di Neveu-Schwarz. Di conseguenza il limite  $q \rightarrow 0$  dell' entropia non riproduce il risultato generale del Cap.4 ma contiene un contributo aggiuntivo,  $\lim_{q \rightarrow 0} \tilde{S}_2(q)$  nella (6.12).

L'altro limite del toro nel cilindro corrisponde ad un sistema di taglia infinita a temperatura  $T = \frac{1}{\beta}$ , finita. Il limite dei parametri di  $S$  è:

$$\frac{\Lambda}{\beta} \rightarrow \infty; \quad \frac{L}{\beta} \text{ finito}, \quad \tilde{q} \rightarrow 0. \quad (6.13)$$

Il limite  $\tilde{q} \rightarrow 0$  si puo' effettuare nelle espressioni (6.5)-(6.8) ottenute per trasformazione modulare. Ricaviamo:

$$\lim_{\tilde{q} \rightarrow 0} S_0(\tilde{q}) = \frac{1}{3} \log \left[ \frac{\beta}{\pi} \text{sh} \frac{\pi L}{\beta} \right], \quad (6.14)$$

$$\lim_{\tilde{q} \rightarrow 0} S_3(\tilde{q}) = \lim_{\tilde{q} \rightarrow 0} S_2(\tilde{q}) = 0, \quad (6.15)$$

ancora in accordo con il risultato generale al Cap.4. Nel caso di  $\tilde{S}_4(\tilde{q})$ , corrispondente a condizioni periodiche temporali rimane ancora un termine aggiuntivo:

$$\lim_{\tilde{q} \rightarrow 0} \tilde{S}_4 = 2 \log 2 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\pi L}{\beta} \coth \frac{\pi m L}{\beta}. \quad (6.16)$$

Notiamo infine che entrambi i limiti del toro nel cilindro sono riprodotti dal termine  $S_0$  dell' entropia (cfr. (6.10), (6.14)) comune a tutti i settori: è ragionevole supporre che questa sia l' entropia di entanglement a  $\Lambda$  e  $\beta$  finiti degli stati che appartengono al Verma modulo dello stato fondamentale  $|0\rangle$  e delle sue deformazioni locali.

## 6.3 Limite termico

Nei due prossimi paragrafi discutiamo il limite  $L \rightarrow \Lambda$ , dell' entropia di entanglement  $S_\nu$  nei settori di spin  $\nu = 2, 3, 4$ .

### 6.3.1 Limite termico nel settore di spin $\nu = 3$

Consideriamo prima il settore naturale delle condizioni antiperiodiche lungo entrambi i cicli del toro. Una verifica non banale della correttezza dell'entropia di entanglement  $S_3$  è fornita dal limite  $\frac{L}{\Lambda} \rightarrow 1$ , in cui la regione tracciata B (non osservata) tende a zero. Ci aspettiamo che la matrice densità ridotta  $\rho_A$  si riduca alla matrice densità termica  $\rho_T$  nella geometria del toro. I risultati del limite  $L \rightarrow \Lambda$  nelle espressioni dell'entropia ( $\nu = 3$ ) sono i seguenti. Nel primo termine  $S_0$ , (6.1), comune a tutti i settori, otteniamo:

$$S_0\left(\frac{L}{\Lambda}\right) \sim \frac{1}{3} \log\left(\frac{\varepsilon}{a}\right); \quad \Lambda - L = \varepsilon \rightarrow 0, \quad (6.17)$$

corrispondente all'entropia di entanglement a temperatura zero per la regione B di lunghezza infinitesima  $\Lambda - L$ .

Il limite  $L \rightarrow \Lambda$  in  $\tilde{S}_3$ , si puo' effettuare nella serie in  $\tilde{q}$ , (6.6), perché quella in  $q$ , (6.2), ha coefficienti singolari. Il risultato è:

$$\lim_{\frac{L}{\Lambda} \rightarrow 1} \tilde{S}_3(\tilde{q}) = \frac{\pi\Lambda}{3\beta} + 4\left(1 - \beta \frac{\partial}{\partial\beta}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \log\left(1 + e^{-\frac{2\pi\Lambda}{\beta}(m-\frac{1}{2})}\right) \quad (6.18)$$

$$= \left(1 - \beta \frac{\partial}{\partial\beta}\right) \log Z_3 \quad (6.19)$$

$$= S_3^T(\beta). \quad (6.20)$$

Tale limite coincide con l'entropia termica  $S_3^T(\beta)$ , nel settore di spin  $\nu = 3$ , ottenuta



per derivazione della funzione di partizione termica, nel settore corrispondente<sup>1</sup>:

$$Z_3(\tilde{q}) = \left| \frac{\theta_3(-\frac{1}{\tau})}{\eta(-\frac{1}{\tau})} \right|^2 = \tilde{q}^{-\frac{1}{12}} \prod_{m=1}^{\infty} (1 + \tilde{q}^{m-\frac{1}{2}})^4. \quad (6.21)$$

Per ricavare l' identità  $\tilde{S}_3(L = \Lambda) = S^T(\beta)$  è sufficiente osservare che:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \log(1 + e^{-\frac{2\pi\Lambda}{\beta}(m-\frac{1}{2})}) = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} \frac{\tilde{q}^{\frac{j}{2}}}{1 - \tilde{q}^j}. \quad (6.22)$$

e confrontare le derivate rispetto a  $\beta$  di entrambi i membri.

Alcune considerazioni emergono da questi risultati:

- Il limite  $L \rightarrow \Lambda$  di  $S_3$  non è equivalente a  $L \rightarrow 0$ , perché non vale la proprietà  $S(A) = S(B)$  per l'entanglement di uno stato misto. Per il termine  $S_0$  che descrive il contributo dello stato fondamentale (più correzioni di taglia finita) questa proprietà è invece verificata:  $S_0(L) = S_0(\Lambda - L)$ .
- Il contributo all' entanglement degli stati eccitati della teoria conforme  $h = \frac{m}{2}$ ,  $m = 1, 2, \dots$  contenuto nel termine  $\tilde{S}_3$  riproduce correttamente l'entropia termica, in accordo con  $\rho_A \rightarrow \rho_T$ .
- Il termine  $S_0$  corrispondente al contributo dell'entropia di entanglement a temperatura nulla diverge nel limite  $L \rightarrow \Lambda$  e deve essere sottratto. Osserviamo che le espressioni di  $Z_\nu(\beta)$ ,  $S_\nu^T(\beta)$  ottenute dal calcolo di *CFT* sono automaticamente sottratte dei termini dominanti dipendenti dal cut-off. Il limite  $\frac{L}{\Lambda} \rightarrow 1$  di  $\rho_A$  richiede un'ulteriore regolarizzazione della traccia perché:

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho_T \sim \rho_T \text{Tr}_B \mathbf{1}, \quad \frac{L}{\Lambda} \rightarrow 1. \quad (6.23)$$

---

<sup>1</sup>Questa funzione di partizione normalizza ad uno la degenerazione dello stato di vuoto  $|0\rangle$ .

### 6.3.2 Limite termico negli altri settori di spin

Il limite  $L \rightarrow \Lambda$ , nel settore  $\nu = 2$ , si effettua analogamente nell' espressione  $\tilde{S}_2(\tilde{q})$ , (6.7). Si ottiene ancora l'entropia termica di questo settore:

$$\lim_{\frac{L}{\Lambda} \rightarrow 1} \tilde{S}_2(\tilde{q}) = S_2^T(\beta), \quad (6.24)$$

espressa dalla derivata del logaritmo della funzione di partizione, (vedi par.6.3.1):

$$Z_2(\tilde{q}) = \left| \frac{\theta_4(-\frac{1}{\tau})}{\eta(-\frac{1}{\tau})} \right|^2 = \tilde{q}^{-\frac{1}{12}} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \tilde{q}^{m-\frac{1}{2}})^4. \quad (6.25)$$

Per il settore  $\nu = 4$ , diamo prima l'espressione dell' entropia termica,

$$Z_4(\tilde{q}) = \left| \frac{\theta_2(-\frac{1}{\tau})}{\eta(-\frac{1}{\tau})} \right|^2 = \prod_{m=1}^{\infty} 4\tilde{q}^{\frac{1}{6}} (1 + \tilde{q}^m)^4, \quad (6.26)$$

$$S_4^T(\beta) = \left( 1 - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \log Z_4(\tilde{q}) \quad (6.27)$$

$$= 2 \log 2 - \frac{2\pi}{3\beta} + 4 \left( 1 - \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \log(1 + e^{-\frac{2\pi mL}{\beta}}). \quad (6.28)$$

Questo risultato si ottiene dal limite  $L \rightarrow \Lambda$  dell' espressione  $\tilde{S}_4(\tilde{q})$ , (6.8), utilizzando l' identità:

$$2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\pi L}{\beta} \coth \frac{\pi mL}{\beta} = -\frac{\pi L}{\beta} + 4\pi \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{L}{\beta} \frac{1}{e^{\frac{2\pi mL}{\beta}} - 1}, \quad (6.29)$$

che si può dimostrare usando la regolarizzazione:  $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m = -\frac{1}{2}$ .

## 6.4 Limite di alta temperatura

Consideriamo le espressioni dell' entropia di entanglement nel limite di alta temperatura, tenendo le dimensioni spaziali del sistema fissate:

$$\frac{\Lambda}{\beta} \rightarrow \infty, \quad \frac{L}{\beta} \rightarrow \infty, \quad \frac{L}{\Lambda} \text{ finito}, \quad \tilde{q} = e^{-2\pi\frac{\Lambda}{\beta}} \rightarrow 0. \quad (6.30)$$

Nel settore  $\nu = 3$ , otteniamo:

$$S_0(\tilde{q}) + \tilde{S}_3(\tilde{q}) \sim \frac{\pi L}{3\beta} + \frac{1}{3} \log \frac{\beta}{2\pi a} + O(e^{-2\pi\frac{(\Lambda-L)}{\beta}}). \quad (6.31)$$

Il primo termine corrisponde all'entropia termica *leading* per un sistema di lunghezza  $L$ :

$$S_3^T(\beta) \sim \frac{\pi L}{3\beta} + O(e^{-\pi\frac{\Lambda}{\beta}}) + O(1), \quad (6.32)$$

in accordo con l'intuizione che la correlazione quantistica fra le regione  $A$  e  $B$  si perde ad alte temperature. I termini *subleading* termici  $O(e^{-2\pi\frac{\Lambda}{\beta}})$  (toro) oppure  $O(1) = \log(g_i g_j)$  (anello con boundary conforme) non sono riprodotti dall' entropia di entanglement (6.31) negli sviluppi in serie termine a termine. L'analisi del disaccoppiamento (*disentangled*) di tutti gli stati eccitati nel limite termodinamico richiede una risommazione della serie che non sarà discussa in questa tesi.

## 6.5 Entropia del primo stato eccitato

Per identificare il primo stato eccitato confrontiamo l' entropia termica con l' entropia di entanglement a basse temperature; formalmente entrambe saranno date dallo sviluppo in serie  $q = e^{-2\pi\frac{\beta}{\Lambda}} \rightarrow 0$ . Infatti l' operazione di traccia parziale sui gradi di libertà del sistema in  $B \equiv \Lambda - L$  è realizzabile stato per stato nella matrice

densità termica:

$$\rho_T = \frac{1}{Z}(|0\rangle\langle 0| + q^h|h\rangle\langle h| + \dots) \quad (6.33)$$

$$\rho_A = \frac{1}{Z}(\text{Tr}_B|0\rangle\langle 0| + q^h\text{Tr}_B|h\rangle\langle h| + \dots) \quad (6.34)$$

dove si è posto nulla l' energia del vuoto ed è importante osservare che la normalizzazione delle tracce è in entrambi i casi la funzione di partizione  $Z$ . Lo sviluppo a basse temperature dell' entropia termica  $S_3^T(q)$  è:

$$S_3^T(q) = 4\left(1 - \beta \frac{\partial}{\partial \beta}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \log(1 + q^{(m-\frac{1}{2})}) \quad (6.35)$$

$$\sim 4q^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{\pi\beta}{\Lambda}\right] \equiv 4q^{\frac{1}{2}} C_t\left(\frac{\beta}{\Lambda}\right), \quad \beta \rightarrow \infty, \quad (6.36)$$

(si noti che  $S_3^T(0) = 0$  perché lo stato fondamentale è non degenerare per  $\nu = 3$ ). La potenza  $q^{\frac{1}{2}}$  corrisponde all'eccitazione di un fermione, ovvero allo stato di peso massimo di Virasoro:

$$|\frac{1}{2}\rangle \equiv e^{i\phi(0)} = D(0)|0\rangle, \quad (6.37)$$

prodotto dal campo fermionico stesso.

L'analogo sviluppo dall' entropia di entanglement, dato dalle espressioni per  $S_0(q)$ , (6.1) e  $\tilde{S}_3(q)$ , (6.2) conduce a:

$$S_3(q \rightarrow 0) \sim \frac{1}{3} \log\left[\frac{\Lambda}{\pi} \sin \frac{\pi L}{\Lambda}\right] + 4q^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{\pi L}{\Lambda} \cot\left(\frac{\pi L}{\Lambda}\right)\right] \quad (6.38)$$

$$= \frac{1}{3} \log\left[\frac{\Lambda}{\pi} \sin \frac{\pi L}{\Lambda}\right] + 4q^{\frac{1}{2}} C_e\left(\frac{L}{\Lambda}\right). \quad (6.39)$$

L' interpretazione fisica del primo termine dello sviluppo è una variazione dell'entropia di entanglement quantificata dal coefficiente  $C_e$  (entropia di entanglement selettiva) dovuta allo stato  $|\frac{1}{2}\rangle$  nello spettro della teoria con probabilità  $q^{\frac{1}{2}}$ .

## 6.6 Un' altra derivazione dell' entropia

Proponiamo una derivazione più semplice dei risultati dei par. 4.3 e 4.5 per l'entropia di entanglement in  $CFT$ , basata sulle idee di [30]. Questa derivazione ci consentirà di riottenere indipendentemente il risultato (6.39) per l'entanglement del primo stato eccitato.

Consideriamo una teoria di campo invariante conforme a temperatura zero definita nel piano  $w$ , come nel par. 4.3.

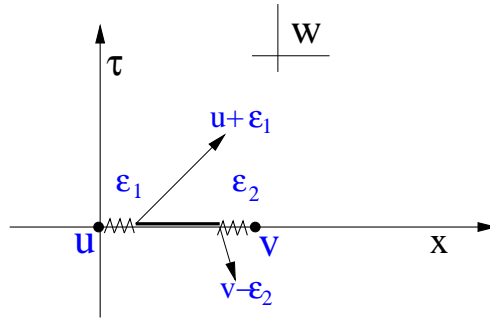


Figura 6.1: Sistema A di lunghezza  $L = v - u$  e cutoff  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$

Per semplicità sia  $u = 0$ . Introduciamo due cut-off in  $u$  e  $v$ ,  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  per dividere il sottosistema A di lunghezza  $L = v - (\epsilon_1 + \epsilon_2) \sim v$ , che viene osservato dal suo complementare B. La trasformazione (Figura 6.2),

$$z = \left( \frac{w - u}{w - v} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (6.40)$$

separa i due sistemi A e B e mappa su  $\mathbb{C}$  le  $n$  repliche con coordinata  $w$ .

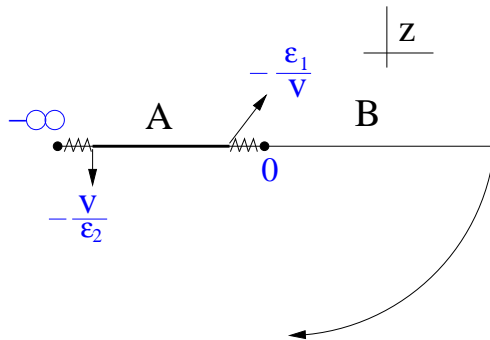


Figura 6.2: Prima trasformazione conforme

Ponendo poi:

$$z = e^\xi, \quad (6.41)$$

possiamo interpretare la funzione di partizione  $Z_n(A)$  nel piano  $z$  come funzione di partizione nel canale aperto su un anello con circonferenza di lunghezza<sup>2</sup>  $2\pi$ . La direzione non compattificata dell' anello (vedi Figura 6.3) ha lunghezza  $\tilde{L}$ :

$$\tilde{L} \equiv \frac{1}{n} \left[ \xi\left(\frac{v}{\varepsilon_2}\right) - \xi\left(\frac{\varepsilon_1}{v}\right) \right]; \quad (6.42)$$

il parametro  $q$  dell' anello, vedi Cap.2, è  $e^{2\pi i\tau}$ , dove  $\tau = i\frac{2\pi}{\tilde{L}}$ . Passando all' evoluzio-

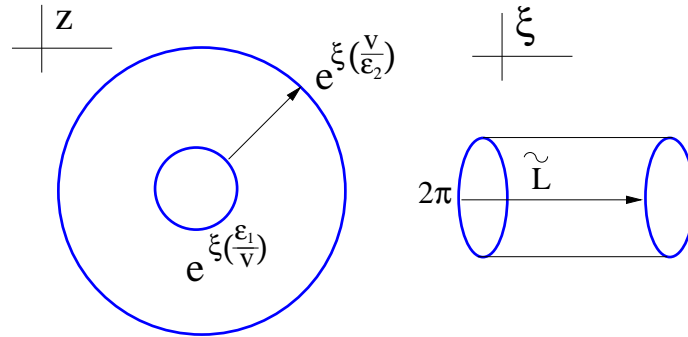


Figura 6.3: Seconda trasformazione conforme

ne nel canale chiuso, radiale nel piano di  $z$ , otteniamo per la funzione di partizione  $Z_n$ :

$$Z_n = \langle 0; \varepsilon_2 | e^{-\tilde{L}H} | 0; \varepsilon_1 \rangle, \quad (6.43)$$

dove  $|0; \varepsilon_1\rangle$  e  $|0; \varepsilon_2\rangle$  sono stati di bordo formali che rappresentano i cut-off e l'hamiltoniana che evolve nella direzione radiale è:

$$H = (L_0 + \bar{L}_0) - \frac{c}{12}, \quad (6.44)$$

All' ordine più basso in  $\tilde{q} = e^{-\tilde{L}}$ , risulta:

$$Z_n = \langle 0; \varepsilon_1 | \tilde{q}^{(L_0 + \bar{L}_0) - \frac{c}{12}} | 0; \varepsilon_2 \rangle \sim \langle 0; \varepsilon_1 | 0 \rangle \langle 0 | 0; \varepsilon_2 \rangle \tilde{q}^{-\frac{c}{12}}. \quad (6.45)$$

<sup>2</sup>La lunghezza del raggio della circonferenza è inessenziale, comunque non comparirebbe in  $\tau$

Utilizzando, (ponendo  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ):

$$\tilde{L} = \frac{1}{n} \log \frac{v^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = \frac{2}{n} \log \frac{L}{\varepsilon}, \quad (6.46)$$

e la definizione di entropia di entanglement:

$$S = \left( 1 - n \frac{d}{dn} \right) \Big|_{n=1} \log Z_n, \quad (6.47)$$

si ottiene il risultato di Cardy  $S = \frac{c}{3} \log \frac{L}{\varepsilon} + \text{cost}$ , (4.20), con delle costanti che possono essere pensate come elementi di matrici di stati di bordo.

Il caso cilindrico ( $S^1 \times \mathbb{R}$ ) è analogo; la periodicità di  $\Lambda = 2\pi R$  nella coordinata spaziale,  $Re(\sigma)$ , è realizzata dalla mappa (vedi Figura 6.4):

$$w = e^{i\frac{\sigma}{R}}. \quad (6.48)$$

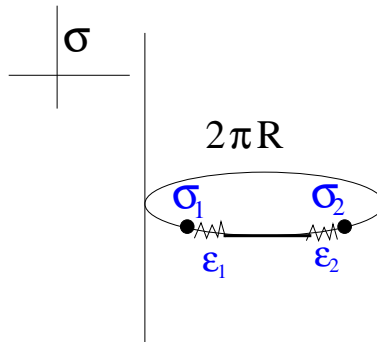


Figura 6.4: Spazio tempo cilindrico.

Poniamo  $\sigma_1 = 0 \Rightarrow u = e^{i\frac{\sigma_1}{R}} = 1$ ,  $v = e^{i\frac{\sigma_2}{R}}$  e  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ . Componendo le trasformazioni conformi (6.40) e (6.41) si ottiene:

$$\xi(\varepsilon) = \frac{1}{n} \log \left( \frac{e^{i\frac{\varepsilon}{R}} - 1}{e^{i\frac{\varepsilon}{R}} - e^{i\frac{\sigma_2}{R}}} \right), \quad (6.49)$$

$$\xi(\sigma_2 - \varepsilon) = \frac{1}{n} \log \left( \frac{e^{-i\frac{\varepsilon}{R}} - e^{-i\frac{\sigma_2}{R}}}{e^{-i\frac{\varepsilon}{R}} - 1} \right). \quad (6.50)$$

La corrispondente lunghezza dell' anello  $\tilde{L} = \xi(\sigma_2 - \varepsilon) - \xi(\varepsilon)$ , analoga della (6.42) è adesso:

$$\tilde{L} = \xi(\sigma_2 - \varepsilon) - \xi(\varepsilon) = \frac{1}{n} \log \left[ \frac{4R^2}{\varepsilon^2} \sin^2 \frac{\sigma_2}{2R} \right]. \quad (6.51)$$

Applicando nuovamente la definizione di entropia di entanglement (6.47), si ha:

$$S = \frac{1}{3} \log \left( \frac{2R}{\varepsilon} \sin \frac{\sigma_2}{2R} \right) + \text{cost}, \quad (6.52)$$

che coincide per  $2R = \frac{L}{\pi}$  e  $\sigma_2 = L$  con la (4.23). Abbiamo quindi riottenuto i risultati di Cardy-Calabrese studiando direttamente la funzione di partizione delle repliche  $Z_n$ , invece del corrispondente valore d'aspettazione  $\langle T^{(n)} \rangle_{\mathcal{R}^n}$ , sua derivata prima.

Questa formulazione è utile per stimare i contributi degli stati eccitati. Consideriamo l'espressione della potenza  $n$ -esima della matrice densità ridotta  $\rho_A$  in presenza dello stato eccitato  $|h\rangle$ :

$$\rho_A^n = \frac{q^{\frac{nc}{12}}}{Z^n} \left[ \text{Tr}_B \left( |0\rangle\langle 0| + q^h |h\rangle\langle h| \right) \right]^n; \quad q = e^{-2\pi\frac{\beta}{L}} = e^{-\frac{\beta}{R}}. \quad (6.53)$$

Poiché gli stati  $|0\rangle$  e  $|h\rangle$  sono ortogonali i loro contributi sono separati:

$$\rho_A^n = \frac{q^{\frac{nc}{12}}}{Z^n} \left[ \left( \text{Tr}_B |0\rangle\langle 0| \right)^n + \left( \text{Tr}_B |h\rangle\langle h| \right)^n \right]. \quad (6.54)$$

Supponiamo che l'operazione di traccia sui gradi di libertà del sottosistema B, che definisce la matrice densità ridotta  $\rho_A$  e successivamente la traccia sui gradi di



libertà di  $A$ , per il calcolo dell' entropia di entanglement (6.47) siano realizzate dalla composizione di trasformazioni conformi (6.40) e (6.41). La funzione di partizione delle repliche  $Z(n) = \text{Tr} \rho_A^n$  ottenuta dalla (6.45) risulterà la somma di due termini:

$$\langle 0; \varepsilon_2 | e^{-\tilde{L}H} | 0; \varepsilon_1 \rangle = e^{+\tilde{L} \frac{c}{12}} \equiv Z_0(n), \quad (6.55)$$

$$\langle h | e^{-\tilde{L}H} | h \rangle = e^{+\tilde{L}(\frac{c}{12} - h)} \langle h | h \rangle_z \equiv Z_h(n), \quad (6.56)$$

dove  $H$  è l'hamiltoniana che evolve nella direzione radiale del piano  $z$ , Figura 6.3 e  $\langle h | h \rangle_z$  è l'ampiezza di probabilità di transizione valutata nel piano  $z$  tra gli stati eccitati  $|h\rangle$ . Questa quantità è naturalmente definita nella quantizzazione radiale sul cilindro di coordinata  $\sigma$  con  $w = e^{i\frac{\sigma}{R}}$  (vedi Figura 6.4). Lo stato ket  $|h\rangle$  corrisponde allo stato asintotico creato dal campo  $\phi_h$  a  $\tau = -\infty$ ,  $w = 0$  e lo stato bra  $\langle h|$  allo stato asintotico creato da  $\phi_h^*$  a  $\tau = \infty$ ,  $w = \infty$ . Nel piano  $w$  l'ampiezza  $\langle h | h \rangle_w$  è definita da, vedi [3]:

$$\langle h | h \rangle_w = \lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ w' \rightarrow \infty}} w'^{2h} \langle 0 | \phi_h(w') \phi_h(w) | 0 \rangle. \quad (6.57)$$

Notiamo che la trasformazione conforme (6.40) mappa il punto all'infinito  $w' = w_\infty = \infty$  nel punto  $z_\infty = 1$  e  $w = 0$  nel punto  $z_0 = \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{n}}$ . Entrambi i punti  $z_\infty$  e  $z_0$  sono finiti.

Dalle regole di trasformazione del campo primario  $\phi_h(w)$ , posto  $x = \frac{u}{v}$ :

$$\langle h | h \rangle_z = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z' \rightarrow z_\infty}} (w_\infty)^{2h} \left(\frac{dz}{dw}\right)_{z=z_\infty}^h \left(\frac{dz}{dw}\right)_{z=z_0}^h \langle 0 | \phi_h(z_\infty) \phi_h(z_0) | 0 \rangle_z \quad (6.58)$$

$$= \left[ \frac{1}{n} \frac{x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{1}{2n}} - x^{\frac{1}{2n}}} \right]^{2h}, \quad (6.59)$$

dove abbiamo usato:  $\frac{dz}{dw} = \frac{1}{n} z \frac{v-u}{(w-u)(w-v)}$ . Osserviamo che l'ampiezza  $\langle h | h \rangle_z$ , espressa dalla (6.59) è correttamente normalizzata nel limite  $n \rightarrow 1$ .

Dalla funzione di partizione delle repliche (6.45), otteniamo il termine *sublea-*

ding dell' entropia di entanglement  $S$ , in presenza dello stato eccitato  $|h\rangle$ :

$$\Delta S = \left(1 - n \frac{d}{dn}\right)_{n=1} \log \langle h|h \rangle_z = - \frac{d}{dn} \Big|_{n=1} \left[ 2h \log \left( \frac{x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{1}{2n}} - x^{\frac{1}{2n}}} \right) \right] \quad (6.60)$$

$$= 2h \left[ 1 + \frac{1}{2} \log x \frac{x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}} \right]. \quad (6.61)$$

Passando alle variabili sul cilindro  $u = 1$ ,  $v = e^{i\frac{L}{R}}$ , l'entropia di entanglement (6.61)

si riscrive:

$$\Delta S = 2h \left( 1 - \frac{L}{2R} \cot \frac{L}{2R} \right) = 2h \left( 1 - \frac{\pi L}{\Lambda} \cot \frac{\pi L}{\Lambda} \right). \quad (6.62)$$

Per  $h = \frac{1}{2}$  e molteplicità dello stato  $|\frac{1}{2}\rangle$ , uguale a 4 come espressa dalla funzione di partizione (6.21) nel settore  $\nu = 3$  questo risultato coincide con il coefficiente  $C_e\left(\frac{L}{\Lambda}\right)$  della (6.39).

Abbiamo quindi mostrato come riottenere l'entropia termica del primo stato fermionico con argomenti generali della *CFT* e delle sue rappresentazioni. Questo è solo il primo passo per ottenere un'espressione Hamiltoniana generale dell' entropia di entanglement, analoga a quella termica (Cap.2). Restano da interpretare gli altri stati eccitati nella  $\tilde{S}_3(q)$ , (6.2).

## 6.7 Entanglement del fermione di Majorana

Consideriamo l'elemento di matrice densità ridotta nel settore  $\nu = 3$  per i due fermioni indipendenti di Majorana  $\psi_1, \psi_2$  sul toro:

$$\rho_A^M(\psi_{1-}, \psi_{1+}) \rho_A^M(\psi_{2-}, \psi_{2+}) = \frac{1}{[Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}]^2} \int_{C(0,L)} \mathcal{D}[\psi_1 \psi_2] e^{-S[\psi_1] - S[\psi_2]}, \quad (6.63)$$

dove le condizioni  $C(0, L)$  sono sullo stesso taglio come nella (4.10) per ognuno dei due campi. Osservando le espressioni (6.21) e (5.8) della funzione di partizione e dell' azione del fermione di Dirac sul toro nel settore di spin  $\nu = 3$  l'integrale

funzionale (6.63) si riscrive:

$$\frac{1}{Z_3} \int_{C(0,L)} \mathcal{D}[DD^*] e^{-S[D,D^*]}. \quad (6.64)$$

Le condizioni al contorno  $C(0, L)$  fissano una particolare configurazione per il fermione di Dirac ai bordi superiori ed inferiori del taglio, dunque la (6.64) è anche l'elemento di matrice densità ridotta  $\rho_A$  per un fermione di Dirac nel settore di spin  $\nu = 3$ . Ne segue la fattorizzazione:

$$\text{Tr} \rho_A^n = \text{Tr} (\rho_A^M)^{2n}. \quad (6.65)$$

Applicando il metodo delle repliche otteniamo la semplice relazione, fra entropie d'entanglement nelle due teorie:

$$S_3^D = 2S_3^M, \quad (6.66)$$

che vale anche negli altri settori di spin.

La (6.66) è confermata dal valore della carica centrale,  $c = \frac{1}{2}$ , e dal limite termico  $\frac{L}{\Lambda} \rightarrow 1$  ottenuti dalle formule (6.5)-(6.8). In conclusione la relazione (6.66) è in accordo con il legame fra l'entropie termiche che segue dalla forma fattorizzata delle funzioni di partizione (5.6) in ogni settore.

# Capitolo 7

## Entanglement in sistemi unidimensionali e bidimensionali a bassa temperatura

In questo capitolo presentiamo una breve rassegna dei risultati in letteratura che utilizzano l'entropia di entanglement per caratterizzare le proprietà di sistemi quantistici a molti corpi della materia condensata in bassa dimensionalità. Si tratta di un campo in grande sviluppo e ricco di proposte.

Un ampio tema di ricerca riguarda il diagramma delle fasi dei sistemi mono e bidimensionali a temperatura quasi nulla dove gli effetti quantistici non possono essere trascurati. Si parla di fasi e transizioni di fase a  $T = 0$ , [43], quando lo stato fondamentale cambia qualitativamente al variare di un parametro nell'hamiltoniana e il gap si annulla in un punto (ad esempio, variando il campo magnetico trasverso in un ferromagnete unidimensionale).

Un paradigma generale per studiare le fasi di un sistema magnetico è la teoria di Landau, con azione:

$$S_{\text{eff}} = \int \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + V(\varphi).$$

Come è noto, studiando i minimi di  $V(\varphi)$  si possono descrivere le fasi di un ferro-

magnete in cui  $\langle \phi \rangle$  è la magnetizzazione, o parametro d'ordine. I punti multi-critici ( $n$  critici) corrispondono all'annullarsi delle prime  $(2n - 1)$  derivate di  $V(\varphi)$ , [44]. La teoria di Landau si può applicare al sistema quantistico in  $d$  dimensioni interpretandolo come un problema statistico classico in una dimensione aggiuntiva,  $(d + 1)$ , per  $d$  sufficientemente grande da giustificare l'approccio semiclassico, (piccole fluttuazioni del parametro d'ordine).

D'altra parte, i sistemi in bassa dimensionalità presentano delle specificità che rendono difficile l'uso della teoria di Landau ed hanno spinto a considerare approcci alternativi.

## 7.1 Difficoltà della teoria di Landau e parametri d'ordine non locali

In  $d + 1 = 2$  non è possibile rottura della simmetria continua (teorema di Goldstone o Mermin-Wagner), per cui  $\langle \varphi \rangle = 0$  e le sue fluttuazioni non sono trascurabili (*long range order*). L'assenza di un parametro d'ordine locale ha portato allo studio di quantità non locali che possano caratterizzare il diagramma delle fasi. Una di queste potrebbe essere l'entropia di entanglement analizzata in questa tesi: questa proposta è discussa nella recente rassegna [23]. L'entanglement dello stato fondamentale bipartito in sistemi magnetici unidimensionali è stato misurato numericamente, [45] e calcolato in tutto il diagramma delle fasi nel limite continuo  $a \ll \xi \ll \infty$ , utilizzando i metodi dei sistemi integrabili, [31]. I risultati della teoria conforme e massiva descritti ai Cap. 4 e 5 sono stati verificati ampiamente. In breve, il risultato principale è che il comportamento dell'entropia di entanglement descrive i cambiamenti qualitativi dello stato fondamentale, ma non può essere considerata come parametro d'ordine (non locale) delle transizioni di fase nel senso stretto attribuito alla magnetizzazione, [46], [47]. Naturalmente ancora molto rimane da capire, in particolare il ruolo dell'entanglement degli stati eccitati che

abbiamo enfatizzato in questa tesi.

## 7.2 Statistica frazionaria e ordine topologico

In  $d+1=3$ , alcuni sistemi presentano stati fondamentali con un gap che hanno nuove proprietà di natura topologica, come ad esempio una degenerazione intrinseca che dipende dalla geometria del sistema (detta ordine topologico di X.G.Wen [48], per distinguerla dall'ordine locale ovvero  $\langle \varphi \rangle \neq 0$ ). Una comprensione di questi effetti è basata sull'azione effettiva di Chern-Simons, [49]:

$$S_{\text{eff}} = \frac{k}{4\pi} \int d^3x \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu A^\rho + A_\mu j^\mu, \quad A_\mu = \varepsilon^{\mu\alpha\beta} \partial_\alpha J_\beta, \quad (7.1)$$

dove  $A_\mu$  è un campo di gauge effettivo duale della corrente di materia  $J_\mu = (\rho, J_i)$ ,  $\rho = \psi^\dagger \psi$ ,  $J_i = \frac{1}{i}(\psi^\dagger \overleftrightarrow{\partial} \psi)$ . Nella sua forma più semplice (7.1), la teoria si applica a sistemi in cui la simmetria di parità spaziale è rotta, ad esempio per la presenza di un campo magnetico  $B$  esterno come nell'effetto Hall quantistico, [50]. L'azione di Chern-Simons è il primo termine nello sviluppo in potenze delle derivate della corrente di materia e quindi descrive gli effetti dominanti a grande distanza. In particolare, l'equazione del moto:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho} \partial^\mu A^\nu = \frac{2\pi}{k} j_\rho, \quad (7.2)$$

non dà luogo alla propagazione di eccitazioni locali (ad esempio, un fotone in due dimensioni) ma solo a effetti topologici ed eccitazioni in dimensioni inferiori (onde di bordo unidimensionali) che adesso discuteremo.

In presenza di sorgenti puntiformi statiche l'equazione del moto diventa:

$$B(A)(x) = \frac{2\pi}{k} \delta(x - x_0). \quad (7.3)$$

Questa equazione significa che le eccitazioni, fluttuazioni di materia, interagiscono

fra di loro con fasi di Aharanov-Bohm indipendenti dalla distanza:

$$e^{\oint A_\mu dx^\mu} = e^{i \oint B d\sigma} = e^{i \frac{2\pi}{k}}, \quad (7.4)$$

che assumono valori frazionari ( $k \neq 1$ ). Queste fasi determinano la statistica frazionaria delle eccitazioni,  $\frac{\theta}{\pi} = \frac{1}{k}$  (ad esempio,  $\frac{1}{k} = \frac{1}{3}$  che interpola fra la statistica bosonica,  $\frac{\theta}{\pi} = 0$ , e fermionica  $\frac{\theta}{\pi} = 1$ ). Le eccitazioni con statistica quantistica frazionaria (e carica frazionaria) sono dette “anyons” e si osservano nell’effetto Hall quantistico [50]. Esse sono state inoltre proposte per sistemi antiferromagnetici detti “liquidi di spin” e reticoli di giunzioni Josephson, [48].

Per anioni  $\frac{n}{k}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , la degenerazione dello stato fondamentale (ordine topologico) nello spazio compatto del toro è pari a  $k$ , [48]. Questa degenerazione assicura la compatibilità del vuoto con la presenza di eccitazioni anioniche in una superficie compatta che contiene percorsi chiusi non contraibili.

### 7.3 Entropia di entanglement topologica

È naturale aspettarsi che l’ordine topologico sia legato ad un’entropia a temperatura nulla e quindi all’entanglement. Nel lavoro [51] è stata dimostrata la seguente relazione. Consideriamo lo stato fondamentale dell’effetto Hall frazionario nel piano illimitato ed effettuiamo la bipartizione nelle regioni  $A$  e  $B$ , dove  $A$  è un disco di circonferenza  $L$  centrato nell’origine e  $B$  il resto del sistema. Poiché lo stato fondamentale ha un gap ci aspettiamo la legge di area per l’entropia di entanglement:

$$S_{\rho_A} = k \frac{L}{a} - \gamma + O\left(\frac{1}{L}\right). \quad (7.5)$$

Il coefficiente  $k$  è non universale, dipendente dalla scelta del cut-off (cfr. Cap. 4). Il termine costante  $\gamma$  è, sotto certe condizioni, universale e può essere isolato considerando combinazioni lineari dell’entropia di entanglement per diverse partizioni

dello spazio per cui il termine leading  $O(L)$  si cancella. Il risultato per uno stato di Hall con ordine topologico  $k$  è:

$$\gamma = \log \sqrt{k}. \quad (7.6)$$

Il termine costante (7.6) nell'entropia di entanglement per uno stato fondamentale bidimensionale con gap e ordine topologico è stato denominato "entropia di entanglement topologica", [51].

La dimostrazione del risultato (7.6), così come dell'ordine topologico, si ottiene dallo studio della teoria effettiva di Chern-Simons (7.1). Nella geometria del disco la teoria possiede dei gradi di libertà unidimensionali che possono essere descritti da una teoria conforme  $c = 1$ , [48]. In breve, i campi di gauge di Chern-Simons  $A_\mu$  sono, in assenza delle sorgenti, delle pure gauge  $A_\mu = \partial_\mu \varphi$ , dove  $\varphi$  si identifica col campo scalare conforme definito sul bordo e l'azione è una derivata totale che si riduce ad un termine di bordo, [52]. Lo studio delle eccitazioni di bordo nell'effetto Hall quantistico mediante le teorie conformi in  $(1 + 1)$  dimensioni ha un'estesa letteratura [50], [48], [52]. Notiamo che tutti i risultati dell'entropia termica e d'entanglement in *CFT* discussi nella tesi trovano applicazioni nell'effetto Hall quantistico. In particolare utilizzando la descrizione di *CFT*, l'entropia d'entanglement topologica  $\gamma$  si dimostra essere identica, [53], all'entropia a temperatura zero di Affleck e Ludwig (Cap.2):

$$\gamma = \log D = -\log g_0^2, \quad (7.7)$$

nella teoria conforme che descrive lo stato di Hall (nell'esempio precedente, la teoria bosonica chirale,  $(c = 1, \bar{c} = 0)$  con raggio di compattificazione  $R^2 = k$ ).

In una teoria conforme razionale, possiamo utilizzare i risultati al Cap. 2 per



esprimere l'entropia  $\gamma$  in termini degli elementi della matrice modulare  $S_{ij}$ :

$$g_i = \frac{S_{i0}}{\sqrt{S_{00}}}, \quad g_0 = \sqrt{S_{00}}. \quad (7.8)$$

La quantità  $D$  si può scrivere:

$$D = \frac{1}{S_{00}} = \sqrt{\sum_i \left(\frac{S_{i0}}{S_{00}}\right)^2} = \sqrt{\sum_i d_i^2}, \quad (7.9)$$

utilizzando il fatto che  $S_{ij}$  è unitaria e simmetrica. In *CFT*, le quantità:

$$d_i = \frac{S_{i0}}{S_{00}}, \quad (7.10)$$

sono dette “dimensioni quantistiche” e sono introdotte nello studio delle regole di fusione: in base alle relazioni di Verlinde (2.24), le  $d_i$  sono autovalori delle matrici dei coefficienti di fusione  $N_{jk}^i$  e determinano la “dimensione” degli spazi di Hilbert ottenuti per ripetuto prodotto di operatori.

Nel lavoro [53] sono stati calcolati i valori che l'entropia di entanglement topologica  $\gamma$  assume in diverse geometrie corrispondenti ad apparati di misura delle eccitazioni anioniche dell'effetto Hall. Le variazioni di  $\gamma$  nei processi di misura delle eccitazioni sono in accordo con le proprietà generali dell'entropia di entanglement in meccanica quantistica.

In conclusione abbiamo brevemente illustrato come i metodi delle *CFT* applicati allo studio dell'entanglement siano al centro delle indagini fisiche in sistemi a massa nulla unidimensionali e massivi in due dimensioni in presenza di ordine topologico.



# Ringraziamenti

Ringrazio il mio relatore, Andrea Cappelli, per avermi iniziato allo studio dell' applicazione dei metodi esatti delle teorie invarianti conformi alla fisica della materia condensata, per la disponibilità e l'impegno dimostrato nei miei confronti.

Ringrazio naturalmente la mia famiglia (anche se mi avrebbero preferito ingegnere...), gli amici e le amiche con cui sono cresciuto a Sesto dai tempi del liceo ed i compagni di studi dell'Università.

Vorrei ringraziare infine il Prof. Giorgio Longhi che mi ha seguito durante la tesi triennale.



# Appendice A

## Funzioni ellittiche di Jacobi e prime form

### A.1 Funzioni ellittiche. Definizioni

La funzione  $\theta\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right](z|\tau)$  con caratteristica  $(\alpha, \beta)$  è definita dalla serie:

$$\theta\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right](z|\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi\tau(n+\alpha)^2 + 2\pi i(n+\alpha)(z+\beta)}, \quad \text{Im}(\tau) > 0. \quad (\text{A.1})$$

le usuali funzioni  $\theta_\nu(z|\tau)$  si ottengono per valori di  $\alpha$  e  $\beta$  pari a  $0, \frac{1}{2}$ . In particolare:

$$\theta\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right](z|\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{n^2}{2}} y^n = \theta_3(z|\tau), \quad (\text{A.2})$$

$$\theta\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right](z|\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{n^2}{2}} y^n = \theta_4(z|\tau), \quad (\text{A.3})$$

$$\theta\left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{smallmatrix}\right](z|\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^2} y^{(n+\frac{1}{2})} = \theta_2(z|\tau), \quad (\text{A.4})$$

$$\theta\left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right](z|\tau) = i \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^2} y^{(n+\frac{1}{2})} = \theta_1(z|\tau), \quad (\text{A.5})$$

dove si è indicato  $q = e^{2\pi i\tau}$  e  $y = e^{2\pi iz}$ .

Notiamo che  $\theta_1(0|\tau) = i \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^2} (-1)^n = 0$ .

Le funzioni  $\theta_\nu(0|\tau)$  possono essere espresse come prodotti infiniti tramite l'identità di Jacobi, [3]:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 + q^{n-\frac{1}{2}}w)(1 + q^{n-\frac{1}{2}}w^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{1}{2}n^2}w^n. \quad (\text{A.6})$$

Si ottiene ponendo  $w = 1, -1$  e  $q^{\frac{1}{2}}$  rispettivamente:

$$\theta_3(0|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 + q^{n-\frac{1}{2}})^2, \quad (\text{A.7})$$

$$\theta_4(0|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 - q^{n-\frac{1}{2}})^2, \quad (\text{A.8})$$

$$\theta_2(0|\tau) = 2q^{\frac{1}{8}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 + q^n)^2. \quad (\text{A.9})$$

Si osservi che la forma di prodotto compare nelle funzioni di partizione  $Z_\nu$ , mentre quella di serie è utilizzata nella prova della bosonizzazione (5.19).

Dal prodotto delle tre  $\theta_\nu(0|\tau) \equiv \theta_\nu(\tau)$  si definisce la funzione  $\eta(\tau)$  di Dedekind:

$$\eta(\tau) = \sqrt[3]{\frac{\theta_2(\tau)\theta_3(\tau)\theta_4(\tau)}{2}} \Rightarrow \quad (\text{A.10})$$

$$\Rightarrow \eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n); \quad (\text{A.11})$$

vale inoltre l'identità, [54]:

$$\theta_1'(\tau) = \pi\theta_2(\tau)\theta_3(\tau)\theta_4(\tau) = 2\pi\eta^3(\tau). \quad (\text{A.12})$$

## A.2 Funzioni ellittiche. Proprietà di trasformazione sotto $\mathcal{S}$

Le funzioni ellittiche di Jacobi hanno le seguenti regole di trasformazione sotto

$$\tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}, \quad z \rightarrow \frac{z}{\tau}:$$

$$\theta_1\left(\frac{z}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) = -i (-i\tau)^{\frac{1}{2}} e^{i\pi \frac{z^2}{\tau}} \theta_1(z|\tau) \quad (\text{A.13})$$

$$\theta_2\left(\frac{z}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) = (-i\tau)^{\frac{1}{2}} e^{i\pi \frac{z^2}{\tau}} \theta_4(z|\tau) \quad (\text{A.14})$$

$$\theta_3\left(\frac{z}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) = (-i\tau)^{\frac{1}{2}} e^{i\pi \frac{z^2}{\tau}} \theta_3(z|\tau) \quad (\text{A.15})$$

$$\theta_4\left(\frac{z}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) = (-i\tau)^{\frac{1}{2}} e^{i\pi \frac{z^2}{\tau}} \theta_2(z|\tau), \quad (\text{A.16})$$

da cui segue  $\eta(-\frac{1}{\tau}) = (-i\tau)^{\frac{1}{2}}\eta(\tau)$ .

Queste relazioni si ottengono direttamente applicando la formula di Poisson:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi\alpha n^2 + \beta n} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{\alpha}(m + \frac{\beta}{2\pi i})^2}, \quad (\text{A.17})$$

alle espressioni (A.5), (A.4), (A.2) e (A.3).

## A.3 Prime Form

La prime form  $E(z|\tau)$  è l'espressione:

$$E(z|\tau) = \frac{\theta_1(z|\tau)}{\theta_1'(\tau)} e^{-\pi \frac{y^2}{\tau_2}}, \quad (\text{A.18})$$

dove  $z = x + iy$  e  $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ ; essa soddisfa l'equazione differenziale:

$$\Delta \log |E(z|\tau)|^2 = 4\pi\delta^2(\mathbf{x}) - \frac{4\pi}{\tau_2}, \quad (\text{A.19})$$

in cui  $\delta^2(\mathbf{x})$  è la funzione delta di Dirac sul toro. Il secondo fattore, a volte omissso nella definizione (A.18), assicura le corrette proprietà di trasformazione modulare sotto  $\mathcal{S}$ :

$$\left| E\left(\frac{z}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) \right| = \left| \frac{E(z|\tau)}{\tau} \right|. \quad (\text{A.20})$$

Si ottiene inoltre, dalle corrispondenti proprietà delle funzioni  $\theta_1(z|\tau)$  e  $\eta(\tau)$

$$|E(z|\tau + 1)| = |E(z|\tau)|, \quad (\text{A.21})$$

$$|E(z + 1|\tau)| = |E(z|\tau)|, \quad (\text{A.22})$$

$$|E(z + \tau|\tau)| = |E(z|\tau)|. \quad (\text{A.23})$$

La prime form è dunque l'estensione doppiamente periodica sul toro della coordinata  $z$  sul piano; si noti che per  $z \sim 0$ ,  $E(z|\tau) \sim z$ .



# Appendice B

## Calcolo di un determinante fermionico

Calcoliamo il determinante del laplaciano sul toro, fissata la coppia di condizioni la contorno  $(u, v) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ; il parametro modulare è  $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ . Le autofunzioni che rispettano le proprietà di periodicità (5.5) sono:

$$\psi_{n,m}^{(u,v)}(z, \bar{z}) = e^{2\pi i \tau \frac{1}{2i\tau_2} [(z-\bar{z})(n+v) + (\tau\bar{z} - \bar{\tau}z)(m+u)]}, \quad (\text{B.1})$$

cui corrispondono gli autovalori:

$$\lambda_{n,m}^{(u,v)} = -\frac{\pi^2}{\tau_2^2} |(n+v) - \tau(m+u)|^2. \quad (\text{B.2})$$

La costante  $-\frac{\pi^2}{\tau_2^2}$  è la stessa del calcolo bosonico, [3], e puo' essere assorbita nella scelta della normalizzazione  $\mathcal{N}$ .

Consideriamo la regolarizzazione della produttoria degli autovalori per  $u = \frac{1}{2}$ :

$$\prod_{n,m \in \mathbb{Z}} |(n+v) - \tau(m+u)|^2 = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \prod_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} (n+v - \tau r)(n+v + \tau r)(n+v - \bar{\tau} r)(n+v + \bar{\tau} r). \quad (\text{B.3})$$

Utilizzando la relazione  $\prod_{n \in \mathbb{Z}} (n + a) = e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}$  che deriva dallo sviluppo, [55]  $\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$ , la (B.3) si riscrive ponendo  $v = \frac{1}{2}$ :

$$\prod_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} (q\bar{q})^{-r} (1 + q^r)^2 (1 + \bar{q}^r)^2. \quad (\text{B.4})$$

Si regolarizza il primo fattore della produttoria su  $r$  con la continuazione analitica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (2k + 1) = \frac{1}{2} \lambda(-1) = -\frac{1}{2} \zeta(-1) = \frac{1}{24}, \quad (\text{B.5})$$

dove  $\lambda(s) = (1 - 2^{-s})\zeta(s)$ , [55]. Si ottiene infine per la funzione di partizione del fermione di Dirac nel settore  $\nu = 3$ :

$$[Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}]^2 = (q\bar{q})^{-\frac{1}{24}} \prod_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} (1 + q^r)^2 (1 + \bar{q}^r)^2 \quad (\text{B.6})$$

$$= \left| \frac{\theta_3(0|\tau)}{\eta(\tau)} \right|^2. \quad (\text{B.7})$$

# Appendice C

## OPE tra operatori di vertice

Vogliamo provare la formula:

$$: e^{i\gamma_1\varphi(z,\bar{z})} : : e^{i\gamma_2\varphi(0)} : = |z|^{2\gamma_1\gamma_2} : e^{i\gamma_1\varphi(z,\bar{z})+i\gamma_2\varphi(0)} : , \quad (\text{C.1})$$

con  $\langle \varphi(z, \bar{z})\varphi(0) \rangle = -\log |z|^2$ .

Abbiamo:

$$\sum_{\substack{k=0 \\ j=0}}^{\infty} \frac{(i\gamma_1)^k}{k!} \frac{(i\gamma_2)^j}{j!} : \varphi^k(z, \bar{z}) : : \varphi^j(0) : \quad (\text{C.2})$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ j=0}}^{\infty} \frac{(i\gamma_1)^k}{k!} \frac{(i\gamma_2)^j}{j!} \sum_{h=0}^{\min(k,j)} \binom{k}{h} \binom{j}{h} h! : \varphi^{k-h}(z, \bar{z})\varphi^{j-h}(0) : [\log |z|^{-2}] \quad (\text{C.3})$$

$$= \sum_{h=0}^{\min(k,j)} \frac{[\log |z|^{2\gamma_1\gamma_2}]^h}{h!} \sum_{\substack{k=0 \\ j=0}}^{\infty} \frac{(i\gamma_1)^{k-h}(i\gamma_2)^{j-h}}{(k-h)!(j-h)!} : \varphi^{k-h}(z, \bar{z})\varphi(0)^{j-h} : \quad (\text{C.4})$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{[\log |z|^{2\gamma_1\gamma_2}]^h}{h!} \sum_{\substack{m \equiv k-h=0 \\ n \equiv j-h=0}}^{\infty} \frac{(i\gamma_1)^m (i\gamma_2)^n}{m!n!} : \varphi^m(z, \bar{z})\varphi(0)^n : \quad (\text{C.5})$$

$$= |z|^{2\gamma_1\gamma_2} : e^{i\gamma_1\varphi(z,\bar{z})+i\gamma_2\varphi(0)} : . \quad (\text{C.6})$$



# Bibliografia

- [1] T. Azeyanagi, T. Nishioka, and T. Takayanagi. Near extremal black hole entropy as entanglement entropy via  $\text{ADS}_2/\text{CFT}_1$ . 2007, [arXiv:0710.2956](#) [hep-th].
- [2] A. Belavin, A.M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. *Nucl. Phys.*, B **241**:333, 1984.
- [3] P. Ginsparg. Applied conformal field theory. In E. Brezin and J.Zinn Justine, editors, *Fields String and Critical Phenomena*. Elsevier, 1989.
- [4] J. Cardy. Conformal invariance and statistical mechanics. In E.Brezin J.Zinn-Justine, editor, *Fields String and Critical Phenomena*. Elsevier, 1989.
- [5] J. Cardy. Conformal invariance. In C. Domb and J.L. Lebowitz, editors, *Phase transitions*, volume 11. Academic Press New York, 1987.
- [6] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Senechal. *Conformal Field Theory*. Springer, 1997.
- [7] G. Mussardo. *Il modello di Ising introduzione alla teoria dei campi ed alle transizioni di fase*. Bollati Boringhieri, 2006.
- [8] D.J. Amit. *Field theory, the Renormalization group and Critical phenomena*. World Scientific, 1984.

- [9] J. Cardy. *Scaling and Renormalization in Statistical Physics*. Cambridge University Press, 1996.
- [10] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields vol.I*. Cambridge University Press, 1995.
- [11] L. Alvarez-Gaumé and E. Witten. Gravitational anomaly. *Nucl. Phys., B* **234**:269, 1984.
- [12] V. Kac. *Infinite Dimensional Lie Algebras*. Cambridge University Press, 1985.
- [13] J. Cardy. Operator Content of Two-Dimensional Conformally Invariant Theories. *Nucl. Phys., B* **270**:186, 1986.
- [14] A. Cappelli. *Struttura delle fasi nelle teorie di spin e di gauge su reticolo*. PhD thesis, Università di Firenze, 1986.
- [15] J. Cardy. Boundary conditions, fusion rules and the Verlinde formula. *Nucl. Phys., B* **324**:581, 1989.
- [16] I. Affleck and A.W.W. Ludwig. Universal Nointeger “Ground-State Degeneracy” in Critical Quantum Systems. *Phys. Rev. Lett.*, **67**:161, 1991.
- [17] N. Ishibashi. The Boundary and Crosscap States in Conformal Field Theory. *University of Tokyo Preprint*, UT-530, 1988.
- [18] R. Dijkgraaf and E. Verlinde. Modular Invariance and the Fusion Algebra. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, B **5**:87, 1988.
- [19] M.A. Nielsen and I. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Communication*. Cambridge University Press, 2000.
- [20] J. Audretsch. *New Directions in Quantum Physics*. Wiley-VCH, 2007.

- [21] C. Bennett, H. Bernstein, S. Popescu, and B. Schumacher. Concentrating Partial Entanglement by Local Operations. *Phys. Rev. A*, **53**, 1996, quant-ph/9511030.
- [22] S. Popescu and D.Rohrlich. Thermodynamics and the mesure of entanglement. *Phys. Rev. A*, **56**:3319, 1997, quant-ph/9610044.
- [23] L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh, and V. Vedral. Entanglement in Many-Body Systems. 2007, quant-ph/0703044.
- [24] C.H. Bennett, D.P. Di Vincenzo, J. Smolin, and W.K. Wootters. Mixed state entanglement and quantum error correction. *Phys. Rev. A*, **54**:3824, 1996, quant-ph/9604024.
- [25] S. Hill and W.K. Wootters. Entanglement of a pair of Quantum bits. *Phys. Rev. Lett.*, **78**:5022, 1997.
- [26] M. Arnesen, S. Bose, and V. Vedral. Natural Thermal and Magnetic Entanglement in the 1D Heisenberg Model. *Phys. Rev. Lett.*, **87**:017901, 2001.
- [27] M. Nielsen. *Quantum Information Theory*. PhD thesis, University of New Mexico, quant-ph/0011036, 1998.
- [28] P. Calabrese and J. Cardy. Entanglement entropy and quantum field theory. *J. Stat. Mech.*, **0406**:P002, 2004, hep-th/0405152.
- [29] P. Calabrese and J. Cardy. Entanglement entropy and quantum field theory: A non- technical introduction. *Int. J. Quant. Inf.*, **4**:429, 2006, quant-ph/0505193.
- [30] C. Holzhey, F. Larsen, and F. Wilczek. Geometric and renormalized entropy in conformal field theory. *Nucl. Phys.*, B **424**:443, 1994, hep-th/9403108.

- [31] V. Korepin. Universality of Entropy Scaling in One Dimensional Gapless Models. *Phys. Rev. Lett.*, **92**:096402, 2004.
- [32] M. Srednicki. Entropy and area. *Phys. Rev. Lett.*, **71**:666, 1993, hep-th/9303048.
- [33] J. Cardy, O. Castro-Alvaredo, and B. Doyon. Form factors of branch-point twist fields in quantum integrable models and entanglement entropy. 2007, arXiv:0706.3384 [hep-th].
- [34] J. Cardy. Entanglement Entropy in Extended Quantum Systems, 2007, arXiv:0708.2978 [cond-mat.stat-mech].
- [35] H. Casini, C. Fosco, and M. Huerta. Entanglement and alpha entropies for a massive Dirac field in two dimensions. *J. Stat. Mech.*, **0507**:P007, 2005, cond-mat/0505563.
- [36] H. Casini and M. Huerta. Analytic results on the geometric entropy for free fields. 2007, arXiv:0707.1300 [hep-th].
- [37] L. Dixon, D. Friedan, E. Martinec, and S. Shenker. The Conformal Field Theory of Orbifolds. *Nucl. Phys.*, B **282**:13, 1987.
- [38] L. Alvarez-Gaumé, G. Moore, and C. Vafa. Theta functions, modular invariance, and strings. *Commun. Math. Phys.*, **106**:1, 1986.
- [39] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, and H. Verlinde.  $C = 1$  Conformal Field Theories on Riemann Surfaces. *Commun. Math. Phys.*, **115**:649, 1988.
- [40] P. Di Francesco, H. Saleur, and J. B. Zuber. Critical Ising correlation functions in the plane and on the torus. *Nucl. Phys.*, B **290**:527, 1987.
- [41] S. Elitzur, E. Gross, E. Rabinovici, and N. Seiberg. Aspect of Bosonization in string theory. *Nucl. Phys.*, B **283**:431, 1987.



- [42] A. Erdelyi et al. *Higher Transcendental Function vol. II*. McGraw-Hill New York, 1953.
- [43] S. Sachdev. *Quantum phase transition*. Cambridge University Press, 1999.
- [44] E. Brezin. Application of the renormalization group to critical phenomena. In R. Bailan and J. Zinn Justin, editors, *Methods in Field Theory*. World Scientific, 1981.
- [45] G. Vidal, J.I. Latorre, E. Rico, and A. Kitaev. Entanglement in quantum critical phenomena. *Phys. Rev. Lett.*, **90**:227902, 2003, [quant-ph/0211074](#).
- [46] T. Roscilde, P. Verrucchi, A. Fubini, S. Haas, and V. Tognetti. Studying Quantum Spin Systems through Entanglement Estimators. *Phys. Rev. Lett.*, **93**:167203, 2004.
- [47] T. Roscilde, P. Verrucchi, A. Fubini, S. Haas, and V. Tognetti. Entanglement and factorized ground states in two dimensional Quantum Antiferromagnets. *Phys. Rev. Lett.*, **94**:147208, 2005.
- [48] X. G. Wen. *Quantum Field Theory of Many Body Systems*. Oxford University Press, 2007.
- [49] F. Wilczek. *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*. World Scientific, 1990.
- [50] S. Das Sarma and A. Pinczuk. *Perspectives in Quantum Hall Effects*. Wiley Interscience, 1996.
- [51] A. Kitaev and J. Preskill. Topological entanglement entropy. *Phys. Rev. Lett.*, **96**:110404, 2006, [hep-th/0510092](#).
- [52] A. Cappelli, G. Dunne, C. Trugenberger, and G. Zemba. Conformal symmetry and universal properties of quantum Hall states. *Nucl. Phys.*, B **398**:531, 1993, [hep-th/9211071](#).

- [53] P. Fendley, M. Fisher, and C. Nayak. Topological entanglement entropy from the holographic partition function. *J. Stat. Phys.*, **126**:1111, 2007, cond-mat/0609072.
- [54] E. Whittaker and G. Watson. *A course in modern analysis*. Cambridge Univeristy Press, 1992.
- [55] M. Abramowitz and I. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. Dover Publications, 1970.